Integración en espacios de Banach

José Rodríguez Ruiz

3 de octubre de 2005

Integración en espacios de Banach

D. Pascual Lucas Saorín, Catedrático de Universidad del Área de Geometría y Topología y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral "Integración en espacios de Banach" ha sido realizada por D. José Rodríguez Ruiz, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Bernardo Cascales Salinas y D. Gabriel Vera Botí, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a ...

Fdo: Pascual Lucas Saorín

INTEGRACIÓN EN ESPACIOS DE BANACH

D. Bernardo Cascales Salinas y D. Gabriel Vera Botí, Catedráticos de Universidad del Área de Análisis Matemático, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZAN:

La presentación de la Tesis Doctoral "INTEGRACIÓN EN ESPACIOS DE BANACH", realizada por D. José Rodríguez Ruiz bajo nuestra inmediata dirección y supervisión en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a ...

Fdo: Bernardo Cascales Salinas

Fdo: Gabriel Vera Botí

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a Bernardo Cascales y Gabriel Vera, por su atenta dirección y el constante apoyo que me han proporcionado a lo largo de estos años.

También debo mucho a David Fremlin, que con sus ideas, sugerencias y resultados ha contribuido de manera notable al desarrollo de algunas partes de esta memoria.

No puedo dejar de dar las gracias a otros matemáticos que me han ayudado a avanzar por el camino: Joseph Diestel, Matías Raja y los miembros del grupo de investigación en Análisis Funcional de la Universidad de Murcia. Por otro lado, María Ángeles Hernández también ha colaborado a la hora de preparar la versión final de este trabajo.

Así mismo, quisiera reconocer la hospitalidad que me han ofrecido David Preiss y Pablo Pedregal durante mis estancias fuera de Murcia.

La amistad y el compañerismo de Antonio Avilés han sido fundamentales para mí desde un principio. Posiblemente, sin su influencia esta memoria nunca habría visto la luz.

De igual modo, me gustaría mostrar mi más profundo agradecimiento a mi familia, por su apoyo incondicional durante todos estos años.

Finalmente, doy las gracias a Gloria por su amor, comprensión y paciencia. Día tras día, me ha enseñado a ver la vida con otros ojos. A ella va dedicado este trabajo.

A Gloria, con amor.

Esta memoria ha sido elaborada durante el período de disfrute de una Beca de Postgrado (referencia AP2002-3767) del Programa Nacional de Formación de Profesorado Universitario del Ministerio de Educación y Ciencia. Dos ayudas complementarias de dicho programa han permitido al autor realizar sendas estancias en el Departamento de Matemáticas del University College, Londres (octubre-diciembre de 2004), y en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla - La Mancha, Ciudad Real (septiembre-diciembre de 2005). Además, durante la primera estancia el autor disfrutó de una “Marie Curie Training Fellowship” de la Unión Europea (dentro del proyecto “Geometric Real Analysis”, HPMT-CT-2000-00037).

Esta investigación también ha estado financiada parcialmente por los proyectos: “Espacios de Banach: compacidad, fragmentabilidad, renormamiento y diferenciabilidad” (BFM2002-01719, Ministerio de Ciencia y Tecnología) y “Geometría y topología infinito dimensional en espacios de Banach” (00690/PI/04, Fundación Séneca).

Contenidos

Introduction

The general framework of this memoir is the *theory of integration of functions with values in Banach spaces*. Historically, the starting point of the research on vector integration goes back to the origins of Banach space theory, and among the pioneering works we can cite those due to Graves [Gra27], Bochner [Boc33], Birkhoff [Bir35], Gel'fand [Gel36], Dunford [Dun35, Dun36, Dun37] and Pettis [Pet38]. The reader can find a comprehensive information about these beginnings in the monograph by Diestel and Uhl [DU77] and [Hil53].

The Lebesgue integral (for real-valued functions) admits several approaches which usually lead to different extensions of the notion of integral in the case of functions with values in Banach spaces. According to Fremlin and Mendoza [FM94, p. 127]:

> *The ordinary functional analyst is naturally impatient with the multiplicity of definitions of 'integral' which have been proposed for vector-valued functions, and would prefer to have a single canonical one for general use*.

The *Bochner integral* has been widely used during all these years, with a remarkable repercussion within Banach space theory (Radon-Nikodým property), see [Bou83] y [DU77]. However, simple examples show that this notion of integrability is quite restrictive, since it requires that the functions have "essentially" separable range. On the other hand, the *Pettis integral*, which does not need such requirement, reached its maturity in the 70's and 80's thanks to the contributions of authors like Talagrand, Fremlin, Edgar, Musial, etc., that brought on a substantial impact in measure theory, see [Tal84], [Mus91] y [Mus02].

Unlike the previous ones, the notion of integral introduced by Garrett Birkhoff in [Bir35] has hardly been studied, in spite of playing a relevant role in the setting of vector integration. Roughly speaking, in this memoir we intend to:

- Analyze in detail the *Birkhoff integral* of vector-valued functions, as well as its corresponding versions within the settings of *integration with respect to vector measures* and *integration of multi-valued functions*.
- Compare these methods of integration with others which are well known (Bochner, Pettis, McShane, Debreu, etc.).
- Characterize, in terms of vector integration, some properties of the Banach spaces where the (multi-) functions take their values.

The original results we include are mostly taken from our papers [CR05], [Rod05], [Rodb], [Rode], [Rodc], [Rodd], [CR04] and [Roda]. We next summarize the content of this work.

Chapter 1. Preliminaries

This auxiliary chapter is devoted, on the one hand, to fix the notation and terminology used throughout this memoir and, on the other hand, to give a brief introduction to fundamental topics like: series in Banach spaces, vector measures, measurability in Banach spaces, the Bochner and Pettis integrals, stable families of measurable functions, liftings in measure spaces, etc. Our aim is to make easier the reading of the remaining chapters. The majority of the results included are well known and are presented without proof.

For the convenience of the reader, at the end of this memoir we have also included a **Subject index**, where the number appearing together each symbol or term simply indicates, as usual, the page where it has been defined.

Chapter 2. The Birkhoff integral of vector-valued functions

In this chapter we study in detail the Birkhoff integral of functions defined on a complete probability space (Ω, Σ, μ) with values in a Banach space $(X, \|\cdot\|)$.

Birkhoff's motivation to propose his definition of integral arose from *"Fréchet's [Fre15] elegant interpretation of the Lebesgue integral"*, [Bir35, p. 357], where the latter is obtained as a limit of *infinite Riemann sums*, replacing in the usual definition of the Riemann integral the intervals with *arbitrary measurable sets* and considering *countable partitions* instead of finite ones. To be more precise:

Theorem (Fréchet). *A function $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ is Lebesgue integrable if and only if, for each $\varepsilon > 0$, there is a countable partition $\Gamma = (A_n)$ of Ω in Σ such that*

$$\sum_n \mu(A_n) \sup(f(A_n)) - \sum_n \mu(A_n) \inf(f(A_n)) \leq \varepsilon,$$

the series being well defined (i.e. the restriction $f|_{A_n}$ is bounded whenever $\mu(A_n) > 0$) and absolutely convergent. In this case, $\int_\Omega f \, d\mu$ is the only point belonging to the intersection

$$\bigcap \Big\{ \Big[\sum_n \mu(A_n) \inf(f(A_n)), \sum_n \mu(A_n) \sup(f(A_n)) \Big] : \ (A_n) \text{ is a countable partition of } \Omega \text{ in } \Sigma$$
$$\text{such that the series are well defined and absolutely convergent} \Big\}.$$

Fréchet presented his approach to the Lebesgue integral as follows, [Fre15, p. 249]:

> *This way of presenting the theory of integration due to Mr. Lebesgue has the advantage, over the way Mr. Lebesgue presented his theory himself, that is very much close to the views of Riemann-Darboux to which many students are familiar with.*

In the case of vector-valued functions, Birkhoff set up his integral by using *unconditionally* convergent series:

Definition 2.1.1 & Corollary 2.1.3 ([Bir35]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a function. If $\Gamma = (A_n)$ is a countable partition of Ω in Σ, the function f is said to be summable with respect to Γ if the restriction $f|_{A_n}$ is bounded whenever $\mu(A_n) > 0$ and the set of sums*

$$J(f,\Gamma) = \Big\{ \sum_n \mu(A_n) f(t_n) : \ t_n \in A_n \Big\}$$

is made up of unconditionally convergent series. The function f is said to be Birkhoff integrable if for each $\varepsilon > 0$ there is a countable partition Γ of Ω in Σ for which f is summable and

$$\mathrm{diam}(J(f,\Gamma)) \leq \varepsilon.$$

In this case, the intersection

$$\bigcap \{ \overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))} : \ f \text{ is summable with respect to } \Gamma \}$$

contains a unique point, denoted by $(B)\int_\Omega f \, d\mu$ and called the Birkhoff integral of f.

The relationship of the Birkhoff integral with the Bochner and Pettis integrals was analyzed by Birkhoff [Bir35], Pettis [Pet38] and Phillips [Phi40], showing that:

- for any function $f : \Omega \longrightarrow X$, we always have:

  $$f \text{ Bochner integrable } \Rightarrow \ f \text{ Birkhoff integrable } \Rightarrow \ f \text{ Pettis integrable},$$

  and the corresponding “integrals” coincide;
- none of the reverse implications holds in general;
- Birkhoff and Pettis integrability are equivalent when X is *separable*.

The previous results have been collected in Section 2.1, which is devoted to present a self contained introduction to the Birkhoff integral. We prove that the notion of Birkhoff integrability coincides with the *unconditional Riemann-Lebesgue integrability*, recently studied by Kadets, Tseytlin and others in [KT00, KSS$^+$02]:

Proposition 2.1.4 ([CR05]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a function. The following conditions are equivalent:*

(i) *f is Birkhoff integrable;*

(ii) *f is unconditionally Riemann-Lebesgue integrable, that is, there is $x \in X$ with the following property: for each $\varepsilon > 0$ there is a countable partition Γ_ε of Ω in Σ such that, for every countable partition $\Gamma = (A_n)$ of Ω in Σ finer than Γ_ε (i.e. each A_n is contained in some element of Γ_ε) and every choice $T = (t_n)$ in Γ (i.e. $t_n \in A_n$ for every n), the series $\sum_n \mu(A_n) f(t_n)$ is unconditionally convergent and*

$$\Big\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \Big\| \leq \varepsilon.$$

In this case, $x = (B)\int_\Omega f\, d\mu$.

One of the most remarkable features of Birkhoff's integration theory is the possibility of characterizing the integrability of a vector-valued function $f : \Omega \longrightarrow X$ in terms of the pointwise compact family of real-valued functions

$$Z_f = \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$$

(where B_{X^*} denotes the closed unit ball of the topological dual X^* of X). In this direction, the notion that appears associated to Birkhoff integrability is the so-called *Bourgain property* [Bou] of a family of real-valued functions.

Definition 2.2.1. *We say that a family* $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *has the Bourgain property if, for each* $\varepsilon > 0$ *and each* $A \in \Sigma$ *with* $\mu(A) > 0$*, there exist* $A_1, \dots, A_n \subset A$*,* $A_i \in \Sigma$ *with* $\mu(A_i) > 0$*, such that*

$$\min_{1\le i\le n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \le \varepsilon \quad \text{for every } h \in \mathscr{H}$$

(where we write $\operatorname{osc}(h|_{A_i}) = \sup\{|h(t) - h(t')| : t, t' \in A_i\}$*).*

The Bourgain property is stronger than the notion of stability in Talagrand's sense and has been widely studied in the literature, see e.g. [GGMS87, Mus91, Mus02, RS85], mostly in connection with the Pettis integral theory. For instance, a classical result of Riddle and Saab [RS85] states that *a bounded function* $f : \Omega \longrightarrow X^*$ *is Pettis integrable if the family* $\{\langle f, x\rangle : x \in B_X\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *has the Bourgain property*.

The fundamental tool to characterize the Birkhoff integrability of a *bounded* function f via the family Z_f is a result of Talagrand (Corollary 2.2.12), taken from [GGMS87], saying that *a uniformly bounded family* $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *has the Bourgain property if and only if it is a family of small oscillation, that is, for each* $\varepsilon > 0$ *there is a finite partition* Γ *of* Ω *in* Σ *such that* $\sum_{A\in\Gamma} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) \le \varepsilon$ *for every* $h \in \mathscr{H}$. As a consequence we obtain the following theorem.

Theorem 2.3.2 ([CR05]). *Let* $f : \Omega \longrightarrow X$ *be a bounded function. The following conditions are equivalent:*

(i) f *is Birkhoff integrable;*
(ii) the family Z_f *has the Bourgain property;*
(iii) there is a norming set $B \subset B_{X^*}$ *(i.e.* $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B\}$ *for every* $x \in X$*) such that the family* $Z_{f,B} = \{x^* \circ f : x^* \in B\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *has the Bourgain property.*

Notice that, in particular, our Theorem 2.3.2 improves the previously mentioned result of Riddle and Saab. On the other hand, as regards non necessarily bounded functions, we have the following characterization.

Theorem 2.3.7 ([CR05]) & Proposition 2.3.14 ([Rodb]). *Let* $f : \Omega \longrightarrow X$ *be a function. The following conditions are equivalent:*

(i) f *is Birkhoff integrable;*
(ii) the family Z_f *is uniformly integrable and has the Bourgain property;*

(iii) *there is a convex norming set $B \subset B_{X^*}$ such that the family $Z_{f,B}$ is uniformly integrable and has the Bourgain property.*

A few remarks about this result follow:

(a) In general, it is not possible to eliminate the convexity assumption in condition *(iii)* (as we show in Example 2.3.21), although this can be done, for instance, when (B_{X^*}, w^*) is separable (Corollary 2.3.28).

(b) The implication *(i)*⇒*(ii)* improves a result of Fremlin [Freb] which ensures that the family Z_f associated to a Birkhoff integrable function f is always stable in Talagrand's sense.

(c) As an application, we provide a proof of the fact that *the indefinite Pettis integral of a Birkhoff integrable function has norm relatively compact range* (Corollary 2.3.8), a property originally proved by Birkhoff [Bir35] that is not satisfied by all Pettis integrable functions, as shown by Fremlin and Talagrand [FT79]. Recall that the range of the indefinite integral of a Pettis integrable function is norm relatively compact if and only if such function is the limit of a sequence of simple functions for the *Pettis seminorm*, defined by

$$\|f\|_P = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |x^* \circ f| \, d\mu.$$

In Section 2.4 we use the previous characterizations in order to replace Pettis integrability with Birkhoff integrability in some known results, which are therefore reinforced.

Riddle, Saab and Uhl [RSU83] proved that, *if X is separable and K is a compact Hausdorff topological space, then a bounded function $f : K \longrightarrow X^*$ is universally scalarly measurable if and only if it is universally Pettis integrable* (the term "universally" means "with respect to each Radon measure on K"). In Corollary 2.4.17 we prove that these conditions are actually equivalent to the fact that the function is *universally Birkhoff integrable*.

The following "weak" version of the Radon-Nikodým property of a Banach space was introduced by Musial in [Mus79].

Definition 2.4.1. *We say that X has the weak Radon-Nikodým property (WRNP) if, for each complete probability space (Ω, Σ, μ) and every countably additive and μ-continuous measure $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, with σ-finite variation, there is a Pettis integrable function $f : \Omega \longrightarrow X$ such that $\nu(E) = (\text{Pettis}) \int_E f \, d\mu$ for every $E \in \Sigma$.*

An important characterization due to Musial, Ryll-Nardzewski, Janicka, Haydon and Bourgain (see e.g. [Dul89, Chapter 6] or [Tal84, Chapter 7]) states that *X does not contain subspaces isomorphic to ℓ^1 if and only if X^* has the WRNP; the latter is the case if and only if the "identity" function $I : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ is universally Pettis integrable*. In the previous equivalences we can replace "Pettis" with "Birkhoff", as follows.

Theorems 2.4.19, 2.4.22 ([CR05]) and 2.4.25. *The following conditions are equivalent:*

(i) X *does not contain subspaces isomorphic to* ℓ^1*;*

(ii) *for each complete probability space* (Ω,Σ,μ) *and every countably additive* μ*-continuous measure* $\nu : \Sigma \longrightarrow X^*$, *with* σ*-finite variation, there exists a Birkhoff integrable function* $f : \Omega \longrightarrow X^*$ *such that* $\nu(E) = (B)\int_E f\, d\mu$ *for every* $E \in \Sigma$*;*

(iii) *the "identity" function* $I : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ *is universally Birkhoff integrable.*

It is worth mentioning here that, as a consequence of *(i)⇒(ii)*, in Chapter 3 we obtain a partial solution to a problem posed by Fremlin [Fre95, Fre94] regarding the representation of vector measures as indefinite integrals of *McShane* integrable functions.

As we have already said, the notions of Birkhoff and Pettis integrability coincide for functions with values in separable Banach spaces. In addition, by virtue of our characterization of the WRNP in dual spaces, this equivalence also holds for functions with values in the dual of separable Banach spaces without subspaces isomorphic to ℓ^1 (Corollary 2.4.24). In Section 2.5 we will show that the coincidence of Birkhoff and Pettis integrability characterizes separability inside a wide class of Banach spaces: the *weakly Lindelöf determined* spaces (that includes, for instance, all weakly compactly generated ones). More precisely, we have the following results.

Theorems 2.5.1 and 2.5.2 ([Rod05]). *Suppose that* X *is weakly Lindelöf determined.*

(i) *If* X *is not separable, then there exist a complete probability space* (Ω,Σ,μ) *and a bounded Pettis integrable function* $f : \Omega \longrightarrow X$ *that is not Birkhoff integrable.*

(ii) *If the density character of* X *is greater than or equal to the continuum, then there exists a bounded universally Pettis integrable function* $f : [0,1] \longrightarrow X$ *that is not Birkhoff integrable.*

In the particular case $X = c_0([0,1])$, the constructions employed in the proof of *(ii)* allow us to obtain a counterexample to the analogue of Lebesgue's *dominated convergence theorem* for the Birkhoff integral (Example 2.5.4). This means another difference with the Bochner and Pettis integrals, for which such a result is always true (for the norm and weak topologies, respectively).

Chapter 3. The Birkhoff and McShane integrals with respect to vector measures

In this chapter we will consider several theories of *integration of vector-valued functions with respect to vector measures*. Given two Banach spaces X and Y, a measurable space (Ω,Σ) and a countably additive measure $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ (where $\mathscr{L}(X,Y)$ stands for the Banach space of all the continuous linear mappings from X to Y), the "integral" with respect to μ of a simple function with values in X, say $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$, can be defined in a natural way as

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)(x_i) \in Y,$$

that is, substituting the product by scalars $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ with the canonical bilinear mapping $\mathscr{L}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$. In general, the different notions of integral analyzed in this chapter involve Riemann sums of the form $\sum_i \mu(A_i)(f(t_i))$.

The first studies on integration of vector-valued functions with respect to vector measures go back to the origins of Banach space theory, see [Hil53]. Possibly, during this time the most extended method has been that of Bartle [Bar56], which was generalized and studied extensively by Dobrakov in a long series of works initiated in [Dob70a], see [DP04, Pan95] and the references therein. Within the setting of this chapter, the differences between the *Bartle bilinear *-integral* and the *Dobrakov integral* are simply language matters. In order to formulate the definition we need to introduce some terminology.

Recall that the *contextual semivariation* of μ is the function $\hat{\mu}:\Sigma\longrightarrow[0,+\infty]$ defined by $\hat{\mu}(A)=\sup\|\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)(x_i)\|$, where the supremum is taken over all the finite partitions $(A_i)_{i=1}^{n}$ of A in Σ and all the finite collections $(x_i)_{i=1}^{n}$ in B_X. Throughout this chapter we assume that $\hat{\mu}$ is complete and *continuous* (i.e. for every decreasing sequence $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ in Σ with $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\emptyset$, we have $\text{lím}_n\,\hat{\mu}(E_n)=0$). The continuity of $\hat{\mu}$ ensures that $\hat{\mu}(\Omega)<+\infty$.

Definition 3.1.14 ([Bar56, Dob70a]). *A function $f:\Omega\longrightarrow X$ is called Dobrakov integrable with respect to μ if there is a sequence of simple functions $f_n:\Omega\longrightarrow X$ converging to f $\hat{\mu}$-a.e. such that, for each $E\in\Sigma$, there exists $\text{lím}_n\int_E f_n\,d\mu$. In this case, the limit $(D)\int_\Omega f\,d\mu=\text{lím}_n\int_\Omega f_n\,d\mu$ is independent of the sequence (f_n) and is called the Dobrakov integral of f with respect to μ.*

For instance, $\hat{\mu}$ is always continuous in the following particular cases:

(a) *Integration of vector-valued functions with respect to scalar measures*; that is, $X=Y$ and $\mu(E)(x)=\nu(E)x$, where ν is a probability measure on Σ. In this case, a function $f:\Omega\longrightarrow X$ is Dobrakov integrable with respect to μ if and only if it is strongly measurable and Pettis integrable with respect to ν.

(b) *Integration of real-valued functions with respect to vector measures*; that is, $X=\mathbb{R}$ and $\mu(E)(a)=a\nu(E)$, where $\nu:\Sigma\longrightarrow Y$ is a countably additive measure. In this case, a function $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ is Dobrakov integrable with respect to μ if and only if it is integrable in the sense of Bartle, Dunford and Schwartz [BDS55] with respect to ν (see [DS88]). The Bartle-Dunford-Schwartz integral has been studied extensively by several authors, among whom we can cite Lewis [Lew70, Lew72], Kluvanek and Knowles [KK76] and, more recently, Curbera [Cur92, Cur94, Cur95] and Fernández *et al.* [FMN^{+}05].

Regarding the question of considering a "Birkhoff type" integral for real-valued functions and vector measures, Lewis [Lew72, p. 307] claimed:

> *The paper of Garrett Birkhoff [Bir35] is apparently the first to relate unconditional convergence and integrability (for vector functions and scalar measures) in Banach spaces. However, the methods of Birkhoff are not easily adaptable to our setting.*

We next see how the difficulties disappear if we define the integral "refining partitions", that is, modifying in the obvious way the definition of the unconditional Riemann-Lebesgue integral (Proposition 2.1.4). In fact, the same method can be applied to vector-valued functions and vector measures, obtaining the notion of S^*-*integral* studied by Dobrakov in [Dob88]. It seems that Dobrakov was unaware of the Birkhoff integral, and his motivation to introduce the S^*-integral arose directly from the work of Kolmogorov [Kol30, Tik91] on integration theory.

Definition 3.2.1 ([Dob88]). *A function $f:\Omega\longrightarrow X$ is called S^*-integrable with respect to μ, with S^*-integral $y\in Y$, if for each $\varepsilon>0$ there is a countable partition Γ_ε of Ω in Σ such that, for every countable partition $\Gamma=(A_n)$ of Ω in Σ finer than Γ_ε and every choice $T=(t_n)$ in Γ, the series $\sum_n \mu(A_n)(f(t_n))$ is unconditionally convergent and $\|\sum_n \mu(A_n)(f(t_n))-y\|\leq\varepsilon$. The vector $y\in Y$ (necessarily unique) is denoted by $(S^*)\int_\Omega f\,d\mu$.*

The relationship between the Dobrakov integral and the S^*-integral is made clear in Theorem 3.2.9, due to Dobrakov himself [Dob88]: *a function $f:\Omega\longrightarrow X$ is Dobrakov integrable if and only if it is strongly measurable and S^*-integrable (in this case, the respective integrals coincide)*. Notice that this result generalizes the fact that the notions of Birkhoff and Pettis integrability coincide for strongly measurable functions. On the other hand, in the case of integration of real-valued functions with respect to vector measures, we have obtained the following

Corollary 3.2.11. *Under the assumptions of (b), a function $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ is integrable in the sense of Bartle, Dunford and Schwartz with respect to ν if and only if it is S^*-integrable with respect to μ. In this case, the respective integrals coincide.*

As we have already mentioned, every Birkhoff integrable function is the limit, for the Pettis seminorm, of a sequence of simple functions. In the case of vector-valued functions and vector measures, we can *not* ensure, in general, the norm relative compactness of the range of the “indefinite integral” of every S^*-integrable function. However, it is yet possible to approximate by simple functions:

Theorem 3.2.13 ([Rodd]). *Let $f:\Omega\longrightarrow X$ be a function that is S^*-integrable with respect to μ. Then for each $\varepsilon>0$ there is a simple function $g:\Omega\longrightarrow X$ such that*

$$\sup_{E\in\Sigma}\left\|(S^*)\int_E f\,d\mu-\int_E g\,d\mu\right\|\leq\varepsilon.$$

Section 3.3 is devoted to study the *McShane integral of vector-valued functions with respect to vector measures*. In the framework of integration with respect to scalar measures, this notion of integral, introduced by McShane in [McS69, McS83], has been widely analyzed during the last years. The case of vector-valued functions defined on $[0,1]$ was considered by Gordon [Gor90], Fremlin and Mendoza [FM94]. Later, Fremlin [Fre95] generalized this integral for functions defined on an arbitrary quasi-Radon topological measure space $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$, that is, a topological space $(T,\mathfrak{T})$ with a non negative, finite and complete measure θ, on a σ-álgebra $\mathscr{S}\supset\mathfrak{T}$, such that θ is τ-additive and inner regular with respect to closed sets (e.g. a compact Hausdorff topological space with a Radon measure).

In order to recall the definition of the McShane integral we need to introduce more terminology. A *gauge* on $(T,\mathfrak{T})$ is a function $\delta:T\longrightarrow\mathfrak{T}$ such that $t\in\delta(t)$ for every $t\in T$. A *partial McShane partition* of T is a finite collection $\{(E_i,t_i):1\leq i\leq p\}$, where (E_i) is a disjoint family in $\mathscr{S}$ and $t_i\in T$ for every $1\leq i\leq p$. We say that such a ‘partition’ is *subordinate* to δ if $E_i\subset\delta(t_i)$ for every $1\leq i\leq p$. It is worth it to emphasize that, thanks to the τ-additivity of θ, for each gauge δ on $(T,\mathfrak{T})$ and each $\eta>0$, we can always find a partial McShane partition $\{(E_i,t_i):1\leq i\leq p\}$ of T subordinate to δ such that $\theta(T\setminus\bigcup_{i=1}^p E_i)\leq\eta$.

Definition 3.3.2 & Proposition 3.3.10 (Fremlin). *Let $f : T \longrightarrow X$ be a function. We say that f is McShane integrable, with McShane integral $x \in X$, if for each $\varepsilon > 0$ there exist a gauge δ on $(T, \mathfrak{T})$ and $\eta > 0$ such that*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} \theta(E_i) f(t_i) - x \Big\| \leq \varepsilon$$

for every partial McShane partition $\{(E_i, t_i) : 1 \leq i \leq p\}$ of T subordinate to δ with the property that $\theta(T \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i) \leq \eta$.

The relationship between the Birkhoff, McShane and Pettis integrals has been discussed by Fremlin [Fre95, Freb], showing that, for a given function $f : T \longrightarrow X$, we have

$$f \text{ Birkhoff integrable} \;\Rightarrow\; f \text{ McShane integrable} \;\Rightarrow\; f \text{ Pettis integrable},$$

and the corresponding integrals coincide. None of the reverse implications holds in general, see [Freb, FM94], although the three notions of integrability are equivalent if X is separable.

Naturally, in order to set up the McShane integral with respect to a vector measure we need to add some "suitable" additional assumptions to the measurable space (Ω, Σ) and the vector measure $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X, Y)$. To be precise, throughout Section 3.3 we suppose that $\tau \subset \Sigma$ is a topology on Ω and that $\hat{\mu}$ satisfies the following properties:

(α) for every $E \in \Sigma$ and every $\varepsilon > 0$ there is $G \in \tau$, $G \supset E$, such that $\hat{\mu}(G \setminus E) \leq \varepsilon$;
(β) for every (non empty) upwards directed family $\mathscr{G} \subset \tau$, we have

$$\inf\{\hat{\mu}(\cup\mathscr{G} \setminus G) : \; G \in \mathscr{G}\} = 0.$$

Equivalently, any (some) control measure of μ is quasi-Radon.

Definition 3.3.9 ([Rodc]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a function. We say that f is McShane integrable with respect to μ, with McShane integral $y \in Y$, if for each $\varepsilon > 0$ there exist a gauge δ on (Ω, τ) and $\eta > 0$ such that*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f(t_i)) - y \Big\| \leq \varepsilon$$

for every partial McShane partition $\{(E_i, t_i) : 1 \leq i \leq p\}$ of Ω subordinate to δ with the property that $\hat{\mu}(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i) \leq \eta$. The vector $y \in Y$ (necessarily unique) is denoted by $(M)\int_\Omega f \, d\mu$.

We have already mentioned that Fremlin [Freb] proved that any Birkhoff integrable function, defined on a quasi-Radon topological measure space, is McShane integrable. Possibly, our main contribution to the theory of the McShane integral with respect to vector measures is the following extension of that result.

Theorem 3.3.17 ([Rodc]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a function. If f is S^*-integrable with respect to μ, then f is McShane integrable with respect to μ and $(S^*)\int_\Omega f \, d\mu = (M)\int_\Omega f \, d\mu$.*

A consequence of the previous theorem is the fact that, under the assumptions of the particular case (b), *a function $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ is McShane integrable with respect to μ if and only if it is integrable in the sense of Bartle, Dunford and Schwartz with respect to ν (and the respective integrals coincide)*, see Corollary 3.3.19. In general, we have the following characterization.

Corollary 3.3.18 ([Rodc]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a strongly measurable function. The following conditions are equivalent:*

(i) *f is Dobrakov integrable;*
(ii) *f is S^*-integrable;*
(iii) *f is McShane integrable.*

In this case, $(D)\int_\Omega f\,d\mu = (S^*)\int_\Omega f\,d\mu = (M)\int_\Omega f\,d\mu$.

On the other hand, bearing in mind the McShane integrability of any Birkhoff integrable function (defined on a quasi-Radon topological measure space), our characterization of the WRNP in dual Banach spaces (Chapter 2) allows us to provide a partial answer to the following problem posed by Fremlin in [Fre94] and [Fre95, 4G(c)]:

> *Suppose that $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ is a quasi-Radon topological measure space, that Z is a Banach space and that $\nu : \mathscr{S} \longrightarrow Z$ is a function. ¿Under what conditions will ν be the indefinite integral of a McShane integrable function from T to Z?*

Corollary 3.3.21. *The following conditions are equivalent:*

(i) *X does not contain subspaces isomorphic to ℓ^1;*
(ii) *for each quasi-Radon topological measure space $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ and every countably additive θ-continuous measure $\nu : \mathscr{S} \longrightarrow X^*$, with σ-finite variation, there is a McShane integrable function $f : T \longrightarrow X^*$ such that $\nu(E) = (M)\int_E f\,d\theta$ for every $E \in \mathscr{S}$.*

Fremlin showed in [Fre95] that *the range of the indefinite integral of any McShane integrable function, defined on a quasi-Radon topological measure space, is norm relatively compact*. Fremlin's proof is complicated and involves techniques of stable families of measurable functions. Curiously, when analyzing the more general case of vector-valued functions and vector measures, we have found a simpler proof of that result, which admits the following extension in terms of "approximation" by simple functions.

Theorem 3.3.22 ([Rodd]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a function that is McShane integrable with respect to μ. Then for each $\varepsilon > 0$ there is a simple function $g : \Omega \longrightarrow X$ such that*

$$\sup_{E\in\Sigma}\left\|(M)\int_E f\,d\mu - \int_E g\,d\mu\right\| \leq \varepsilon.$$

It is well known that the normed space of all (scalar equivalence classes of) Dunford integrable functions (defined on a probability space), equipped with the Pettis norm, *is not complete* in general, and the same holds for the subspaces made up of all Birkhoff, McShane or Pettis integrable functions. However, Díaz, Fernández, Florencio and Paúl [DFFP95] proved that the spaces of Dunford and Pettis integrable functions are always *ultrabornological* and, in particular, *barrelled*, which allows us to apply the "uniform boundedness" and "closed graph" theorems to linear mappings defined on them with values in Banach spaces.

The results of [DFFP95] are based on a general principle that states that a normed space with a "suitable" Boolean algebra of projections is ultrabornological. In the last section of this chapter we apply this criterion to the normed spaces of (equivalence classes of) vector-valued functions (Dobrakov, S^* or McShane) integrable with respect to a vector measure, equipped with the norm given by the semivariation of the indefinite integral (which is the natural generalization of the Pettis norm to this context). Thus, our Theorems 3.4.10, 3.4.17 and 3.4.25 say us that *each one of these spaces is ultrabornological (resp. barrelled) if and only if, for each atom A of $\hat{\mu}$, the operator $\mu(A)$ has closed range*. Notice that this condition is fulfilled automatically in the case (a) of integration of vector-valued functions with respect to scalar measures.

Chapter 4. The Birkhoff and Pettis integrals for multi-valued functions

Since the pioneering works of Aumann [Aum65] and Debreu [Deb67], the theory of integration of *multi-functions* (also called correspondences or multi-valued functions) has been widely studied. This development has been to a large extent due to the applications which this theory provides in Mathematical Economics, Optimization, etc. The monographs by Castaing and Valadier [CV77], Klein and Thompson [KT84], Aubin and Frankowska [AF90] and the recent survey by Hess [Hes02] contain a good deal of information in this respect.

In this chapter we study the integration of multi-functions defined on a complete probability space (Ω,Σ,μ) with values in the family $cwk(X)$ of all (non empty) convex and weakly compact subsets of a Banach space X. In general, the different methods that we consider share a common feature: the integrability of a multi-function $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ can be reinterpreted in terms of the *single-valued* function $j\circ F$, where j is a suitable isometric embedding of $cwk(X)$ (which, endowed with the Hausdorff distance h, becomes a complete metric space) in a Banach space. Recall that the *Hausdorff distance* between two sets $C,D\in cwk(X)$ is defined by

$$h(C,D)=\inf\{\eta>0:\ C\subset D+\eta B_X,\ D\subset C+\eta B_X\}.$$

The particular embedding j that we next introduce is a standard tool in the study of the hyperspace $(cwk(X),h)$.

Lemma 4.1.4. *Given $C\in cwk(X)$ and $x^*\in X^*$, we write $\delta^*(x^*,C)=\sup\{x^*(x):x\in C\}$. Then the mapping $j:cwk(X)\longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ defined by $j(C)(x^*)=\delta^*(x^*,C)$ satisfies the following properties:*

(i) $j(C+D)=j(C)+j(D)$ *for every* $C,D\in cwk(X)$*;*
(ii) $j(\lambda C)=\lambda j(C)$ *for every* $\lambda\geq 0$ *and every* $C\in cwk(X)$*;*
(iii) $h(C,D)=\|j(C)-j(D)\|_\infty$ *for every* $C,D\in cwk(X)$*;*
(iv) $j(cwk(X))$ *is closed in* $\ell_\infty(B_{X^*})$*.*

As we have already mentioned, the study of the integrability of a vector-valued function is considerably simplified when the Banach space where the function takes its values is *separable*. Therefore, since we are going to analyze the integrability of a multi-function $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ through the composition $j\circ F$, it is natural to ask under what conditions we can ensure that $\overline{\mathrm{span}(j(cwk(X)))}$ is separable or, equivalently, that $(cwk(X),h)$ is separable. It is well known that the family $ck(X)$, made up of all the (non empty) convex and norm compact subsets of X, is

h-separable if (and only if) X is separable. As regards $cwk(X)$, we have the following characterizations.

Proposition 4.1.10 ([CR04]). *Suppose that X^* has the Radon-Nikodým property (e.g. X^* is separable). Then $(cwk(X),h)$ is separable if and only if X is finite-dimensional.*

Proposition 4.1.12. *Suppose that X is a dual Banach space. Then $(cwk(X),h)$ is separable if and only if X is separable and has the Schur property.*

The notions of integral for multi-functions that we consider in this chapter generalize in a natural way the Bochner, Birkhoff and Pettis integrals (the latter in the separable case). The counterpart of the Bochner integral was introduced by Debreu [Deb67] for multi-functions with values in $ck(X)$, although it can be extended to the case of multi-functions with values in $cwk(X)$, as pointed out by Byrne [Byr78]. The book [KT84] is a convenient reference about the Debreu integral, whose definition is next recalled.

Definition 4.1.27. *A multi-function $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ is called Debreu integrable if the composition $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ is Bochner integrable. In this case, the Debreu integral of F is the unique element $(De)\int_\Omega F\, d\mu \in cwk(X)$ satisfying $j((De)\int_\Omega F\, d\mu) = (\text{Bochner})\int_\Omega j \circ F\, d\mu$.*

We stress that, in fact, this notion of integrability does not depend on the particular embedding j (with the properties mentioned in Lema 4.1.4) that we are considering.

On the other hand, the Pettis integral of multi-functions, introduced in [CV77, Chapter V, §4], has been subject of study in the last years, see e.g. [Amr98, EAH00, HZ02, Zia97, Zia00]. Within this theory it is assumed that X is *separable*; it is well known that this hypothesis ensures that a multi-function $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ admits *strongly measurable* selectors (that is, functions $f : \Omega \longrightarrow X$ such that $f(t) \in F(t)$ for every $t \in \Omega$) if the function $\delta^*(x^*,F) \equiv \delta^*(x^*,F(\cdot)) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ is measurable for every $x^* \in X^*$.

Definition 4.2.1. *Suppose that X is separable. A multi-function $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ is said to be Pettis integrable if*

(i) $\delta^*(x^*,F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ for every $x^* \in X^*$;
(ii) for each $A \in \Sigma$, there is $(P)\int_A F\, d\mu \in cwk(X)$ such that

$$\delta^*\Big(x^*,(P)\int_A F\, d\mu\Big) = \int_A \delta^*(x^*,F)\, d\mu \quad \text{for every } x^* \in X^*.$$

The following result (due to Castaing and Valadier [CV77], El Amri and Hess [EAH00] and Ziat [Zia97, Zia00]) generalizes to the case of multi-functions a classical characterization of Pettis integrability for single-valued functions with values in separable Banach spaces. In view of its significance for the rest of the chapter, we have decided to include a proof.

Theorem 4.2.3. *Suppose that X is separable. Let $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ be a multi-function. The following conditions are equivalent:*

(i) F is Pettis integrable;
(ii) the family $\{\delta^*(x^*,F) : x^* \in B_{X^*}\}$ is uniformly integrable;

(iii) $\delta^*(x^*,F)$ *is measurable for every* $x^* \in X^*$ *and each strongly measurable selector of* F *is Pettis integrable.*

In this case, for each $A \in \Sigma$, *we have*

$$(P)\int_A F\ d\mu = \{(\text{Pettis})\int_A f\ d\mu : \ f:\Omega \longrightarrow X \textit{ is a Pettis integrable selector of } F\}.$$

Notice that, given a multi-function $F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$, we have $\langle e_{x^*}, j\circ F\rangle = \delta^*(x^*,F)$ for every $x^* \in X^*$, where $e_{x^*} \in B_{\ell_\infty(B_{X^*})^*}$ is the "evaluation" at x^*. Thus, the Pettis integrability of F guarantees that the single-valued function $j\circ F$ is "Pettis integrable with respect to the norming set $\{e_{x^*} : x^* \in B_{X^*}\} \subset B_{\ell_\infty(B_{X^*})^*}$". It is natural to ask ourselves whether there is some relation between the Pettis integrability of F and that of $j\circ F$. We next summarize the partial answers we know.

Proposition 4.2.7 ([CR04]) & Corollaries 4.2.12 and 4.2.13. *Suppose that* X *is separable. Let* $F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ *be a multi-function. Let us consider the following conditions:*

(i) $j\circ F$ *is Pettis integrable;*

(ii) F *is Pettis integrable.*

Then (i)⇒(ii) and, in this case, we have $j((P)\int_A F\ d\mu) = (\text{Pettis})\int_A j\circ F\ d\mu$ *for every* $A\in\Sigma$. *On the other hand, (i) y (ii) are equivalent in each of the following cases:*

- *if* $(F(\Omega),h)$ *is separable (e.g.* $F(\Omega)\subset ck(X)$*);*
- *if the family* $\{\delta^*(x^*,F) : x^* \in B_{X^*}\}$ *is stable;*
- *if* μ *is perfect and we assume Martin's Axiom.*

In Section 4.3 we discuss the natural generalization of the *Birkhoff integral* to the case of multi-functions $F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$, comparing it with the Debreu and Pettis integrals.

Definition 4.3.1 ([CR04]). *Let* $F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ *be a multi-function. We say that* F *is Birkhoff integrable if the composition* $j\circ F:\Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ *is Birkhoff integrable. In this case, the Birkhoff integral of* F *is the unique element* $(B)\int_\Omega F\ d\mu \in cwk(X)$ *satisfying*

$$j\Big((B)\int_\Omega F\ d\mu\Big) = (B)\int_\Omega j\circ F\ d\mu.$$

Similarly to what happens with Debreu integrability, the notion of Birkhoff integrability admits an "intrinsic" characterization that does not depend on the embedding j. Recall that a series $\sum_n C_n$ of elements of $cwk(X)$ is said to be *unconditionally convergent* if, for arbitrary choices $x_n \in C_n$, the series $\sum_n x_n$ converges unconditionally in X. If this is the case, we know that the set of sums $\sum_n C_n := \{\sum_n x_n : x_n \in C_n\}$ also belongs to $cwk(X)$ (Lemma 4.1.17).

Corollary 4.3.2 ([CR04]). *Let $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ be a multi-function. The following conditions are equivalent:*

(i) F is Birkhoff integrable;

(ii) there exists $C \in cwk(X)$ with the following property: for every $\varepsilon > 0$ there is a countable partition Γ_ε of Ω in Σ such that, for every countable partition $\Gamma = (A_n)$ of Ω in Σ finer than Γ_ε and any choice $T = (t_n)$ in Γ, the series $\sum_n \mu(A_n)F(t_n)$ is unconditionally convergent and

$$h\Big(\sum_n \mu(A_n)F(t_n), C\Big) \le \varepsilon.$$

In this case, $C = (B)\int_\Omega F\, d\mu$.

As in the case of single-valued functions, the Birkhoff integral for multi-functions is intermediate between the Debreu and Pettis integrals:

Corollary 4.3.6 & Theorem 4.3.7 ([CR04]). *Let $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ be a multi-function. If F is Debreu integrable, then F is Birkhoff integrable, with $(B)\int_\Omega F\, d\mu = (De)\int_\Omega F\, d\mu$. The converse holds if X is finite-dimensional.*

Corollaries 4.3.12 and 4.3.13 ([CR04]). *Suppose that X is separable. Let $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ be a multi-function.*

(i) If F is Birkhoff integrable, then:

- *F is Pettis integrable;*
- *F admits strongly measurable selectors;*
- *each strongly measurable selector of F is Birkhoff integrable;*
- *for each $A \in \Sigma$ we have*

$$(B)\int_A F\, d\mu = \Big\{(B)\int_A f\, d\mu : \ f : \Omega \longrightarrow X \text{ is a Birkhoff integrable selector of } F\Big\}.$$

(ii) Suppose that $(F(\Omega), h)$ is separable (e.g. $F(\Omega) \subset ck(X)$). Then F is Birkhoff integrable if and only if it is Pettis integrable.

Recall that, when one considers single-valued functions with values in a separable Banach space, Birkhoff and Pettis integrability are equivalent; moreover, under these conditions, we also know that both notions of integrability agree with that of Bochner for bounded functions. The following results show that in the case of multi-functions such equivalences are not valid in general.

Corollary 4.3.11 ([CR04]) *Suppose that X^* has the Radon-Nikodým property (e.g. X^* is separable). The following conditions are equivalent:*

(i) every Birkhoff integrable multi-function $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ is Debreu integrable;

(ii) every bounded Birkhoff integrable multi-function $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ is Debreu integrable;

(iii) X is finite-dimensional.

Theorem 4.3.15 ([CR04]). *Suppose that X is infinite-dimensional and that X^* is separable. Then there exists a bounded Pettis integrable multi-function $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ that is not Birkhoff integrable.*

Chapter 5. Absolutely summing operators and integration of vector-valued functions

In the last chapter of this memoir we relate vector integration to the theory of absolutely summing operators. Recall that an operator (i.e. linear and continuous mapping) between Banach spaces $u : X \longrightarrow Y$ is called *absolutely summing* if, for each unconditionally convergent series $\sum_n x_n$ in X, the series $\sum_n u(x_n)$ is absolutely convergent. Since absolutely summing operators improve the summability of sequences, *"it is not surprising that they also improve the integrability of vector-valued functions"*, as mentioned in [DJT95, p. 56]. Roughly speaking, in this chapter we intend to find answers to questions of the following type:

> *Let us consider two notions of integrability A and B for functions defined on a complete probability space (Ω,Σ,μ) with values in a Banach space, such that every A-integrable function is also B-integrable. Let $u : X \longrightarrow Y$ be an absolutely summing operator between Banach spaces. If $f : \Omega \longrightarrow X$ is a B-integrable function, ¿is the composition $u \circ f : \Omega \longrightarrow Y$ A-integrable?*

Apparently, Diestel [Die72] was the first in considering questions of this nature, showing that

(i) *the composition $u \circ f$ is Bochner integrable for every strongly measurable and Pettis integrable function $f : \Omega \longrightarrow X$;*
(ii) *the linear mapping*
$$\tilde{u} : P_m(\mu, X) \longrightarrow L^1(\mu, Y), \quad f \mapsto u \circ f,$$
is continuous, where $P_m(\mu, X)$ denotes the space of all (scalar equivalence classes of) strongly measurable and Pettis integrable functions from Ω to X, equipped with the Pettis norm.

In fact, Diestel also proved that, when μ is atomless, both conditions (i) and (ii) are equivalent to requiring that u is absolutely summing.

On the other hand, *assuming that μ is perfect*, Belanger and Dowling showed in [BD88] that *if $f : \Omega \longrightarrow X$ if a bounded Pettis integrable function, then $u \circ f$ is scalarly equivalent to a Bochner integrable function*. More recently, Marraffa [Mar04] has proved the analogue of Diestel's result for McShane integrable functions defined on a compact Hausdorff topological space endowed with a Radon measure.

Our starting point is the following lemma, which ensures us that in order to determine if the composition of a Dunford integrable function with an absolutely summing operator is Bochner integrable, we only need to check if such composition is strongly measurable.

Lemma 5.2.2 ([Roda]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a Dunford integrable function and $g : \Omega \longrightarrow Y$ a function that is scalarly equivalent to $u \circ f$. The following conditions are equivalent:*

(i) g is Bochner integrable;
(ii) g is strongly measurable.

In particular, $u \circ f$ is Bochner integrable if and only if it is strongly measurable.

It is well known that every absolutely summing operator is weakly compact. Combining this fact with the results of Edgar [Edg77] on scalar equivalence with strongly measurable functions, we can improve the previously mentioned theorem of Belanger and Dowling:

Theorem 5.2.3 ([Roda]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a Dunford integrable function. Then $u \circ f$ is scalarly equivalent to some Bochner integrable function $u_f : \Omega \longrightarrow Y$.*

Let $D(\mu, X)$ be the normed space of all (scalar equivalence classes of) Dunford integrable functions from Ω to X, equipped with the Pettis norm. As we have already said, although this space is not complete in general, it is always barrelled and, therefore, we can apply the "closed graph theorem" to linear mappings defined on it with values in a Banach space. In particular, thanks to this technique we can extend condition (ii) of Diestel's result, showing that the linear mapping

$$\tilde{u} : D(\mu, X) \longrightarrow L^1(\mu, Y), \quad u \mapsto u_f,$$

is continuous (Corollary 5.2.7).

Heiliö [Hei88] studied the class of the (non negative and finite) measures on $\mathrm{Baire}(X, w)$ for which the identity $I_X : X \longrightarrow X$ is Dunford integrable, called *weakly summable measures*. In [Hei88, 8.2.5] the following problem was posed: *Given a weakly summable measure ϑ on* $\mathrm{Baire}(X, w)$*, we can consider the image measure ϑu^{-1} on* $\mathrm{Baire}(Y, w)$*. ¿Does there exist a (non negative and finite) measure $\tilde{\vartheta}$ on* $\mathrm{Borel}(Y, \|\cdot\|)$ *extending ϑu^{-1} such that I_Y es Bochner integrable with respect to $\tilde{\vartheta}$?* As an application of Theorem 5.2.3, in Proposition 5.2.5 we show that this question has affirmative answer.

Notice that, by Lemma 5.2.2 and Pettis' Measurability Theorem, *if $u(X)$ is separable, then $u \circ f$ is Bochner integrable for every Dunford integrable function $f : \Omega \longrightarrow X$*. Thus a question arises: ¿what Banach spaces X do satisfy that every absolutely summing operator defined on X with values in another Banach space has separable range? In Corollary 5.3.7 we show that this property holds true for a wide class of Banach spaces including, amongst others, the weakly countably $\mathscr{K}$-determined (e.g. weakly compactly generated) spaces and the Asplund ones.

In general, the composition of an absolutely summing operator and a Dunford integrable function is *not* Bochner integrable (Examples 5.3.22 y 5.3.23). However, the situation changes if we consider functions with stronger integrability properties. For instance:

Proposition 5.3.15 ([Roda]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a Birkhoff integrable function. Then $u \circ f$ is Bochner integrable*.

More generally, we have the following theorem, which relies on some results of Talagrand (see [Tal84, Section 10-2]) relating the stability with the *joint measurability* of functions of the form $h : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, where K is a compact Hausdorff topological space with a Radon measure and h is measurable in the first variable and continuous in the second one.

Theorem 5.3.9 ([Roda]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a Pettis integrable function. Let us consider the following statements:*

(i) There is a w^*-compact norming set $K \subset B_{X^*}$ such that, for each Radon measure ν on K, the family $\{x^* \circ f : x^* \in \mathrm{supp}(\nu)\}$ is stable (where $\mathrm{supp}(\nu)$ stands for the support of ν).

(ii) There is a w^*-compact norming set $K \subset B_{X^*}$ such that, for each Radon measure ν on K, the function

$$f_K : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_K(t, x^*) := (x^* \circ f)(t),$$

is $\mu \times \nu$-measurable.

(iii) *For each absolutely summing operator v defined on X with values in another Banach space, the composition $v \circ f$ is Bochner integrable.*

Then (i)⇒(ii)⇒(iii). Moreover, under Martin's axiom, all the conditions are equivalent provided that μ is perfect (in this case, (i) and (ii) hold true for any w^*-compact norming set $K \subset B_{X^*}$).

The following two results are applications of Theorem 5.3.9.

Corollary 5.3.10 ([Roda]). *Let $f : \Omega \longrightarrow X$ be a function such that Z_f is stable. Then $u \circ f$ is strongly measurable. If, in addition, f is Dunford integrable, then $u \circ f$ is Bochner integrable .*

Proposition 5.3.14 ([Roda]). *Suppose that X is isomorphic to a subspace of a weakly Lindelöf space of the form $C(K)$. Then $u \circ f$ is Bochner integrable for every Dunford integrable function $f : \Omega \longrightarrow X$.*

Finally, regarding the behaviour of the McShane integral, we have proved the next results. The first one extends the work of Marraffa [Mar04] to the case of functions defined on arbitrary quasi-Radon topological measure spaces.

Propositions 5.3.18 and 5.3.20 ([Roda]). *Let $(T, \mathfrak{T}, \mathscr{S}, \theta)$ be a quasi-Radon topological measure space and $f : T \longrightarrow X$ a function.*

(i) *If f is McShane integrable, then $u \circ f$ is Bochner integrable.*
(ii) *If f is Dunford integrable, then $u \circ f$ is McShane integrable.*

Introducción

Esta memoria se enmarca dentro de la *teoría de integración de funciones con valores en espacios de Banach*. Históricamente, el punto de partida de las investigaciones en integración vectorial se sitúa en los orígenes de la teoría de los espacios de Banach, y entre los trabajos pioneros podemos destacar los de Graves [Gra27], Bochner [Boc33], Birkhoff [Bir35], Gel'fand [Gel36], Dunford [Dun35, Dun36, Dun37] y Pettis [Pet38]. El lector puede encontrar información completa sobre estos inicios en la monografía de Diestel y Uhl [DU77] y en [Hil53].

La integral de Lebesgue (para funciones reales) admite diversas construcciones que, usualmente, dan lugar a diferentes extensiones de la noción de integral en el caso de funciones con valores en espacios de Banach. Siguiendo a Fremlin y Mendoza [FM94, p. 127]:

> *El analista funcional ordinario es, por naturaleza, impaciente ante la multiplicidad de definiciones de 'integral' que se han propuesto para funciones vectoriales, y preferiría tener una única integral canónica para uso general.*

La *integral de Bochner* ha sido ampliamente utilizada durante todos estos años, con una notable repercusión dentro de la teoría de los espacios de Banach (propiedad de Radon-Nikodým), véase [Bou83] y [DU77]. Sin embargo, ejemplos sencillos muestran que esta noción de integrabilidad es demasiado restrictiva, al requerir que las funciones tengan rango "esencialmente" separable. Por su parte, la *integral de Pettis*, que no precisa de tal exigencia, alcanzó su madurez en los años 70 y 80, gracias a las contribuciones de autores como Talagrand, Fremlin, Edgar, Musial, etc., que causaron un impacto considerable en la teoría de la medida, véase [Tal84], [Mus91] y [Mus02].

A diferencia de las anteriores, la noción de integral introducida por Garrett Birkhoff en [Bir35] apenas ha sido estudiada, pese a que juega un papel relevante en el contexto de la integración vectorial. En líneas generales, en esta memoria nos proponemos:

- Analizar con detalle la *integral de Birkhoff* de funciones vectoriales, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de la integración respecto de medidas vectoriales y la integración de multi-funciones.
- Comparar estos métodos de integración con otros bien conocidos (integrales de Bochner, Pettis, McShane, Debreu, etc.).
- Caracterizar, en términos de integración vectorial, algunas propiedades de los espacios de Banach donde las (multi-) funciones toman valores.

La mayor parte de los resultados originales que incluimos están tomados de nuestros artículos [CR05], [Rod05], [Rodb], [Rode], [Rodc], [Rodd], [CR04] y [Roda]. A continuación realizamos un resumen del contenido de esta memoria.

Capítulo 1. Preliminares

Este capítulo de carácter auxiliar está dedicado, por una parte, a fijar la notación y terminología básicas empleadas a lo largo de la memoria y, por otra, a realizar una breve introducción a temas fundamentales como: series en espacios de Banach, medidas vectoriales, medibilidad en espacios de Banach, integrales de Bochner y Pettis, familias estables de funciones medibles, liftings en espacios de medida, etc. Nuestra intención es facilitar la lectura de este trabajo. La mayoría de los resultados que aparecen son bien conocidos y se presentan sin demostración.

Para la conveniencia del lector, al final de la memoria también hemos incluido un **Índice terminológico**, en el que el número que aparece junto a cada símbolo o término indica simplemente la página donde ha sido definido.

Capítulo 2. La integral de Birkhoff de funciones vectoriales

En este capítulo vamos a estudiar con detalle la integral de Birkhoff de funciones definidas en un espacio de probabilidad completo (Ω,Σ,μ) con valores en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$.

La motivación de Birkhoff para proponer su definición de integral surgió de la *"elegante interpretación de Fréchet [Fre15] de la integral de Lebesgue"*, [Bir35, p. 357], en la que ésta se obtiene como un límite de *sumas de Riemann infinitas*, reemplazando en la definición habitual de la integral de Riemann los intervalos por *conjuntos medibles arbitrarios* y considerando *particiones contables* en lugar de particiones finitas. Más precisamente:

Teorema (Fréchet). *Una función $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable Lebesgue si y sólo si, para cada $\varepsilon>0$, existe una partición contable $\Gamma=(A_n)$ de Ω en Σ tal que*

$$\sum_n \mu(A_n)\sup(f(A_n)) - \sum_n \mu(A_n)\inf(f(A_n)) \leq \varepsilon,$$

donde las series están bien definidas (i.e. la restricción $f|_{A_n}$ está acotada cuando $\mu(A_n)>0$) y son absolutamente convergentes. En tal caso, $\int_\Omega f\,d\mu$ es el único punto en la intersección

$$\bigcap\Big\{\Big[\sum_n \mu(A_n)\inf(f(A_n)),\sum_n \mu(A_n)\sup(f(A_n))\Big]:\ (A_n) \text{ es una partición contable de } \Omega \text{ en } \Sigma \text{ tal que las series están bien definidas y son absolutamente convergentes}\Big\}.$$

En palabras de Fréchet [Fre15, p. 249]:

> *Esta manera de presentar la teoría de integración debida al Sr. Lebesgue tiene la ventaja, respecto de la manera en que la presentó el propio Sr. Lebesgue, de que es mucho más cercana a los puntos de vista de Riemann-Darboux con los que muchos estudiantes están familiarizados.*

En el caso de funciones vectoriales, Birkhoff utilizó en su definición series *incondicionalmente* convergentes:

Definición 2.1.1 y Corolario 2.1.3 ([Bir35]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función. Si $\Gamma=(A_n)$ es una partición contable de Ω en Σ, la función f se dice sumable respecto de Γ si la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n)>0$ y el conjunto de sumas*

$$J(f,\Gamma)=\Big\{\sum_n \mu(A_n)f(t_n):\ t_n\in A_n\Big\}$$

está formado por series incondicionalmente convergentes. La función f se dice integrable Birkhoff si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición contable Γ de Ω en Σ para la que f es sumable y $\mathrm{diam}(J(f,\Gamma))\leq\varepsilon$. En tal caso, la intersección

$$\bigcap\{\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))}:\ f \text{ es sumable respecto de } \Gamma\}$$

contiene un único punto, denotado por $(B)\int_\Omega f\,d\mu$ y llamado la integral de Birkhoff de f.

La relación de la integral de Birkhoff con las integrales de Bochner y Pettis fue analizada por Birkhoff [Bir35], Pettis [Pet38] y Phillips [Phi40], mostrando que:

- para una función $f:\Omega\longrightarrow X$, siempre se cumple:

  $$f \text{ integrable Bochner } \Rightarrow\ f \text{ integrable Birkhoff } \Rightarrow\ f \text{ integrable Pettis},$$

  y las respectivas "integrales" coinciden;
- ninguno de los recíprocos es válido en general;
- integrabilidad Birkhoff e integrabilidad Pettis son equivalentes cuando X es *separable*.

Estos resultados han sido recopilados en la Sección 2.1, que está dedicada a realizar una introducción autocontenida a la integral de Birkhoff. También hemos probado que la noción de integrabilidad Birkhoff coincide con la de *integrabilidad incondicional de Riemann-Lebesgue*, estudiada recientemente por Kadets, Tseytlin y otros autores en [KT00, KSS$^+$02]:

Proposición 2.1.4 ([CR05]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es integrable Birkhoff;*

(ii) *f es incondicionalmente integrable Riemann-Lebesgue, es decir, existe $x\in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon>0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que, para cada partición contable $\Gamma=(A_n)$ de Ω en Σ más fina que Γ_ε (i.e. cada A_n está contenido en algún elemento de Γ_ε) y cada elección $T=(t_n)$ en Γ (i.e. $t_n\in A_n$ para todo n), la serie $\sum_n\mu(A_n)f(t_n)$ es incondicionalmente convergente y*

$$\Big\|\sum_n \mu(A_n)f(t_n)-x\Big\|\leq\varepsilon.$$

En este caso, $x = (B)\int_\Omega f\, d\mu$.

Uno de los aspectos más destacables de la teoría de integración de Birkhoff es la posibilidad de caracterizar la integrabilidad de una función vectorial $f : \Omega \longrightarrow X$ en términos de la familia puntualmente compacta de funciones reales

$$Z_f = \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$$

(donde B_{X^*} denota la bola unidad cerrada del dual topológico X^* de X). En este sentido, la noción que aparece asociada a la integrabilidad Birkhoff es la llamada *propiedad de Bourgain* [Bou] de una familia de funciones reales.

Definición 2.2.1. *Se dice que una familia* $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *tiene la propiedad de Bourgain si, para cada* $\varepsilon > 0$ *y cada* $A \in \Sigma$ *con* $\mu(A) > 0$*, existen* $A_1, \dots, A_n \subset A$*,* $A_i \in \Sigma$ *con* $\mu(A_i) > 0$*, tales que*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}$$

(donde escribimos $\operatorname{osc}(h|_{A_i}) = \sup\{|h(t) - h(t')| : t, t' \in A_i\}$*).*

La propiedad de Bourgain es más fuerte que la noción de estabilidad en el sentido de Talagrand y ha sido ampliamente estudiada en la literatura, véase e.g. [GGMS87, Mus91, Mus02, RS85], fundamentalmente en conexión con la teoría de la integral de Pettis. Por ejemplo, un resultado clásico de Riddle y Saab [RS85] afirma que *una función acotada* $f : \Omega \longrightarrow X^*$ *es integrable Pettis si la familia* $\{\langle f, x\rangle : x \in B_X\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *tiene la propiedad de Bourgain*.

La herramienta fundamental para caracterizar la integrabilidad Birkhoff de una función *acotada* f a través de la familia Z_f es un resultado de Talagrand (Corolario 2.2.12), tomado de [GGMS87], que nos dice que *una familia uniformemente acotada* $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *tiene la propiedad de Bourgain si y sólo si es de oscilación pequeña, es decir, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una partición finita* Γ *de* Ω *en* Σ *tal que* $\sum_{A \in \Gamma} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) \leq \varepsilon$ *para toda* $h \in \mathscr{H}$. Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2 ([CR05]). *Sea* $f : \Omega \longrightarrow X$ *una función acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es integrable Birkhoff;*

(ii) la familia Z_f *tiene la propiedad de Bourgain;*

(iii) existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ *(i.e.* $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B\}$ *para todo* $x \in X$*) tal que la familia* $Z_{f,B} = \{x^* \circ f : x^* \in B\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *tiene la propiedad de Bourgain.*

Nótese que, en particular, nuestro Teorema 2.3.2 mejora el resultado de Riddle y Saab comentado anteriormente. Por otro lado, en lo que respecta a funciones no necesariamente acotadas, disponemos de la siguiente caracterización.

Teorema 2.3.7 ([CR05]) y Proposición 2.3.14 ([Rodb]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es integrable Birkhoff;*
(ii) *la familia Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain;*
(iii) *existe un conjunto normante y convexo $B \subset B_{X^*}$ tal que la familia $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.*

Sobre este resultado se pueden realizar algunas observaciones:

(a) En general, no es posible eliminar la hipótesis de convexidad en la condición *(iii)* (como mostramos en el Ejemplo 2.3.21), aunque esto sí se puede hacer, por ejemplo, cuando (B_{X^*}, w^*) es separable (Corolario 2.3.28).
(b) La implicación *(i)*⇒*(ii)* mejora un resultado de Fremlin [Freb] que asegura que la familia Z_f asociada a una función integrable Birkhoff f siempre es estable en el sentido de Talagrand.
(c) Como aplicación, proporcionamos una prueba de que *la integral indefinida de Pettis de una función integrable Birkhoff tiene rango relativamente compacto en norma* (Corolario 2.3.8), una propiedad, demostrada originalmente por Birkhoff [Bir35], que no satisfacen todas las funciones integrables Pettis, como mostraron Fremlin y Talagrand [FT79]. Recordemos que el rango de la integral indefinida de una función integrable Pettis es relativamente compacto en norma si y sólo si dicha función es el límite de una sucesión de funciones simples en la *seminorma de Pettis*, definida mediante $\|f\|_P = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |x^* \circ f| \, d\mu$.

En la Sección 2.4 utilizamos las caracterizaciones anteriores para reemplazar integrabilidad Pettis por integrabilidad Birkhoff en algunos resultados bien conocidos que, de esta manera, son mejorados.

Riddle, Saab y Uhl [RSU83] probaron que, *si X es separable y K es un espacio topológico compacto Hausdorff, entonces una función acotada $f : K \longrightarrow X^*$ es universalmente escalarmente medible si y sólo si es universalmente integrable Pettis* (el término "universalmente" quiere decir "respecto de cada medida de Radon en K"). En el Corolario 2.4.17 demostramos que estas condiciones equivalen, de hecho, a que la función sea *universalmente integrable Birkhoff*.

La siguiente versión "débil" de la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach fue introducida por Musial en [Mus79].

Definición 2.4.1. *Se dice que X tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým (WRNP) si, para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y cada medida contablemente aditiva y μ-continua $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, con variación σ-finita, existe una función integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ de manera que $\nu(E) = (\mathrm{Pettis}) \int_E f \, d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.*

Una importante caracterización debida a Musial, Ryll-Nardzewski, Janicka, Haydon y Bourgain (véase e.g. [Dul89, Chapter 6] o [Tal84, Chapter 7]) afirma que *X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1 si y sólo si X^* tiene la WRNP si y sólo si la función "identidad" $I : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ es universalmente integrable Pettis*. De nuevo, en el resultado anterior podemos sustituir "Pettis" por "Birkhoff", como sigue.

Teoremas 2.4.19, 2.4.22 ([CR05]) y 2.4.25. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1;*

(ii) *para cada espacio de probabilidad completo (Ω,Σ,μ) y cada medida contablemente aditiva y μ-continua $\nu:\Sigma\longrightarrow X^*$, con variación σ-finita, existe una función integrable Birkhoff $f:\Omega\longrightarrow X^*$ tal que $\nu(E)=(B)\int_E f\,d\mu$ para todo $E\in\Sigma$;*

(iii) *la aplicación "identidad" $I:B_{X^*}\longrightarrow X^*$ es universalmente integrable Birkhoff.*

Cabe mencionar aquí que, como consecuencia de *(i)⇒(ii)*, en el Capítulo 3 obtenemos una solución parcial a un problema propuesto por Fremlin [Fre95, Fre94] relativo a la representación de medidas vectoriales como integrales indefinidas de funciones integrables *McShane*.

Como ya hemos comentado, las nociones de integrabilidad de Birkhoff y Pettis coinciden para funciones con valores en espacios de Banach separables. Además, en virtud de nuestra caracterización de la WRNP en duales, esta equivalencia también se cumple para funciones con valores en duales de espacios de Banach separables sin subespacios isomorfos a ℓ^1 (Corolario 2.4.24). En la Sección 2.5 vamos a mostrar que la coincidencia de la integrabilidad Birkhoff con la integrabilidad Pettis caracteriza la separabilidad dentro una amplia clase de espacios de Banach: los *débilmente Lindelöf determinados* (que incluye, por ejemplo, a todos los espacios débilmente compactamente generados). En concreto, tenemos los siguientes resultados.

Teoremas 2.5.1 y 2.5.2 ([Rod05]). *Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.*

(i) *Si X no es separable, entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω,Σ,μ) y una función acotada integrable Pettis $f:\Omega\longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.*

(ii) *Si el carácter de densidad de X es mayor o igual que el continuo, entonces existe una función acotada universalmente integrable Pettis $f:[0,1]\longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.*

En el caso particular $X=c_0([0,1])$, las construcciones empleadas en la prueba de *(ii)* nos permiten obtener un contraejemplo para el análogo del *teorema de la convergencia dominada de Lebesgue* para la integral de Birkhoff (Ejemplo 2.5.4). Esto representa otra diferencia con las integrales de Bochner y Pettis, para las que dicho resultado sí es válido (en las topologías de la norma y débil, respectivamente).

Capítulo 3. Las integrales de Birkhoff y McShane respecto de medidas vectoriales

En este capítulo vamos a considerar distintas teorías de *integración de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales*. Dados dos espacios de Banach X e Y, un espacio medible (Ω,Σ) y una medida contablemente aditiva $\mu:\Sigma\longrightarrow\mathscr{L}(X,Y)$ (donde $\mathscr{L}(X,Y)$ denota el espacio de Banach de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y), la "integral" respecto de μ de una función simple con valores en X, digamos $f=\sum_{i=1}^n x_i\chi_{A_i}$, se puede definir de manera natural como

$$\int_\Omega f\,d\mu=\sum_{i=1}^n \mu(A_i)(x_i)\in Y,$$

es decir, sustituyendo el producto por escalares $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ por la aplicación bilineal canónica $\mathscr{L}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$. En general, las diferentes nociones de integral que vamos a analizar en este capítulo involucran sumas de Riemann de la forma $\sum_i \mu(A_i)(f(t_i))$.

Los primeros estudios sobre integración de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales se remontan a los orígenes de la teoría de los espacios de Banach, véase [Hil53]. Durante todo este tiempo, el método más extendido ha sido, posiblemente, el de Bartle [Bar56], que fue generalizado y estudiado ampliamente por Dobrakov en una larga serie de trabajos iniciada en [Dob70a], véase [DP04, Pan95] y las referencias que allí se proporcionan. Dentro del contexto en el que vamos a trabajar, las diferencias entre la **-integral bilineal de Bartle* y la *integral de Dobrakov* se reducen simplemente a cuestiones de lenguaje. Antes de formular la definición necesitamos introducir algo de terminología.

Recordemos que la *semivariación contextual* de μ es la función $\hat{\mu} : \Sigma \longrightarrow [0,+\infty]$ definida por $\hat{\mu}(A) = \sup \| \sum_{i=1}^n \mu(A_i)(x_i) \|$, donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas $(A_i)_{i=1}^n$ de A en Σ y todas las colecciones finitas $(x_i)_{i=1}^n$ en B_X. A lo largo del capítulo vamos a suponer que $\hat{\mu}$ es completa y *continua* (i.e. para cada sucesión decreciente $(E_n)_{n=1}^\infty$ en Σ con $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \emptyset$, se tiene $\lim_n \hat{\mu}(E_n) = 0$). La continuidad de $\hat{\mu}$ garantiza que $\hat{\mu}(\Omega) < +\infty$.

Definición 3.1.14 ([Bar56, Dob70a]). *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice integrable Dobrakov respecto de μ si existe una sucesión de funciones simples $f_n : \Omega \longrightarrow X$ que converge a f $\hat{\mu}$-a.e. tal que, para cada $E \in \Sigma$, existe $\lim_n \int_E f_n \, d\mu$. En tal caso, el límite $(D)\int_\Omega f \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu$ es independiente de la sucesión (f_n) y se llama integral de Dobrakov de f respecto de μ.*

Por ejemplo, $\hat{\mu}$ siempre es continua en los siguientes casos particulares:

(a) *Integración de funciones vectoriales respecto de medidas escalares*; es decir, $X = Y$ y $\mu(E)(x) = \nu(E)x$, donde ν es una medida de probabilidad en Σ. En este caso, una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Dobrakov respecto de μ si y sólo si es fuertemente medible e integrable Pettis respecto de ν.

(b) *Integración de funciones escalares respecto de medidas vectoriales*; es decir, $X = \mathbb{R}$ y $\mu(E)(a) = a\nu(E)$, donde $\nu : \Sigma \longrightarrow Y$ es una medida contablemente aditiva. En tal caso, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Dobrakov respecto de μ si y sólo si es integrable en el sentido de Bartle, Dunford y Schwartz [BDS55] respecto de ν (véase [DS88]). La integral de Bartle, Dunford y Schwartz ha sido estudiada extensamente por distintos autores, entre los que destacan Lewis [Lew70, Lew72], Kluvanek y Knowles [KK76] y, más recientemente, Curbera [Cur92, Cur94, Cur95] y Fernández *et al.* [FMN$^+$05].

En lo que respecta a considerar una integral “de tipo Birkhoff” para funciones reales y medidas vectoriales, Lewis [Lew72, p. 307] afirma:

> *El artículo de Garrett Birkhoff [Bir35] es, aparentemente, el primero en relacionar convergencia incondicional e integrabilidad (para funciones vectoriales y medidas escalares) en espacios de Banach. Sin embargo, los métodos de Birkhoff no son adaptables fácilmente a nuestro contexto.*

A continuación vamos a ver cómo desaparecen las dificultades si definimos la integral “refinando particiones”, es decir, modificando de manera obvia la definición de la integral de Riemann-

Lebesgue incondicional (Proposición 2.1.4). De hecho, el mismo método puede ser aplicado a funciones y medidas vectoriales, obteniéndose la noción de S^*-*integral* estudiada por Dobrakov en [Dob88]. Aparentemente, Dobrakov desconocía la integral de Birkhoff, y su motivación para introducir la S^*-integral surgió directamente de los trabajos de Kolmogorov [Kol30, Tik91] sobre la teoría de la integración.

Definición 3.2.1 ([Dob88]). *Una función $f:\Omega \longrightarrow X$ se dice S^*-integrable respecto de μ, con S^*-integral $y \in Y$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que, para cada partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección $T = (t_n)$ en Γ, la serie $\sum_n \mu(A_n)(f(t_n))$ es incondicionalmente convergente y $\|\sum_n \mu(A_n)(f(t_n)) - y\| \leq \varepsilon$. El vector $y \in Y$ (necesariamente único) se denota por $(S^*)\int_\Omega f\, d\mu$.*

La relación entre la integral de Dobrakov y la S^*-integral es clarificada en el Teorema 3.2.9, debido al propio Dobrakov [Dob88]: *una función $f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable Dobrakov si y sólo si es fuertemente medible y S^*-integrable (en tal caso, las respectivas integrales coinciden)*. Nótese que este resultado generaliza el hecho de que las nociones de integrabilidad de Birkhoff y Pettis coinciden para funciones fuertemente medibles. Por otro lado, en el caso de integración de funciones escalares respecto de medidas vectoriales, hemos obtenido el siguiente

Corolario 3.2.11. *En las condiciones de (b), una función $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Bartle, Dunford y Schwartz respecto de ν si y sólo si es S^*-integrable respecto de μ. En tal caso, las respectivas integrales coinciden.*

Como ya hemos comentado, toda función integrable Birkhoff es el límite, en la seminorma de Pettis, de una sucesión de funciones simples. En el caso de funciones y medidas vectoriales *no* se puede garantizar, en general, la compacidad relativa en norma del rango de la "integral indefinida" de una función S^*-integrable. Sin embargo, todavía es posible aproximar por funciones simples:

Teorema 3.2.13 ([Rodd]). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función S^*-integrable respecto de μ. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función simple $g:\Omega \longrightarrow X$ tal que*

$$\sup_{E\in\Sigma} \left\| (S^*)\int_E f\, d\mu - \int_E g\, d\mu \right\| \leq \varepsilon.$$

La Sección 3.3 está dedicada a estudiar la *integral de McShane de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales*. En el contexto de la integración respecto de medidas escalares, esta noción de integral, introducida por McShane en [McS69, McS83], ha sido ampliamente analizada durante los últimos años. El caso de funciones vectoriales definidas en $[0,1]$ fue considerado por Gordon [Gor90], Fremlin y Mendoza [FM94]. Posteriormente, Fremlin [Fre95] generalizó esta integral para funciones definidas en cualquier espacio de medida topológico quasi-Radon $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$, es decir, un espacio topológico $(T,\mathfrak{T})$ con una medida no negativa, finita y completa θ, en una σ-álgebra $\mathscr{S} \supset \mathfrak{T}$, tal que θ es τ-aditiva y regular interiormente respecto de conjuntos cerrados (e.g. un espacio topológico compacto Hausdorff con una medida de Radon).

Para recordar la definición de la integral de McShane necesitamos introducir algo de terminología. Un *calibre* en $(T,\mathfrak{T})$ es una función $\delta: T \longrightarrow \mathfrak{T}$ tal que $t \in \delta(t)$ para cada $t \in T$. Una *partición parcial de McShane* de T es una colección finita $\{(E_i,t_i): 1 \leq i \leq p\}$, donde (E_i) es una familia disjunta en $\mathscr{S}$ y $t_i \in T$ para todo $1 \leq i \leq p$. Decimos que dicha 'partición' está *subordinada* a δ si $E_i \subset \delta(t_i)$ para todo $1 \leq i \leq p$. Es importante destacar que, gracias a la τ-aditividad de θ, para cada calibre δ en $(T,\mathfrak{T})$ y cada $\eta > 0$, siempre podemos encontrar una partición parcial de McShane $\{(E_i,t_i): 1 \leq i \leq p\}$ de T subordinada a δ tal que $\theta(T \setminus \bigcup_{i=1}^p E_i) \leq \eta$.

Definición 3.3.2 y Proposición 3.3.10 (Fremlin). *Sea $f: T \longrightarrow X$ una función. Se dice que f es integrable McShane, con integral de McShane $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existen un calibre δ en $(T,\mathfrak{T})$ y un $\eta > 0$ tales que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \theta(E_i) f(t_i) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para toda partición parcial de McShane $\{(E_i,t_i): 1 \leq i \leq p\}$ de T subordinada a δ cumpliendo $\theta(T \setminus \bigcup_{i=1}^p E_i) \leq \eta$.

La relación entre las integrales de Birkhoff, McShane y Pettis ha sido discutida por Fremlin [Fre95, Freb], probando que, para una función $f: T \longrightarrow X$, se tiene

$$f \text{ integrable Birkhoff} \Rightarrow f \text{ integrable McShane} \Rightarrow f \text{ integrable Pettis},$$

y las correspondientes integrales coinciden. Ninguno de los recíprocos es cierto en general, véase [Freb, FM94], aunque las tres nociones de integrabilidad son equivalentes cuando X es separable.

Naturalmente, para considerar la integral de McShane respecto de una medida vectorial necesitamos añadir hipótesis adicionales "apropiadas" al espacio medible (Ω,Σ) y a la medida vectorial $\mu: \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$. En concreto, a lo largo de la Sección 3.3 vamos a suponer que $\tau \subset \Sigma$ es una topología en Ω y que $\hat{\mu}$ satisface las siguientes propiedades:

(α) para cada $E \in \Sigma$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $G \in \tau$, $G \supset E$, tal que $\hat{\mu}(G \setminus E) \leq \varepsilon$;
(β) para cada familia (no vacía) $\mathscr{G} \subset \tau$ dirigida superiormente, se tiene

$$\inf\{\hat{\mu}(\cup\mathscr{G} \setminus G): \ G \in \mathscr{G}\} = 0.$$

Equivalentemente, cualquier (alguna) medida de control de μ es de quasi-Radon.

Definición 3.3.9 ([Rodc]). *Sea $f: \Omega \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es integrable McShane respecto de μ, con integral de McShane $y \in Y$, si para cada $\varepsilon > 0$ existen un calibre δ en (Ω,τ) y un $\eta > 0$ tales que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f(t_i)) - y \right\| \leq \varepsilon$$

para toda partición parcial de McShane $\{(E_i,t_i): 1 \leq i \leq p\}$ de Ω subordinada a δ cumpliendo $\hat{\mu}(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^p E_i) \leq \eta$. El vector $y \in Y$ (necesariamente único) se denota por $(M)\int_\Omega f\, d\mu$.

Ya hemos mencionado que Fremlin [Freb] demostró que toda función integrable Birkhoff, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon, es integrable McShane. Posiblemente, nuestra contribución más importante a la teoría de la integral de McShane respecto de medidas vectoriales es la siguiente extensión de dicho resultado.

Teorema 3.3.17 ([Rodc]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función S^*-integrable respecto de μ. Entonces f es integrable McShane respecto de μ y $(S^*)\int_\Omega f\,d\mu=(M)\int_\Omega f\,d\mu$.*

Una primera consecuencia del teorema anterior es el hecho de que, en las condiciones del caso particular (b), *una función $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable McShane respecto de μ si y sólo si es integrable en el sentido de Bartle, Dunford y Schwartz respecto de ν (y las respectivas integrales coinciden)*, véase el Corolario 3.3.19. En general, disponemos de la siguiente caracterización.

Corolario 3.3.18 ([Rodc]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función fuertemente medible. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Dobrakov;
(ii) f es S^*-integrable;
(iii) f es integrable McShane.

En tal caso, $(D)\int_\Omega f\,d\mu=(S^*)\int_\Omega f\,d\mu=(M)\int_\Omega f\,d\mu$.

Por otra parte, utilizando la integrabilidad McShane de cualquier función integrable Birkhoff (definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon), nuestra caracterización de la WRNP en espacios de Banach duales (Capítulo 2) nos permite dar una respuesta parcial al siguiente problema propuesto por Fremlin en [Fre94] y [Fre95, 4G(c)]:

> *Supongamos que $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ es un espacio de medida topológico quasi-Radon, que Z es un espacio de Banach y que $\nu:\mathscr{S}\longrightarrow Z$ es una función. ¿Bajo qué condiciones será ν la integral indefinida de una función integrable McShane de T en Z?*

Corolario 3.3.21. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1;
(ii) para cualquier espacio de medida topológico quasi-Radon $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ y cada medida contablemente aditiva y θ-continua $\nu:\mathscr{S}\longrightarrow X^*$, con variación σ-finita, existe una función integrable McShane $f:T\longrightarrow X^*$ tal que $\nu(E)=(M)\int_E f\,d\theta$ para todo $E\in\mathscr{S}$.

Fremlin demostró en [Fre95] que *el rango de la integral indefinida de Pettis de cualquier función integrable McShane, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon, es relativamente compacto en norma*. La prueba de Fremlin es complicada e involucra técnicas de familias estables de funciones. Curiosamente, al analizar el caso más general de funciones y medidas vectoriales, hemos encontrado una demostración más sencilla de dicho resultado, que admite la siguiente extensión en términos de "aproximación" por funciones simples.

Teorema 3.3.22 ([Rodd]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función integrable McShane respecto de μ. Entonces para cada $\varepsilon>0$ existe una función simple $g:\Omega\longrightarrow X$ tal que*

$$\sup_{E\in\Sigma}\left\|(M)\int_E f\,d\mu-\int_E g\,d\mu\right\|\leq\varepsilon.$$

Es bien conocido que el espacio normado de todas las (clases de equivalencia escalar de) funciones integrables Dunford (definidas en un espacio de probabilidad), equipado con la norma de Pettis, *no es completo* en general, y que lo mismo ocurre con los subespacios formados por todas las funciones integrables Birkhoff, McShane o Pettis. Sin embargo, Díaz, Fernández, Florencio y Paúl [DFFP95] probaron que los espacios de funciones integrables Dunford o Pettis siempre son *ultrabornológicos* y, en particular, *tonelados*, lo que nos permite aplicar los teoremas de la “acotación uniforme” y la “gráfica cerrada” a aplicaciones lineales definidas en ellos con valores en espacios de Banach.

Los resultados de [DFFP95] se basan en un principio general que afirma que un espacio normado con un álgebra de Boole de proyecciones “adecuada” es ultrabornológico. Con la ayuda de dicho criterio, en la última sección del capítulo vamos a determinar cuándo son ultrabornológicos los espacios normados de (clases de equivalencia de) funciones vectoriales integrables (Dobrakov, S^* o McShane) respecto de una medida vectorial, equipados con la norma dada por la semivariación de la integral indefinida (que es la extensión natural a este contexto de la norma de Pettis). Así, nuestros Teoremas 3.4.10, 3.4.17 y 3.4.25 nos dicen que *cada uno de estos espacios es ultrabornológico (resp. tonelado) si y sólo si, para cada átomo A de $\hat{\mu}$, el operador $\mu(A)$ tiene rango cerrado*. Nótese que esta condición se cumple automáticamente en el caso (a) de integración de funciones vectoriales respecto de medidas escalares.

Capítulo 4. Las integrales de Birkhoff y Pettis para funciones multi-valuadas

Desde los trabajos iniciales de Aumann [Aum65] y Debreu [Deb67], la teoría de integración de *multi-funciones* (también llamadas correspondencias o funciones multi-valuadas) ha experimentado un gran desarrollo, debido en buena parte a las aplicaciones que esta teoría tiene en áreas como la Matemática Económica, Optimización, etc. Las monografías de Castaing y Valadier [CV77], Klein y Thompson [KT84], Aubin y Frankowska [AF90] y el reciente “survey” de Hess [Hes02] contienen abundante información al respecto.

En este capítulo vamos a estudiar la integración de multi-funciones definidas en un espacio de probabilidad completo (Ω,Σ,μ) con valores en la familia $cwk(X)$ de todos los subconjuntos (no vacíos) convexos y débilmente compactos de un espacio de Banach X. En general, los distintos métodos que vamos a considerar tienen un rasgo común: la integrabilidad de una multi-función $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ se puede interpretar en términos la función *univaluada* $j\circ F$, donde j es una inmersión isométrica apropiada de $cwk(X)$ (que, equipado con la distancia de Hausdorff h, es un espacio métrico completo) en un espacio de Banach. Recordemos que la *distancia de Hausdorff* entre dos conjuntos $C,D\in cwk(X)$ se define como

$$h(C,D)=\inf\{\eta>0:\ C\subset D+\eta B_X,\ D\subset C+\eta B_X\}.$$

La inmersión particular j que introducimos a continuación es una herramienta estándar en el estudio del hiperespacio $(cwk(X),h)$.

Lema 4.1.4. *Dados $C\in cwk(X)$ y $x^*\in X^*$, escribimos $\delta^*(x^*,C)=\sup\{x^*(x):x\in C\}$. Entonces la aplicación $j:cwk(X)\longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ definida por $j(C)(x^*)=\delta^*(x^*,C)$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $j(C+D)=j(C)+j(D)$ *para cada* $C,D\in cwk(X)$*;*

(ii) $j(\lambda C) = \lambda j(C)$ *para cada* $\lambda \geq 0$ *y cada* $C \in cwk(X)$*;*

(iii) $h(C,D) = \|j(C) - j(D)\|_\infty$ *para cada* $C,D \in cwk(X)$*;*

(iv) $j(cwk(X))$ *es cerrado en* $\ell_\infty(B_{X^*})$*.*

Como ya hemos comentado, el estudio de la integrabilidad de una función vectorial se simplifica considerablemente cuando el espacio de Banach donde la función toma valores es *separable*. Por tanto, puesto que vamos a analizar la integrabilidad de una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ a través de la composición $j \circ F$, es natural plantearse bajo qué condiciones podemos asegurar que $\overline{\mathrm{span}(j(cwk(X)))}$ es separable o, equivalentemente, que $(cwk(X),h)$ es separable. Es bien conocido que la familia $ck(X)$, formada por todos los subconjuntos (no vacíos) convexos y compactos en norma de X, es h-separable si (y sólo si) X es separable. En lo que respecta a $cwk(X)$, tenemos las siguientes caracterizaciones.

Proposición 4.1.10 ([CR04]). *Supongamos que* X^* *tiene la propiedad de Radon-Nikodým (e.g.* X^* *es separable). Entonces* $(cwk(X),h)$ *es separable si y sólo si* X *es de dimensión finita.*

Proposición 4.1.12. *Supongamos que* X *es un espacio de Banach dual. Entonces* $(cwk(X),h)$ *es separable si y sólo si* X *es separable y tiene la propiedad de Schur.*

Las nociones de integral para multi-funciones que vamos a considerar en este capítulo generalizan de manera natural a las integrales de Bochner, Birkhoff y Pettis (esta última en el caso separable). La contrapartida de la integral de Bochner fue introducida por Debreu [Deb67] para multi-funciones con valores en $ck(X)$, aunque se puede extender al caso de multi-funciones con valores en $cwk(X)$, como señaló Byrne [Byr78]. El libro [KT84] es una buena referencia sobre la integral de Debreu, cuya definición recordamos a continuación.

Definición 4.1.27. *Una multi-función* $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ *se dice integrable Debreu si la composición* $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ *es integrable Bochner. En tal caso, la integral de Debreu de* F *es el único elemento* $(De)\int_\Omega F\, d\mu \in cwk(X)$ *que cumple* $j((De)\int_\Omega F\, d\mu) = (\mathrm{Bochner})\int_\Omega j \circ F\, d\mu$*.*

Cabe señalar que, de hecho, esta noción de integrabilidad no depende de la inmersión particular j (con las propiedades mencionadas en el Lema 4.1.4) que estamos considerando.

Por su parte, la integral de Pettis de multi-funciones, introducida en [CV77, Chapter V, §4], ha sido objeto de estudio en los últimos años, véase e.g. [Amr98, EAH00, HZ02, Zia97, Zia00]. En esta teoría se supone que X es *separable*; como es bien sabido, esta hipótesis garantiza que una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ tiene selectores (es decir, funciones $f : \Omega \longrightarrow X$ tales que $f(t) \in F(t)$ para todo $t \in \Omega$) *fuertemente medibles* si la función $\delta^*(x^*,F) \equiv \delta^*(x^*,F(\cdot)) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible para todo $x^* \in X^*$.

Definición 4.2.1. *Supongamos que* X *es separable. Una multi-función* $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ *se dice integrable Pettis si*

(i) $\delta^*(x^*,F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *para todo* $x^* \in X^*$*;*

(ii) para cada $A \in \Sigma$*, existe un* $(P)\int_A F\, d\mu \in cwk(X)$ *tal que*

$$\delta^*\left(x^*, (P)\int_A F\, d\mu\right) = \int_A \delta^*(x^*,F)\, d\mu \quad \textit{para todo } x^* \in X^*.$$

El siguiente resultado (debido a Castaing y Valadier [CV77], El Amri y Hess [EAH00] y Ziat [Zia97, Zia00]) generaliza al caso de multi-funciones una caracterización clásica de la integrabilidad Pettis para funciones univaluadas con valores en espacios de Banach separables. Dada su importancia en el resto del capítulo, hemos optado por incluir una demostración del mismo.

Teorema 4.2.3. *Supongamos que X es separable. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F es integrable Pettis;*
(ii) *la familia $\{\delta^*(x^*,F): x^*\in B_{X^*}\}$ es uniformemente integrable;*
(iii) *$\delta^*(x^*,F)$ es medible para todo $x^*\in X^*$ y cualquier selector fuertemente medible de F es integrable Pettis.*

En tal caso, para cada $A\in\Sigma$, se tiene

$$(P)\int_A F\,d\mu=\{(\text{Pettis})\int_A f\,d\mu:\ f:\Omega\longrightarrow X \textit{ es un selector integrable Pettis de } F\}.$$

Nótese que, dada una multi-función $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$, tenemos $\langle e_{x^*}, j\circ F\rangle=\delta^*(x^*,F)$ para todo $x^*\in X^*$, donde $e_{x^*}\in B_{\ell_\infty(B_{X^*})^*}$ es el funcional de "evaluación" en x^*. Así, la integrabilidad Pettis de F garantiza que la función univaluada $j\circ F$ es "integrable Pettis respecto del conjunto normante $\{e_{x^*}: x^*\in B_{X^*}\}\subset B_{\ell_\infty(B_{X^*})^*}$". Es natural plantearse si existe alguna relación entre la integrabilidad Pettis de F y la de $j\circ F$. A continuación resumimos las respuestas parciales que conocemos.

Proposición 4.2.7 ([CR04]) y Corolarios 4.2.12 y 4.2.13. *Supongamos que X es separable. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Consideramos las siguientes condiciones:*

(i) *$j\circ F$ es integrable Pettis;*
(ii) *F es integrable Pettis.*

Entonces (i)⇒(ii) y, en tal caso, se tiene $j((P)\int_A F\,d\mu)=(\text{Pettis})\int_A j\circ F\,d\mu$ para cada $A\in\Sigma$. Por otro lado, (i) y (ii) son equivalentes en cada uno de los siguientes casos:

- *si $(F(\Omega),h)$ es separable (e.g. $F(\Omega)\subset ck(X)$);*
- *si la familia $\{\delta^*(x^*,F): x^*\in B_{X^*}\}$ es estable;*
- *si μ es perfecta y asumimos el Axioma de Martin.*

En la Sección 4.3 discutimos la generalización natural de la *integral de Birkhoff* al caso de multi-funciones $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$, comparándola con las integrales de Debreu y Pettis.

Definición 4.3.1 ([CR04]). *Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Decimos que F es integrable Birkhoff si la composición $j\circ F:\Omega\longrightarrow\ell_\infty(B_{X^*})$ es integrable Birkhoff. En tal caso, la integral de Birkhoff de F es el único elemento $(B)\int_\Omega F\,d\mu\in cwk(X)$ cumpliendo*

$$j\Big((B)\int_\Omega F\,d\mu\Big)=(B)\int_\Omega j\circ F\,d\mu.$$

Al igual que ocurre con la de Debreu, la noción de integrabilidad Birkhoff admite una caracterización "intrínseca" que no depende de la inmersión j. Recordemos que una serie $\sum_n C_n$ de elementos de $cwk(X)$ se dice *incondicionalmente convergente* si, para cualesquiera elecciones $x_n \in C_n$, la serie $\sum_n x_n$ converge incondicionalmente en X. En tal caso, sabemos que el conjunto de sumas $\sum_n C_n := \{\sum_n x_n : x_n \in C_n\}$ también pertenece a $cwk(X)$ (Lema 4.1.17).

Corolario 4.3.2 ([CR04]). *Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *(i) F es integrable Birkhoff;*
- *(ii) existe un $C \in cwk(X)$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que, para cada partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cualquier elección $T = (t_n)$ en Γ, la serie $\sum_n \mu(A_n)F(t_n)$ es incondicionalmente convergente y*

$$h\Big(\sum_n \mu(A_n)F(t_n), C\Big) \leq \varepsilon.$$

En tal caso, $C = (B)\int_\Omega F\, d\mu$.

Análogamente al caso de funciones univaluadas, la integral de Birkhoff para multi-funciones es intermedia entre las de Debreu y Pettis, como indicamos a continuación.

Corolario 4.3.6 y Teorema 4.3.7 ([CR04]). *Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Si F es integrable Debreu, entonces F es integrable Birkhoff, con $(B)\int_\Omega F\, d\mu = (De)\int_\Omega F\, d\mu$. El recíproco es cierto si X tiene dimensión finita.*

Corolarios 4.3.12 y 4.3.13 ([CR04]). *Supongamos que X es separable. Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.*

- *(i) Si F es integrable Birkhoff, entonces:*
  - *F es integrable Pettis;*
  - *F admite selectores fuertemente medibles;*
  - *cada selector fuertemente medible de F es integrable Birkhoff;*
  - *para cada $A \in \Sigma$ se cumple la igualdad*

$$(B)\int_A F\, d\mu = \Big\{(B)\int_A f\, d\mu : \ f : \Omega \longrightarrow X \text{ es un selector integrable Birkhoff de } F\Big\}.$$

- *(ii) Supongamos que $(F(\Omega), h)$ es separable (e.g. $F(\Omega) \subset ck(X)$). Entonces F es integrable Birkhoff si y sólo si es integrable Pettis.*

Recordemos que, cuando se consideran funciones univaluadas con valores en un espacio de Banach separable, integrabilidad Birkhoff e integrabilidad Pettis son equivalentes; además, en tales condiciones, también sabemos que ambas nociones de integrabilidad coinciden con la de Bochner para funciones acotadas. Los siguientes resultados muestran que en el caso de multi-funciones dichas equivalencias no son válidas en general.

Corolario 4.3.11 ([CR04]) *Supongamos que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým (e.g. X^* es separable). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *toda multi-función integrable Birkhoff $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Debreu;*
(ii) *toda multi-función acotada integrable Birkhoff $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Debreu;*
(iii) *X es de dimensión finita.*

Teorema 4.3.15 ([CR04]). *Supongamos que X es de dimensión infinita y que X^* es separable. Entonces existe una multi-función acotada integrable Pettis $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ que no es integrable Birkhoff.*

Capítulo 5. Operadores absolutamente sumantes e integración vectorial

En el último capítulo de la memoria relacionamos la integración vectorial con la teoría de los operadores absolutamente sumantes. Recordemos que un operador (i.e. aplicación lineal y continua) entre espacios de Banach $u : X \longrightarrow Y$ se dice *absolutamente sumante* si, para cada serie incondicionalmente convergente $\sum_n x_n$ en X, la serie $\sum_n u(x_n)$ es absolutamente convergente. Dado que los operadores absolutamente sumantes mejoran la sumabilidad de las sucesiones, *"no es sorprendente que también mejoren la integrabilidad de las funciones vectoriales"*, como se menciona en [DJT95, p. 56]. En líneas generales, en este capítulo pretendemos dar respuestas a cuestiones del siguiente tipo:

> *Consideremos dos nociones de integrabilidad A y B para funciones definidas en un espacio de probabilidad completo (Ω,Σ,μ) con valores en un espacio de Banach, de manera que toda función A-integrable también es B-integrable. Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador <u>absolutamente sumante</u> entre espacios de Banach. Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función B-integrable, ¿es A-integrable la composición $u \circ f : \Omega \longrightarrow Y$?*

Aparentemente, Diestel [Die72] fue el primero en considerar cuestiones de esta naturaleza, probando que

(i) *la composición $u \circ f$ es integrable Bochner para cada función fuertemente medible e integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$;*
(ii) *la aplicación lineal*

$$\tilde{u} : P_m(\mu,X) \longrightarrow L^1(\mu,Y), \quad f \mapsto u \circ f,$$

es continua, donde $P_m(\mu,X)$ denota el espacio de las (clases de equivalencia escalar de) funciones fuertemente medibles e integrables Pettis de Ω en X, equipado con la norma de Pettis.

De hecho, Diestel también probó que, cuando μ no tiene átomos, las condiciones (i) y (ii) equivalen a que u sea absolutamente sumante.

Por otra parte, Belanger y Dowling demostraron en [BD88] que, *cuando μ es perfecta, si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función acotada integrable Pettis, entonces $u \circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner*. Más recientemente, Marraffa [Mar04] ha probado resultados análogos a los de Diestel para funciones integrables McShane definidas en un espacio topológico compacto Hausdorff equipado con una medida de Radon.

Nuestro punto de partida es el siguiente lema, que asegura que para comprobar si la composición de una función integrable Dunford con un operador absolutamente sumante es integrable Bochner, sólo necesitamos determinar si dicha composición es fuertemente medible.

Lema 5.2.2 ([Roda]). *Sean $f:\Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford y $g:\Omega \longrightarrow Y$ una función escalarmente equivalente a $u\circ f$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) g es integrable Bochner;

(ii) g es fuertemente medible.

En particular, $u\circ f$ es integrable Bochner si y sólo si es fuertemente medible.

Es bien conocido que todo operador absolutamente sumante es débilmente compacto. Combinando este hecho con los resultados de Edgar [Edg77] sobre equivalencia escalar con funciones fuertemente medibles, podemos mejorar el teorema de Belanger y Dowling que hemos mencionado más arriba:

Teorema 5.2.3 ([Roda]). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Entonces $u\circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner $u_f:\Omega \longrightarrow Y$.*

Sea $D(\mu,X)$ el espacio normado de todas las (clases de equivalencia escalar) de funciones integrables Dunford de Ω en X, equipado con la norma de Pettis. Como ya hemos comentado, aunque este espacio no es completo en general, siempre es tonelado y, por tanto, podemos aplicar el "teorema de la gráfica cerrada" a aplicaciones lineales definidas en él con valores en un espacio de Banach. En particular, gracias a esta técnica podemos generalizar la condición (ii) del resultado de Diestel, probando que la aplicación lineal

$$\tilde{u}:D(\mu,X)\longrightarrow L^1(\mu,Y), \quad u\mapsto u_f,$$

es continua (Corolario 5.2.7).

Heiliö [Hei88] estudió la clase de las medidas (no negativas y finitas) en $\mathrm{Baire}(X,w)$ para las que la identidad $I_X:X\longrightarrow X$ es integrable Dunford, llamadas *medidas débilmente sumables*. En [Hei88, 8.2.5] se plantea el siguiente problema: *Dada una medida débilmente sumable ϑ en* $\mathrm{Baire}(X,w)$*, podemos considerar la medida imagen ϑu^{-1} en* $\mathrm{Baire}(Y,w)$. *¿Existe una medida (no negativa y finita) $\tilde{\vartheta}$ en* $\mathrm{Borel}(Y,\|\cdot\|)$ *que extiende a ϑu^{-1} y tal que I_Y es integrable Bochner respecto de $\tilde{\vartheta}$?* Como aplicación del Teorema 5.2.3, en la Proposición 5.2.5 mostramos que dicha pregunta tiene respuesta afirmativa.

Nótese que, en virtud del Lema 5.2.2 y el Teorema de Medibilidad de Pettis, *si $u(X)$ es separable, entonces $u\circ f$ es integrable Bochner para cada función integrable Dunford $f:\Omega\longrightarrow X$*. Surge así una pregunta: ¿qué espacios de Banach X cumplen que todo operador absolutamente sumante definido en X con valores en otro espacio de Banach tiene rango separable? En el Corolario 5.3.7 probamos que esta propiedad se cumple para una amplia clase de espacios de Banach, que incluye, entre otros, a los débilmente numerablemente $\mathscr{K}$-determinados (e.g. débilmente compactamente generados) y a los de Asplund.

En general, la composición de un operador absolutamente sumante con una función integrable Dunford *no* es integrable Bochner (Ejemplos 5.3.22 y 5.3.23). Sin embargo, la situación cambia si consideramos funciones con propiedades de integrabilidad más fuertes. Por ejemplo:

Proposición 5.3.15 ([Roda]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner*.

Más en general, tenemos el siguiente teorema, que se apoya en algunos resultados de Talagrand (véase [Tal84, Section 10-2]) que relacionan la estabilidad con la *medibilidad conjunta* de funciones de la forma $h : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, donde K es un espacio topológico compacto Hausdorff con una medida de Radon y h es medible en la primera variable y continua en la segunda.

Teorema 5.3.9 ([Roda]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Consideramos las siguientes afirmaciones:*

(i) Existe un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ tal que, para cada medida de Radon ν en K, la familia $\{x^* \circ f : x^* \in \mathrm{supp}(\nu)\}$ es estable (donde $\mathrm{supp}(\nu)$ denota el soporte de ν).

(ii) Existe un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ tal que, para cada medida de Radon ν en K, la función

$$f_K : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_K(t, x^*) := (x^* \circ f)(t),$$

es $\mu \times \nu$-medible.

(iii) Para cada operador absolutamente sumante v definido en X con valores en otro espacio de Banach, la composición $v \circ f$ es integrable Bochner.

Entonces (i)⇒(ii)⇒(iii). Más todavía, bajo el Axioma de Martin, todas estas condiciones son equivalentes si μ es perfecta (en tal caso, (i) y (ii) se cumplen para cualquier conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$).

Como aplicación del Teorema 5.3.9 obtenemos los dos siguientes resultados.

Corolario 5.3.10 ([Roda]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que Z_f es estable. Entonces $u \circ f$ es fuertemente medible. Si, además, f es integrable Dunford, entonces $u \circ f$ es integrable Bochner*.

Proposición 5.3.14 ([Roda]). *Supongamos que X es isomorfo a un subespacio de un espacio débilmente Lindelöf de la forma $C(K)$. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner para cada función integrable Dunford $f : \Omega \longrightarrow X$.*

Finalmente, en lo que respecta al comportamiento de la integral de McShane, hemos probado siguientes resultados. El primero extiende el trabajo de Marraffa [Mar04] al caso de funciones definidas en espacios de medida topológicos quasi-Radon arbitrarios.

Proposiciones 5.3.18 y 5.3.20 ([Roda]). *Sean $(T, \mathfrak{T}, \mathscr{S}, \theta)$ un espacio de medida topológico quasi-Radon y $f : T \longrightarrow X$ una función.*

(i) Si f es integrable McShane, entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.

(ii) Si f es integrable Dunford, entonces $u \circ f$ es integrable McShane.

Capítulo 1

Preliminares

Para la conveniencia del lector, en este capítulo inicial introducimos los conceptos y resultados preliminares sobre *Teoría de la Medida* y *Espacios de Banach* que vamos a emplear frecuentemente en esta memoria.

1.1. Notación y terminología generales

La terminología empleada a lo largo de este trabajo es estándar. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ denotan los conjuntos de los números naturales (enteros positivos), reales y reales positivos, respectivamente. Escribimos $A\triangle B$ para denotar la diferencia simétrica de dos conjuntos arbitrarios A y B, es decir, $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Dado un conjunto I, el símbolo $\mathscr{P}(I)$ (resp. $\mathscr{P}_0(I)$) representa el conjunto de todos los subconjuntos (resp. subconjuntos finitos) de I; en ocasiones escribiremos $2^I = \mathscr{P}(I)$. Dados dos conjuntos X e Y, escribimos X^Y para denotar el conjunto de todas las funciones definidas en Y con valores en X. El dominio de una función arbitraria f se representa como $\mathrm{dom}(f)$. Una familia $\mathscr{G}$ de subconjuntos de un conjunto dado se dice *dirigida inferiormente* (resp. *superiormente*) si, para cada $G_1, G_2 \in \mathscr{G}$, existe un $G_3 \in \mathscr{G}$ tal que $G_3 \subset G_1 \cap G_2$ (resp. $G_1 \cup G_2 \subset G_3$). Una *partición* de un conjunto A es una colección $(A_i)_{i\in I}$ de subconjuntos no vacíos de A, disjuntos dos a dos, con $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Como es habitual, escribimos $\delta_{s,t}$ para denotar el *símbolo de Kronecker*, es decir, $\delta_{s,t} = 1$ si $s = t$, $\delta_{s,t} = 0$ si $s \neq t$.

Todos los espacios vectoriales V considerados en esta memoria son reales. Una *proyección* en V es una aplicación lineal $P : V \longrightarrow V$ tal que $P\circ P = P$. Dados dos conjuntos $A, B \subset V$ y $r \in \mathbb{R}$, escribimos $A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$ y $rA = \{ra : \ a \in A\}$. Para cada $S \subset V$, utilizamos los símbolos $\mathrm{span}(S)$, $\mathrm{co}(S)$ y $\mathrm{aco}(S)$ para denotar, respectivamente, el subespacio vectorial de V generado por S, la envoltura convexa de S en V y la envoltura absolutamente convexa de S en V; es decir,

$$\mathrm{co}(S) = \Big\{\sum_{i=1}^n a_i v_i : \ v_i \in S, \ a_i \in [0,1], \ \sum_{i=1}^n a_i = 1\Big\}$$

$$\text{y} \quad \mathrm{aco}(S) = \Big\{\sum_{i=1}^n a_i v_i : \ v_i \in S, \ a_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^n |a_i| \leq 1\Big\}.$$

Dados dos conjuntos $A \subset \Omega$ y una función $f : \Omega \longrightarrow V$, escribimos $f\chi_A$ para denotar la función de Ω en V definida por $f\chi_A(t) = f(t)$ si $t \in A$, $f\chi_A(t) = 0$ si $t \in \Omega \setminus A$.

Nuestras referencias básicas sobre topología son [Eng77] y [Kel75]. Dado un espacio topológico $(T, \mathfrak{T})$, escribimos $\mathrm{dens}(T, \mathfrak{T})$ (resp. $\mathrm{weight}(T, \mathfrak{T})$) para denotar el *carácter de densidad* (resp. el *peso*) de $(T, \mathfrak{T})$, es decir, la menor cardinalidad de un conjunto denso (resp. de una base para $\mathfrak{T}$). En general, se cumple la desigualdad $\mathrm{dens}(T, \mathfrak{T}) \leq \mathrm{weight}(T, \mathfrak{T})$.

Sean I un conjunto, $\mathscr{F}$ un filtro en I y $g : I \longrightarrow T$ una función. Decimos que *existe el límite de g a través de $\mathscr{F}$* si existe un $t \in T$ con la siguiente propiedad: para cada $U \in \mathfrak{T}$ con $t \in U$, el conjunto $\{i \in I : g(i) \in U\}$ pertenece a $\mathscr{F}$. En tal caso, si $(T, \mathfrak{T})$ es Hausdorff, escribimos $t = \lim_{i \to \mathscr{F}} g(i)$.

El espacio vectorial de todas las funciones continuas (resp. continuas y acotadas) de T en $\mathbb{R}$ se denota mediante $C(T, \mathfrak{T})$ (resp. $C_b(T, \mathfrak{T})$), o simplemente $C(T)$ (resp. $C_b(T)$). Es sencillo comprobar que $C_b(T)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : \ t \in T\}.$$

Dado un punto $t \in T$, utilizamos la notación δ_t para representar la aplicación lineal de $C(T)$ en $\mathbb{R}$ definida mediante $\delta_t(f) = f(t)$.

Se dice que $(T, \mathfrak{T})$ es *angélico* (Fremlin, véase [Flo80, p. 30]) si es completamente regular, Hausdorff y, para cada conjunto relativamente numerablemente compacto $A \subset T$, se cumple:

- A es relativamente compacto;
- todo elemento de $\overline{A}$ es el límite de una sucesión contenida en A.

Dado un conjunto no vacío Ω, escribimos $\mathfrak{T}_p(\Omega)$ (o simplemente $\mathfrak{T}_p$ si no hay posibilidad de confusión) para denotar la topología de la convergencia puntual en $\mathbb{R}^\Omega$. Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ se dice puntualmente (resp. uniformemente) acotada si $\sup\{|h(s)| : \ h \in \mathscr{H}\} < +\infty$ para cada $s \in \Omega$ (resp. $\sup\{|h(s)| : \ h \in \mathscr{H}, \ s \in \Omega\} < +\infty$).

Nuestra referencia básica sobre teoría de conjuntos es [Roi90]. Decimos que un conjunto es *contable* si es finito o infinito numerable. A lo largo de esta memoria los términos *cardinalidad* y *número cardinal* hacen referencia a un ordinal inicial. La cardinalidad de un conjunto S se denota por $\#(S)$. Escribimos ω_1 y $\mathfrak{c}$ para representar el primer ordinal no contable y la cardinalidad de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, respectivamente. En general se tiene la desigualdad $\omega_1 \leq \mathfrak{c}$. La afirmación "$\omega_1 = \mathfrak{c}$" es independiente de ZFC y se conoce como *Hipótesis del Continuo*.

Otro axioma de la teoría de conjuntos que aparecerá en este trabajo es el llamado *Axioma de Martin*. Para formularlo necesitamos introducir algo de terminología relativa a un conjunto parcialmente ordenado P. Un conjunto $Q \subset P$ se dice *cofinal* si para cada $p \in P$ existe un $q \in Q$ tal que $p \leq q$. Dos elementos $r, s \in P$ son *incompatibles* si no existe un $p \in P$ tal que $r \leq p$ y $s \leq p$. Decimos que P satisface la *condición de cadena numerable (CCC)* si cualquier conjunto $Q \subset P$ formado por elementos incompatibles dos a dos es contable.

Definición 1.1.1. *Sea κ un número cardinal. Denotamos mediante $MA(\kappa)$ la afirmación:*

> *Para cada conjunto (no vacío) parcialmente ordenado P con la CCC y cada familia $\mathscr{D}$ formada por subconjuntos cofinales de P con $\#(\mathscr{D}) \leq \kappa$, existe un conjunto $Q \subset P$ dirigido superiormente tal que $Q \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathscr{D}$.*

El Axioma de Martin es la afirmación “$MA(k)$ es cierta para todo $\omega_1 \leq \kappa < \mathfrak{c}$”.

Evidentemente, la Hipótesis del Continuo implica el Axioma de Martin. Por otro lado, es relativamente consistente con ZFC suponer que se verifican simultáneamente el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo. Para más información sobre el Axioma de Martin y sus consecuencias, remitimos al lector a [Sho75], [Fre84] y las referencias que allí se proporcionan.

Otro concepto que vamos a utilizar ocasionalmente en este trabajo es el de *cardinal de medida cero*. Recordemos que un cardinal κ se dice de medida cero si existe una medida de probabilidad μ en $\mathscr{P}(\kappa)$ tal que $\mu(\{\alpha\}) = 0$ para cada $\alpha < \kappa$. Un resultado bien conocido de Ulam (véase e.g. [Fre03, 438C]) afirma que ω_1 no es de medida cero. Además, es compatible con ZFC suponer que no existen cardinales de medida cero. El lector puede encontrar en [Fre03, §438] una completa introducción a este tema.

1.2. Teoría de la medida

El objetivo de esta sección es introducir la terminología elemental de la teoría de la medida que vamos a emplear en la memoria. Nuestras referencias estándar son [Coh93] y [Fre01].

Sea (Ω, Σ) un *espacio medible*, es decir, Ω es un conjunto y Σ es una σ-álgebra en Ω. Dado otro espacio medible (Ω', Σ'), una función $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ se dice Σ-Σ'-*medible* si $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada $B \in \Sigma'$. Decimos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es Σ-*medible* (o, simplemente, *medible*) si es Σ-Borel$(\mathbb{R})$-medible.

Una *medida no negativa y finita* en Σ es una función $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que, para cada sucesión disjunta (E_n) en Σ, la serie $\sum_n \mu(E_n)$ es convergente, con suma $\mu(\bigcup_n E_n)$; en tal caso, decimos que la terna (Ω, Σ, μ) es un *espacio de medida finito*. La *medida exterior* asociada a μ es la función $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \Sigma, A \subset B\}$. Se dice que μ es

- una *medida de probabilidad* si $\mu(\Omega) = 1$;
- *completa* si, para cada $B \in \Sigma$ con $\mu(B) = 0$, cualquier subconjunto de B pertenece a Σ.

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es μ-*medible* si es medible respecto de la completación de (Ω, Σ, μ). Se dice que $A \in \Sigma$ es un *átomo* de μ si $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) \in \{0, \mu(A)\}$ para todo $B \subset A$, $B \in \Sigma$. Una familia $(E_i)_{i \in I}$ en Σ es *independiente* (o *estocásticamente independiente*) si se cumple la igualdad $\mu(\bigcap_{i \in J} E_i) = \prod_{i \in J} \mu(E_i)$ para cada conjunto finito (no vacío) $J \subset I$.

Dado un conjunto $A \subset \Omega$, definimos $\Sigma_A := \{A \cap E : E \in \Sigma\}$ y $\mu_A(B) := \mu^*(B)$ para cada $B \in \Sigma_A$. Entonces (A, Σ_A, μ_A) es un espacio de medida finito (véase e.g. [Fre01, 214A]). Nótese que si $C \in \Sigma$ cumple $A \subset C$ y $\mu^*(A) = \mu(C)$, se tiene $\mu_A(A \cap E) = \mu(C \cap E)$ para todo $E \in \Sigma$.

A lo largo de esta memoria λ denota la medida de Lebesgue en la σ-álgebra $\mathscr{L}$ de todos los subconjuntos medibles Lebesgue de $[0, 1]$. Si no se especifica lo contrario, al hablar de $[0, 1]$ como espacio de medida nos estamos refiriendo a $([0, 1], \mathscr{L}, \lambda)$.

Dados dos espacios de medida finitos $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, escribimos $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ para denotar la σ-álgebra en $\Omega_1 \times \Omega_2$ generada por los subconjuntos de la forma $E_1 \times E_2$, donde $E_1 \in \Sigma_1$ y $E_2 \in \Sigma_2$. La *medida producto* de μ_1 y μ_2, denotada por $\mu_1 \times \mu_2$, es la única medida no negativa y finita en $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ que cumple $(\mu_1 \times \mu_2)(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2)$ para cada $E_1 \in \Sigma_1$ y cada $E_2 \in \Sigma_2$.

En general, si $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i) : i \in I\}$ es una familia de espacios de probabilidad, podemos considerar la σ-álgebra $\otimes_{i\in I}\Sigma_i$ en $\prod_{i\in I}\Omega_i$ generada por los subconjuntos de la forma $\prod_{i\in I} E_i$, donde $E_i \in \Sigma$ para cada $i \in I$ y $E_i = \Omega_i$ para cada $i \in I$ salvo una cantidad finita de índices. Es bien conocido que existe una única medida de probabilidad $\prod_{i\in I}\mu_i$ en $\otimes_{i\in I}\Sigma_i$ cumpliendo

$$\Big(\prod_{i\in I}\mu_i\Big)\Big(\prod_{i\in I}E_i\Big) = \prod_{i\in I}\mu_i(E_i)$$

para cada elemento $\prod_{i\in I}E_i \in \otimes_{i\in I}\Sigma_i$ de la forma anterior. Decimos que $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \otimes_{i\in I}\Sigma_i, \prod_{i\in I}\mu_i)$ es el *espacio de probabilidad producto* de $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i) : i \in I\}$.

Vamos a denotar por $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{L}_1, \lambda_1)$ el espacio de probabilidad completo obtenido tras completar el producto de una cantidad infinita numerable de copias del espacio de probabilidad trivial $(\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}), \nu)$, donde $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = 1/2$. Recordemos que la σ-álgebra producto $\otimes_{\mathbb{N}}\mathscr{P}(\{0,1\})$ coincide exactamente con $\mathrm{Borel}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ y que $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{L}_1, \lambda_1)$ es un espacio de medida topológico de Radon (en el sentido de la Definición 1.3.2) cuando se considera la topología usual en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Es bien conocido que $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{L}_1, \lambda_1)$ y $([0,1], \mathscr{L}, \lambda)$ son isomorfos como espacios de medida (véase e.g. [Fre01, 254K]), es decir, existe una biyección $\phi : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:

- ϕ es $\mathscr{L}$-$\mathscr{L}_1$-medible y $\lambda(\phi^{-1}(E)) = \lambda_1(E)$ para todo $E \in \mathscr{L}_1$;
- ϕ^{-1} es $\mathscr{L}_1$-$\mathscr{L}$-medible y $\lambda_1(\phi(F)) = \lambda(F)$ para todo $F \in \mathscr{L}$.

Como es habitual, identificamos $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mediante la biyección $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N})$ definida por $\psi((a_n)) := \{n \in \mathbb{N} : \ a_n = 1\}$. Recordemos que un filtro $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ se dice *no principal* si $\mathbb{N} \setminus \{n\} \in \mathscr{F}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; en tal caso, el conjunto $\psi^{-1}(\mathscr{F}) \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *no* es medible si y sólo si $\lambda_1^*(\psi^{-1}(\mathscr{F})) = 1$ (por ejemplo, esto ocurre cuando $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro no principal), véase e.g. [Tal84, 13-1-1].

El siguiente concepto aparecerá en ocasiones a lo largo de esta memoria. Se dice que un espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) es *perfecto* (o que μ es perfecta) si, para cada función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y cada conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(E) \in \Sigma$, existe un $B \subset E$, $B \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R})$, tal que $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(f^{-1}(E))$. Por ejemplo, todo espacio de medida topológico de Radon es perfecto, véase e.g. [Dul89, Appendix A]. La siguiente proposición es un caso particular de [Dul89, Proposition A.7] y nos será útil más adelante.

Proposición 1.2.1. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito y perfecto, $(T, \mathfrak{T})$ un espacio topológico Hausdorff con una base contable y $f : \Omega \longrightarrow T$ una función Σ-$\mathrm{Borel}(T, \mathfrak{T})$-medible. Consideramos la medida (no negativa y finita) imagen μf^{-1} en $\mathrm{Borel}(T, \mathfrak{T})$. Sea $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) g es μf^{-1}-medible;
(ii) la composición $g \circ f$ es μ-medible.

Dado un espacio de medida finito (Ω, Σ, μ), el espacio vectorial de todas las funciones reales medibles y μ-integrables definidas en Ω se denota por $\mathscr{L}^1(\mu)$. Escribimos $L^1(\mu)$ para representar el espacio de Banach formado por todas las clases de equivalencia (obtenidas identificando funciones que coinciden μ-a.e.) de elementos de $\mathscr{L}^1(\mu)$, con la norma $\|f\|_1 = \int_\Omega |f|\, d\mu$.

Un conjunto $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$ se dice *uniformemente integrable* si es $\|\cdot\|_1$-acotado y, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\sup_{h\in\mathscr{H}} \int_E |h|\, d\mu \leq \varepsilon$ para todo $E \in \Sigma$ con $\mu(E) \leq \delta$. La siguiente caracterización de Dunford (véase e.g. [DU77, Theorem 15, p. 76] o [Fre01, 247C]) va a jugar un papel fundamental en este trabajo.

Teorema 1.2.2 (Dunford). *Sean (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finito y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathscr{H}$ es uniformemente integrable;
(ii) la imagen canónica de $\mathscr{H}$ en $L^1(\mu)$ es débilmente relativamente compacta.

1.3. Espacios de medida topológicos

En esta sección repasamos de forma breve algunos conceptos fundamentales relacionados con las *medidas en espacios topológicos*: τ-aditividad, medidas de Radon y quasi-Radon, medidas de Baire, etc. Nuestra referencia básica sobre este tema es [Fre03].

Recordamos que la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico $(T,\mathfrak{T})$, que denotaremos por $\mathrm{Borel}(T,\mathfrak{T})$ (o simplemente $\mathrm{Borel}(T)$), es la σ-álgebra en T generada por $\mathfrak{T}$.

Definición 1.3.1. *Un espacio de medida topológico es una cuaterna $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$, donde*

(i) $(T,\mathfrak{T})$ es un espacio topológico;
(ii) Σ es una σ-álgebra en T que contiene a $\mathfrak{T}$;
(iii) μ es una medida en Σ no negativa, finita y completa.

Definición 1.3.2. *Un espacio de medida topológico $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ se dice de Radon si $(T,\mathfrak{T})$ es Hausdorff y*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K):\ K \subset E,\ K \text{ compacto}\} \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

En tal caso, decimos que μ es una medida de Radon en T.

Por ejemplo, la medida de Lebesgue en $[0,1]$ es de Radon. Más en general, un resultado clásico asegura que, para un espacio topológico *analítico* T, la completación de cualquier medida no negativa y finita definida en $\mathrm{Borel}(T)$ es una medida de Radon, véase e.g. [Fre03, 433C]. Recordamos que un espacio topológico Hausdorff T se dice analítico si existe una aplicación continua y suprayectiva $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow T$ (donde $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera equipado con el producto de la topología discreta en $\mathbb{N}$). En particular, todo espacio *polaco* (i.e. espacio métrico completo y separable) es analítico, véase e.g. [Fre03, 423B].

Dado un espacio topológico Hausdorff T, escribimos $M^+(T)$ para denotar el conjunto de todas las medidas de Radon en T.

Definición 1.3.3. *Sea $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ un espacio de medida topológico. Se dice que μ es τ-aditiva si, para cada familia $\emptyset \neq \mathscr{C} \subset \mathfrak{T}$ dirigida inferiormente con $\cap\mathscr{C} = \emptyset$, se tiene* $\inf\{\mu(C) : C \in \mathscr{C}\} = 0$.

Es bien conocido que toda medida de Radon μ en un espacio topológico Hausdorff $(T,\mathfrak{T})$ es necesariamente τ-aditiva, véase e.g. [Fre03, 411E]. Por tanto, el *soporte de* μ, definido como

$$\mathrm{supp}(\mu) = T \setminus \bigcup\{G \in \mathfrak{T} : \ \mu(G) = 0\},$$

satisface $\mu(T \setminus \mathrm{supp}(\mu)) = 0$.

Dada una función continua $\phi : T \longrightarrow S$ entre espacios topológicos Hausdorff y $\mu \in M^+(T)$, es sencillo comprobar que la completación de la medida imagen μf^{-1} en $\mathrm{Borel}(S)$ es una medida de Radon en S. Por otra parte, para espacios compactos disponemos del siguiente resultado, véase e.g. [Dul89, Proposition B.1] o [Fre03, 432G].

Proposición 1.3.4. *Sea $\phi : K \longrightarrow L$ una función continua y suprayectiva entre espacios topológicos compactos (Hausdorff). Entonces para cada $\nu \in M^+(L)$ existe una $\mu \in M^+(K)$ tal que*

$$\phi^{-1}(E) \in \mathrm{dom}(\mu) \quad y \quad \mu(\phi^{-1}(E)) = \nu(E) \quad \textit{para todo } E \in \mathrm{dom}(\nu).$$

En el Capítulo 3 trabajaremos con la siguiente clase de espacios de medida topológicos, que contiene a todos los de Radon.

Definición 1.3.5. *Un espacio de medida topológico $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ se dice quasi-Radon si*

(i) μ *es τ-aditiva;*
(ii) $\mu(E) = \inf\{\mu(G) : \ E \subset G, \ G \in \mathfrak{T}\}$ *para cada $E \in \Sigma$.*

Dados un espacio de medida topológico quasi-Radon (resp. de Radon) $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ y $A \subset T$ (resp. $A \in \Sigma$), es fácil ver que $(A,\mathfrak{T}|_A,\Sigma_A,\mu_A)$ es un espacio de medida topológico quasi-Radon (resp. de Radon), donde $\mathfrak{T}|_A$ es la topología en A inducida por $\mathfrak{T}$, i.e. $\mathfrak{T}|_A = \{A \cap G : G \in \mathfrak{T}\}$, véase [Fre03, 415B].

Finalizamos la sección introduciendo la *σ-álgebra de Baire* de un espacio topológico y algunos conceptos relacionados con las medidas definidas en ella.

Definición 1.3.6. *Sea $(T,\mathfrak{T})$ un espacio topológico completamente regular y Hausdorff.*

(i) Un conjunto cero de $(T,\mathfrak{T})$ es un conjunto de la forma $f^{-1}(\{0\})$ para alguna $f \in C(T,\mathfrak{T})$.
(ii) La σ-álgebra de Baire de $(T,\mathfrak{T})$, denotada por $\mathrm{Baire}(T,\mathfrak{T})$ *(o simplemente* $\mathrm{Baire}(T)$*), es la σ-álgebra en T generada por la familia de todos los conjuntos cero de $(T,\mathfrak{T})$.*

Siempre se tiene $\mathrm{Baire}(T) \subset \mathrm{Borel}(T)$. La inclusión contraria no es cierta en general (sí lo es, por ejemplo, en el caso de espacios métricos).

Definición 1.3.7. *Sea $(T,\mathfrak{T})$ un espacio topológico completamente regular y Hausdorff.*

(i) Una medida μ en $\mathrm{Baire}(T,\mathfrak{T})$*, no negativa y finita, se dice τ-suave si para cada familia $\mathscr{C}$ de conjuntos cero de $(T,\mathfrak{T})$ dirigida inferiormente con $\cap\mathscr{C} = \emptyset$, se tiene* $\inf\{\mu(C) : C \in \mathscr{C}\} = 0$.
(ii) $(T,\mathfrak{T})$ se dice compacto en medida si cada medida en $\mathrm{Baire}(T,\mathfrak{T})$*, no negativa y finita, es τ-suave.*

Es sencillo comprobar que cualquier espacio topológico (completamente regular y Hausdorff) *Lindelöf* es compacto en medida (véase e.g. [Fre03, 435F]).

1.4. Espacios de Banach

En esta sección introducimos la terminología básica de la teoría de los espacios de Banach que vamos a utilizar a lo largo de la memoria. Además, realizamos un breve repaso de algunas clases especiales de *espacios de Banach no separables* (e.g. débilmente Lindelöf determinados) y espacios topológicos compactos relacionados (e.g. compactos de Corson). Finalmente, presentamos el concepto de *base de Markushevich* y algunos resultados sobre la existencia de una tal base en un espacio de Banach. Nuestras referencias estándar sobre estos temas son los libros [FHH+01] y [Fab97]. El reciente "survey" [Ziz03] ofrece una panorámica actual sobre la teoría de los espacios de Banach no separables. Durante esta sección $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Salvo que se especifique lo contrario, al hablar de nociones topológicas en X como "convergencia", "cerrado", etc., nos estamos refiriendo a la topología inducida por la norma. Escribimos

$$B_X = \{x \in X : \ \|x\| \leq 1\} \quad \text{y} \quad S_X = \{x \in X : \ \|x\| = 1\}.$$

El *diámetro* de un conjunto $D \subset X$ se define como $\mathrm{diam}(D) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in D\}$; es fácil ver que $\mathrm{diam}(D) = \mathrm{diam}(\overline{\mathrm{co}(D)})$. Escribimos $\|D\| = \sup\{\|x\| : x \in D\}$. La *oscilación* de una función f con valores en X se define mediante $\mathrm{osc}(f) = \sup\{\|f(t) - f(t')\| : t, t' \in \mathrm{dom}(f)\} = \mathrm{diam}(f(B))$; vamos a utilizar el símbolo $\|f\|$ para representar la función $t \mapsto \|f(t)\|$.

Dado otro espacio de Banach Y, llamamos *operador* de X en Y a toda aplicación lineal y continua definida en X con valores en Y. Denotamos por $\mathscr{L}(X,Y)$ el espacio de Banach de todos los operadores de X en Y, con la norma $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}$; cuando $Y = \mathbb{R}$, escribimos $X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ para denotar el *dual topológico* de X.

Dados $x \in X$ y $x^* \in X^*$, utilizamos indistintamente las notaciones $\langle x^*, x\rangle$ y $x^*(x)$ para representar la evaluación de x^* en x. La aplicación $j_X : X \longrightarrow X^{**}$, definida por $j_X(x)(x^*) = x^*(x)$, es una inmersión isométrica lineal de X en X^{**} (de manera que X se identifica con un subespacio cerrado de X^{**}). Se dice que X es *reflexivo* si $j_X(X) = X^{**}$. Un conjunto $B \subset B_{X^*}$ se dice *normante* si $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B\}$ para cada $x \in X$.

La topología débil de X, denotada por w, es la topología más gruesa para la que todos los elementos de X^* son continuos. De manera similar, la topología débil* de X^*, denotada por w^*, es la topología más gruesa para la que todos los elementos de X ($\equiv j_X(X)$) son continuos. Es bien conocido que $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) = \mathrm{weight}(B_{X^*}, w^*)$.

Sean Γ un conjunto no vacío y $1 \leq p < +\infty$. Escribimos

$$\ell_\infty(\Gamma) = \{f \in \mathbb{R}^\Gamma : \ \|f\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)| < +\infty\},$$

$$c_0(\Gamma) = \{f \in \ell_\infty(\Gamma) : \ \text{el conjunto } \{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ es finito para cada } \varepsilon > 0\},$$

$$\ell^p(\Gamma) = \Big\{f \in \mathbb{R}^\Gamma : \ \|f\|_p = \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^p\Big)^{1/p} < +\infty\Big\}.$$

Sabemos que $(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ y $(\ell^p(\Gamma), \|\cdot\|_p)$ son espacios de Banach; vamos a emplear la notación habitual $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$, $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ y $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$. Dado $\gamma \in \Gamma$, escribimos e_γ para denotar el elemento de $\mathbb{R}^\Gamma$ definido por $e_\gamma(\gamma') = \delta_{\gamma,\gamma'}$ para todo $\gamma' \in \Gamma$.

A continuación introducimos distintas clases especiales de espacios de Banach no separables que aparecerán a lo largo de esta memoria.

Definición 1.4.1. *Se dice que X*

(i) *es débilmente compactamente generado (WCG) si existe un conjunto débilmente compacto $K \subset X$ tal que $X = \overline{\operatorname{span}(K)}$;*

(ii) *es débilmente numerablemente $\mathscr{K}$-determinado (WCD) si existe una sucesión (K_n) de subconjuntos w^*-compactos de X^{**} con la siguiente propiedad: para cada $x \in X$ y $u \in X^{**} \setminus X$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_n$ y $u \notin K_n$;*

(iii) *es débilmente Lindelöf determinado (WLD) si (B_{X^*}, w^*) es un compacto de Corson, es decir, existe un homeomorfismo entre (B_{X^*}, w^*) y un conjunto compacto $S \subset [-1,1]^\Gamma$ (para algún $\Gamma \neq \emptyset$) de manera que, para cada $s \in S$, la familia $\{\gamma \in \Gamma : s(\gamma) \neq 0\}$ es contable;*

(iv) *tiene la propiedad (C) si, para cada familia $\mathscr{C}$ de subconjuntos convexos y cerrados de X con $\cap\mathscr{C} = \emptyset$, existe una subfamilia contable $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ tal que $\cap\mathscr{D} = \emptyset$.*

Para el espacio de Banach X tenemos el siguiente diagrama de implicaciones, en el que ninguno de los recíprocos es cierto en general, véase e.g. [FHH$^+$01, Chapters 11-12], [Fab97, Chapters 7-8] y [Edg79].

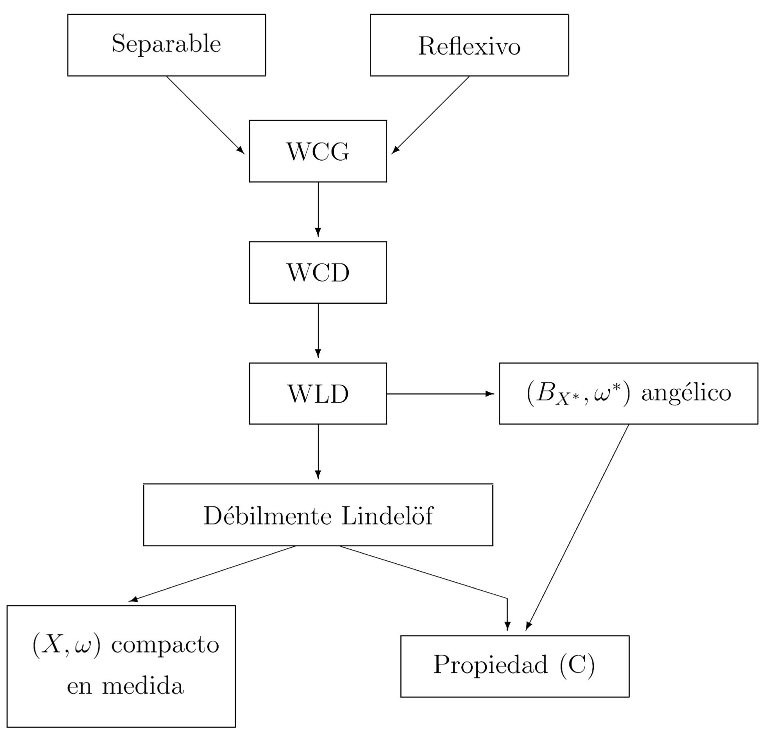

Figura 1.1: Algunas clases de espacios de Banach

La clase de los espacios de Banach WLD es estable para subespacios cerrados, como consecuencia del hecho de que toda imagen continua (Hausdorff) de un compacto de Corson también es de Corson (Gul'ko [Gul77], Michael y Rudin [MR77], véase también [Val91]). No es difícil comprobar que todo compacto de Corson separable es metrizable (véase e.g. [FHH$^+$01, Exercise 12.56]) y, por tanto, X es separable si y sólo si es WLD y (B_{X^*}, w^*) es separable. Más en general, cuando X es WLD se tienen las igualdades $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) = \mathrm{weight}(B_{X^*}, w^*) = \mathrm{dens}(X, \|\cdot\|)$.

Un espacio topológico compacto Hausdorff K se dice

- de *Eberlein* si $C(K)$ es WCG o, equivalentemente, si K es homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach;
- de *Gul'ko* si $C(K)$ es WCD.

En general, se cumplen las implicaciones

$$\text{Eberlein} \ \Rightarrow \ \text{Gul'ko} \ \Rightarrow \ \text{Corson}$$

y ninguno de los recíprocos es cierto en general, véase e.g. [Fab97, Chapters 7-8].

A continuación introducimos el concepto de *base de Markushevich* de un espacio de Banach. La existencia de tales bases en ciertas clases de espacios será fundamental para establecer algunos de los resultados de la Sección 2.5 y el Capítulo 4.

Definición 1.4.2. *Sea $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I} \subset X \times X^*$ un sistema biortogonal, es decir, $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$ para cada $i, j \in I$. Se dice que $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ es una base de Markushevich de X si*

(i) $X = \overline{\mathrm{span}\{x_i : i \in I\}}$;
(ii) *para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe un $i \in I$ tal que $x_i^*(x) \neq 0$; equivalentemente,*

$$X^* = \overline{\mathrm{span}\{x_i^* : \ i \in I\}}^{w^*}.$$

Si, además, $X^* = \overline{\mathrm{span}\{x_i^* : i \in I\}}^{\|\cdot\|}$, entonces decimos que la base es "shrinking".

Un resultado clásico de Markushevich (véase e.g. [FHH$^+$01, Theorem 6.41]) afirma que todo espacio de Banach *separable* posee una base de Markushevich (que podemos tomar "shrinking" si el dual del espacio es separable). Más adelante, Ovsepian y Pelczynski [OP75] (véase e.g. [LT77, Theorem 1.f.4]) probaron que, en tales condiciones, dicha base $\{(x_n, x_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser elegida de manera que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \cdot \|x_n^*\| < +\infty$. El siguiente teorema de Plichko [Pli82] extiende este último resultado al caso de espacios de Banach no necesariamente separables.

Teorema 1.4.3 (Plichko). *Si X tiene una base de Markushevich, entonces existe otra base de Markushevich $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ en X tal que $\sup_{i\in I} \|x_i\| \cdot \|x_i^*\| < +\infty$.*

En el caso de espacios de Banach no separables la existencia de bases de Markushevich no se puede garantizar en general. Por ejemplo, ℓ_∞ no admite una base de Markushevich (Johnson [Joh70], véase e.g. [FHH$^+$01, Theorem 6.43]). Sin embargo, como indicamos en el Teorema 1.4.4, cualquier espacio de Banach WLD tiene una base de Markushevich, véase e.g. [Val91, Corollary 3.1] o [FHH$^+$01, Theorem 12.50]. Para una prueba de la segunda afirmación del teorema, véase [FHH$^+$01, Proposition 12.51]. El lector puede encontrar en [VWZ94] más información sobre bases de Markushevich en espacios de Banach no separables.

Teorema 1.4.4 (Orihuela, Valdivia). *Si X es WLD, entonces existe una base de Markushevich en X. Además, para cualquier base de Markushevich $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ en X y cada $x^* \in X^*$, el conjunto $\{i \in I : x^*(x_i) \neq 0\}$ es contable.*

Finalizamos la sección presentando las nociones de *espacio de Asplund* y de *compacto de Radon-Nikodým*, que emplearemos en los Capítulos 4 y 5.

Definición 1.4.5. *Se dice que X es:*

(i) de Asplund si todo subespacio cerrado separable de X tiene dual separable;
(ii) Asplund generado si existen un espacio de Banach de Asplund Z y un operador $T : Z \longrightarrow X$ tal que $X = \overline{T(Z)}$.

Es bien conocido que *X es de Asplund si y sólo si X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým* (definida en la Sección 1.8), véase e.g. [Bou83, Theorem 4.2.13].

Un espacio topológico compacto Hausdorff K se dice de *Radon-Nikodým* [Nam87] si es homeomorfo a un subconjunto w^*-compacto del dual de un espacio de Asplund; equivalentemente, existe una métrica d en K inferiormente semicontinua que *fragmenta* K, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto (no vacío) $H \subset K$, existe un subconjunto relativamente abierto (no vacío) de H con d-diámetro menor que ε, véase e.g. [Nam87]. Es conocido que (B_{X^*}, w^*) es de Radon-Nikodým si X es Asplund generado, véase e.g. [Fab97, Chapter 1]. La clase de los compactos de Radon-Nikodým incluye a todos los compactos dispersos y a los de Eberlein, véase e.g. [Fab97, Proposition 1.5.2]. Por otro lado, un resultado de Orihuela, Schachermayer, Valdivia [OSV91] y Stegall [Ste91] (véase e.g. [Fab97, Theorem 8.3.5]) afirma que todo compacto de Corson y de Radon-Nikodým es necesariamente un compacto de Eberlein.

1.5. Series en espacios de Banach

En esta sección recordamos las definiciones de *familia sumable* y *serie incondicionalmente convergente* en espacios de Banach, el *teorema de Orlicz-Pettis* que relaciona estas nociones con la convergencia débil de subseries y el *teorema de Dvoretzky-Rogers* sobre la existencia de series incondicionalmente convergentes que no son absolutamente convergentes en espacios de dimensión infinita. También incluimos un lema sobre sumabilidad de sucesiones dobles (Lema 1.5.6). Los libros [KK97] y [Die84] son referencias convenientes sobre este tema. A lo largo de esta sección X es un espacio de Banach.

Como es habitual, dada una sucesión (x_n) en X, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es *convergente* (resp. *débilmente convergente*), con suma $x \in X$, si existe $\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i = x$ en la topología de la norma (resp. en la topología débil).

Definición 1.5.1. *Una familia $(x_i)_{i\in I}$ en X se dice sumable, con suma $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $J \subset I$ tal que $\|\sum_{i\in J'} x_i - x\| \leq \varepsilon$ para cada conjunto finito $J \subset J' \subset I$.*

En este caso, el conjunto $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ es contable. Obsérvese que la sumabilidad de $(x_i)_{i\in I}$ es simplemente la convergencia de la red $\{\sum_{i\in J} x_i : J \in \mathscr{P}_0(I)\}$, donde $\mathscr{P}_0(I)$ se considera dotado con el orden (dirigido) dado por la relación de inclusión.

Definición 1.5.2. *Sea (x_n) una sucesión en X. La serie $\sum_n x_n$ se dice incondicionalmente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ es convergente para cada biyección $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.*

Es bien conocido (y fácil de probar) que las dos nociones anteriormente definidas coinciden, como resumimos en la siguiente proposición (véase [Cho66, Theorem 10.7]).

Proposición 1.5.3. *Sea (x_n) una sucesión en X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente;
(ii) existe $x \in X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ es convergente con suma x para cada biyección $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$;
(iii) la familia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable, con suma $y \in X$;
(iv) para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $P \subset \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{n\in Q} x_n\| \leq \varepsilon$ para cada conjunto finito $Q \subset \mathbb{N} \setminus P$.

En tal caso, $y = x$. Denotamos este vector mediante $\sum_n x_n$.

La noción natural de serie de conjuntos incondicionalmente convergente, definida abajo, será usada principalmente en el Capítulo 4.

Definición 1.5.4. *Sea (B_n) una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. La serie $\sum_n B_n$ se dice incondicionalmente convergente si para cada elección $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente. En tal caso definimos*

$$\sum_n B_n := \Big\{ \sum_n x_n : \ x_n \in B_n, \ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Observación 1.5.5. *Sea (B_n) una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Entonces $\sum_n B_n$ es incondicionalmente convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $P \subset \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{i\in Q} B_i\| \leq \varepsilon$ para cada conjunto finito $Q \subset \mathbb{N} \setminus P$.*

Demostración. Esta sencilla consecuencia de la Proposición 1.5.3 aparece en [Bir35, p. 362]. La condición suficiente es clara y probamos el *sólo si* por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito $Q \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}$ tal que $\|\sum_{i\in Q} B_i\| > \varepsilon$. Entonces existen una sucesión (Q_k) de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$, disjuntos dos a dos, y elecciones $x_n \in B_n$, $n \in Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $\|\sum_{n\in Q_k} x_n\| > \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si tomamos $x_n \in B_n$ arbitrario para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, entonces la familia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es sumable y así la serie $\sum_n x_n$ no es incondicionalmente convergente (Proposición 1.5.3). □

En lo sucesivo nos será útil el siguiente criterio elemental para la sumabilidad de sucesiones dobles en espacios de Banach.

Lema 1.5.6 ([CR05]). *Sea $(x_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ una familia en X tal que:*

(i) la familia $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable para cada $n \in \mathbb{N}$;
(ii) existen una familia sumable $(y_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ en X y $(a_n) \in \ell^1$ tales que

$$\Big\| \sum_{k\in Q} (x_{n,k} - y_{n,k}) \Big\| \leq |a_n|$$

para cada conjunto finito $Q \subset \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $(x_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ *es sumable.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $N \in \mathbb{N}$ cumpliendo

$$\sum_{n>N} |a_n| \le \varepsilon \quad \text{y} \quad \Big\| \sum_{(n,k)\in P} y_{n,k} \Big\| \le \varepsilon \tag{1.1}$$

para cada conjunto finito $P \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $P \cap (\{1,2,\dots,N\}\times\{1,2,\dots,N\}) = \emptyset$. Tomamos ahora $M \in \mathbb{N}$, $M \ge N$, verificando

$$\Big\| \sum_{k\in F} x_{n,k} \Big\| \le \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{para cada } 1 \le n \le N \tag{1.2}$$

para cualquier conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ tal que $F \cap \{1,2,\dots,M\} = \emptyset$.

Dado un conjunto finito $H \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $H \cap (\{1,2,\dots,N\}\times\{1,2,\dots,M\}) = \emptyset$, empleamos la notación $H' := \{(n,k) \in H : 1 \le n \le N\}$ y observamos que

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{(n,k)\in H} x_{n,k} \Big\| &= \Big\| \sum_{(n,k)\in H'} x_{n,k} + \sum_{(n,k)\in H\setminus H'} x_{n,k} \Big\| \\ &\le \sum_{n=1}^{N} \Big\| \sum_{\substack{k \\ (n,k)\in H'}} x_{n,k} \Big\| + \Big\| \sum_{(n,k)\in H\setminus H'} (x_{n,k} - y_{n,k}) \Big\| + \Big\| \sum_{(n,k)\in H\setminus H'} y_{n,k} \Big\| \\ &\le \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} + \sum_{n>N} |a_n| + \varepsilon \le 3\varepsilon, \end{aligned}$$

por las desigualdades (1.1) y (1.2). Por tanto, la familia $(x_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ es sumable y la prueba ha finalizado. □

Concluimos la sección citando dos resultados destacables sobre convergencia incondicional. El primero, debido a Orlicz y Pettis [Pet38], véase [Die84, Chapter IV] o [DU77, Corollary 4, p. 22], muestra la interacción entre las topologías normada y débil en lo que respecta a la convergencia incondicional.

Teorema 1.5.7 (Orlicz-Pettis). *Sea* (x_n) *una sucesión en* X *tal que, para cada sucesión* (n_k) *estrictamente creciente de números naturales, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ *es débilmente convergente. Entonces* $\sum_n x_n$ *es incondicionalmente convergente.*

Definición 1.5.8. *Sea* (x_n) *una sucesión en* X. *La serie* $\sum_n x_n$ *se dice absolutamente convergente si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *es convergente.*

Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente, y ambas nociones coinciden para espacios de Banach de dimensión finita, véase [KK97, Chapter 1]. Esto nunca ocurre en espacios de dimensión infinita, gracias al teorema de Dvoretzky y Rogers [DR50], véase [Die84, Chapter VI] o [KK97, Theorem 4.1.1].

Teorema 1.5.9 (Dvoretzky-Rogers). *Si* X *es de dimensión infinita, entonces existe una sucesión* (x_n) *en* X *tal que la serie* $\sum_n x_n$ *es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente.*

1.6. Medidas vectoriales

En esta sección resumimos brevemente las definiciones y propiedades elementales de las medidas vectoriales y las nociones relacionadas de *variación* y *semivariación*. Recordamos también herramientas importantes como el *teorema de Bartle-Dunford-Schwartz* sobre la existencia de *medidas de control*. Nuestra referencia básica es [DU77]. A lo largo de esta sección $\mathscr{A}$ es un álgebra en un conjunto Ω y X es un espacio de Banach.

Definición 1.6.1. *Una función $\nu : \mathscr{A} \longrightarrow X$ se llama medida finitamente aditiva si se tiene la igualdad $\nu(\bigcup_{i=1}^m E_i) = \sum_{i=1}^m \nu(E_i)$ para cada colección finita $E_1, \dots, E_m$ de elementos de $\mathscr{A}$ disjuntos dos a dos.*

Definición 1.6.2. *Sea $\nu : \mathscr{A} \longrightarrow X$ una medida finitamente aditiva. La variación de ν es la función $|\nu| : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por*

$$|\nu|(E) = \sup \sum_{i=1}^m \|\nu(E_i)\|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las colecciones finitas $E_1, \dots, E_m$ de elementos de $\mathscr{A}$ disjuntos dos a dos tales que $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$. Decimos que ν tiene variación acotada si $|\nu|(\Omega) < +\infty$ (equivalentemente, $|\nu|$ tiene rango acotado). Decimos que ν tiene variación σ-finita si existe una sucesión (E_n) en Σ con unión Ω tal que $|\nu|(E_n) < +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $\nu : \mathscr{A} \longrightarrow X$ es una medida finitamente aditiva, se tiene $|\nu|(\bigcup_{i=1}^m E_i) = \sum_{i=1}^m |\nu|(E_i)$ para cada colección finita $E_1, \dots, E_m$ de elementos de $\mathscr{A}$ disjuntos dos a dos. También es obvio que para cada $x^* \in X^*$ la composición $x^* \circ \nu$ es una medida finitamente aditiva (con valores en $\mathbb{R}$). Teniendo esto en cuenta, podemos formular la siguiente definición.

Definición 1.6.3. *Sea $\nu : \mathscr{A} \longrightarrow X$ una medida finitamente aditiva. La semivariación de ν es la función $\|\nu\| : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por*

$$\|\nu\|(E) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* \circ \nu|(E).$$

Las siguientes propiedades elementales de la semivariación son bien conocidas, véase [DU77, Proposition 11, p. 4].

Proposición 1.6.4. *Sea $\nu : \mathscr{A} \longrightarrow X$ una medida finitamente aditiva. Para cada $E \in \mathscr{A}$ se tiene:*

(i) $\|\nu\|(E) \le |\nu|(E)$;
(ii) $\|\nu\|(E) = \sup \|\sum_{i=1}^m a_i \nu(E_i)\|$, *donde el supremo se toma sobre todas las colecciones finitas $E_1, \dots, E_m$ de elementos de $\mathscr{A}$ disjuntos dos a dos tales que $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$ y todas las colecciones finitas $a_1, \dots, a_m$ en $[-1, 1]$;*
(iii) $\sup\{\|\nu(F)\| : F \in \Sigma_E\} \le \|\nu\|(E) \le 2 \sup\{\|\nu(F)\| : F \in \Sigma_E\}$.

De aquí en adelante Σ es una σ-álgebra en un conjunto Ω.

Definición 1.6.5. *Una función* $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ *se llama medida contablemente aditiva si, para cada sucesión disjunta* (E_n) *en* Σ*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ *es convergente con suma* $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$.

En tal caso, ν (y por tanto $\|\nu\|$) tiene rango acotado, véase [DU77, Corollary 19, p. 9]. De hecho, podemos decir mucho más:

Teorema 1.6.6 (Bartle-Dunford-Schwartz). *Sea* $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ *una medida contablemente aditiva. Entonces su rango* $\{\nu(E) : E \in \Sigma\}$ *es débilmente relativamente compacto.*

En su clásico artículo [BDS55], Bartle, Dunford y Schwartz dedujeron este resultado como aplicación del siguiente, que será una herramienta fundamental en el Capítulo 3. Para las pruebas de ambos teoremas remitimos al lector a [DU77, Chapter I, §2].

Teorema 1.6.7 (Bartle-Dunford-Schwartz). *Sea* $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ *una medida contablemente aditiva. Entonces existe una medida* μ *en* Σ *no negativa y finita tal que*

(i) $\mu(E) \leq \|\nu\|(E)$ *para cada* $E \in \Sigma$*;*

(ii) para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|\nu(E)\| \leq \varepsilon$ *para cada* $E \in \Sigma$ *con* $\mu(E) \leq \delta$.

Una tal μ se llama *medida de control* de ν. Es claro que, dado $E \in \Sigma$, tenemos $\mu(E) = 0$ si y sólo si $\|\nu\|(E) = 0$. En lo que respecta a *(ii)*, debemos destacar que, al igual que en el caso de medidas con valores reales, esta condición es equivalente a decir que $\nu(E) = 0$ siempre que $\mu(E) = 0$. A continuación aislamos este resultado de Pettis [Pet38], véase [DU77, Theorem 1, p. 10].

Teorema 1.6.8 (Pettis). *Sean* $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ *una medida contablemente aditiva y* μ *una medida en* Σ *no negativa y finita. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\nu(E) = 0$ *para cada* $E \in \Sigma$ *con* $\mu(E) = 0$*;*

(ii) para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|\nu(E)\| \leq \varepsilon$ *para cada* $E \in \Sigma$ *con* $\mu(E) \leq \delta$.

En tal caso, decimos que ν *es* μ*-continua.*

El siguiente resultado (véase [DU77, Corollary 10, p. 25]) se conoce habitualmente como *teorema de Vitali-Hahn-Saks*.

Teorema 1.6.9 (Vitali-Hahn-Saks). *Sean* $\nu_n : \Sigma \longrightarrow X$ *una sucesión de medidas contablemente aditivas y* μ *una medida en* Σ *no negativa y finita tales que*

- ν_n *es* μ*-continua para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*
- *para cada* $E \in \Sigma$*, existe* $\lim_n \nu_n(E) = \nu(E)$ *en* X.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\nu_n(E)\| \leq \varepsilon$ *para todo* $E \in \Sigma$ *con* $\mu(E) \leq \delta$. *En particular,* $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ *es una medida contablemente aditiva.*

Finalizamos la sección recordando que, a diferencia del caso finito-dimensional, una medida contablemente aditiva con valores en un espacio de Banach arbitrario puede no tener variación acotada. El siguiente ejemplo (véase [DU77, p. 32]) es una consecuencia inmediata del teorema de Dvoretzky-Rogers.

Ejemplo 1.6.10. *Supongamos que X es infinito-dimensional. Entonces existe una medida contablemente aditiva con valores en X que no tiene variación acotada.*

Demostración. Por el teorema de Dvoretzky-Rogers 1.5.9, existe una sucesión (x_n) en X tal que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente. No es difícil comprobar que la función $\nu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow X$ dada por $\nu(A) = \sum_{n\in A} x_n$ es una medida contablemente aditiva. Como $\sum_{n=1}^m \|\nu(\{n\})\| = \sum_{n=1}^m \|x_n\|$ para cada $m \in \mathbb{N}$, se sigue que ν no tiene variación acotada. □

1.7. Medibilidad de funciones vectoriales

Esta sección está dedicada a recordar las diferentes nociones de medibilidad para funciones con valores en espacios de Banach (medibilidad *fuerte* y *escalar*) y la relación entre ellas (*teorema de medibilidad de Pettis*). El *"principio de exhaustividad"* es usado aquí para deducir una caracterización útil de la medibilidad fuerte (Lema 1.7.4). Además, mencionamos los resultados de Edgar que describen la *σ-algebra de Baire* de un espacio de Banach equipado con la topología débil y que caracterizan, en términos de la medida imagen inducida, cuándo una función escalarmente medible es *escalarmente equivalente* a una función fuertemente medible. Nuestras referencias estándar son [DU77] y [Tal84]. De aquí en adelante X es un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finito y completo.

Definición 1.7.1. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice simple si existen $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ y $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$.*

Definición 1.7.2. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice fuertemente medible (o μ-medible) si existe una sucesión $f_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones simples tales que $\lim_n f_n = f$ μ-a.e.*

Es claro que una función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente medible si y sólo si es medible en el sentido usual, esto es, Σ-Borel$(\mathbb{R})$-medible (téngase en cuenta la completitud de μ). En particular, $\|f\|$ es medible para cada función fuertemente medible $f : \Omega \longrightarrow X$.

La caracterización de la medibilidad fuerte aislada en el Lema 1.7.4 es bien conocida y será aplicada frecuentemente a lo largo de esta memoria. La equivalencia *(i)*$\Leftrightarrow$*(ii)* puede encontrarse en [DU77, Corollary 3, p. 42]. Incluimos aquí una demostración para facilitar la lectura de este trabajo e ilustrar el uso del "principio de exhaustividad", uno de los métodos más importantes en teoría de la medida.

Lema 1.7.3 (principio de exhaustividad). *Sea $\mathscr{E} \subset \Sigma$ un conjunto que satisface la siguiente propiedad:*

(+) para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \mathscr{E} \cap \Sigma_A$ con $\mu(B) > 0$.

Entonces existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $A_n \in \mathscr{E}$ cuando $\mu(A_n) > 0$.

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto formado por todas las familias contables de elementos de $\mathscr{E}$ con medida positiva y disjuntos dos a dos. La propiedad (+) asegura que $\mathscr{F}$ no es vacío. Consideremos

$\mathscr{F}$ dotado del orden dado por la relación de inclusión. Usando que cualquier familia de elementos de Σ con medida positiva y disjuntos dos a dos debe ser contable (porque $\mu(\Omega) < \infty$), es fácil ver que $\mathscr{F}$ satisface que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior. El lema de Zorn proporciona un elemento maximal $(E_n) \in \mathscr{F}$. Por maximalidad y (+), deducimos que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_n E_n) = 0$. Esto completa la prueba. □

Lema 1.7.4. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es fuertemente medible;

(ii) para cada $\varepsilon > 0$ existen una sucesión disjunta (A_n) en Σ y una sucesión (x_n) en X tales que la función $g : \Omega \longrightarrow X$ definida por $g = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{A_n}$ satisface $\|f - g\| \leq \varepsilon$ μ-a.e.;

(iii) para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma_A$ con $\mu(B) > 0$ tal que

$$\mathrm{osc}(f|_B) = \mathrm{diam}(f(B)) \leq \varepsilon.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\mathscr{E}_\varepsilon$ el conjunto de todos los elementos $E \in \Sigma$ para los que existen una sucesión disjunta (E_n) en Σ_E y una sucesión (x_n) en X tales que la función $g : \Omega \longrightarrow X$ definida mediante la fórmula $g = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}$ satisface $\|f|_E - g\| \leq \varepsilon$ μ_E-a.e. Es claro que $\Omega \in \mathscr{E}_\varepsilon$ si y sólo si existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $A_n \in \mathscr{E}_\varepsilon$ cuando $\mu(A_n) > 0$.

Supongamos que *(i)* se verifica y fijemos $\varepsilon > 0$. Teniendo en cuenta el Lema 1.7.3, para probar la implicación *(i)⇒(ii)* basta ver que *para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \mathscr{E}_\varepsilon \cap \Sigma_A$ con* $\mu(B) > 0$. Fijamos una sucesión $f_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones simples tal que $\lim_n f_n = f$ μ-a.e. La prueba habitual del conocido *teorema de Egorov* puede imitarse paso a paso (reemplazando $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$) para extender el resultado a sucesiones de funciones vectoriales fuertemente medibles, véase [Din67, Theorem 1, p. 94]; por tanto, existen $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) < \mu(A)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$ para cada $t \in E$. Es claro que $B := E \cap A$ cumple las condiciones requeridas. Esto demuestra *(i)⇒(ii)*.

Veamos ahora *(iii)⇒(ii)*. Dado $\varepsilon > 0$, *(iii)* implica que para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \mathscr{E}_\varepsilon \cap \Sigma_A$ con $\mu(B) > 0$, y así podemos aplicar el Lema 1.7.3 una vez más para concluir que $\Omega \in \mathscr{E}_\varepsilon$, como queríamos demostrar.

(ii)⇒(iii) es directa. Finalmente, veamos *(ii)⇒(i)*. Fijamos una sucesión $g_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones de la forma $g_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} \chi_{A_{n,m}}$, donde $(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta en Σ con unión Ω y $(x_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X, tal que $\lim_n g_n = f$ puntualmente en un cierto $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $m_n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande cumpliendo $\mu(\Omega \setminus B_n) \leq 1/2^n$, donde $B_n := \bigcup_{m=1}^{m_n} A_{n,m}$. Definamos la función simple $f_n := \sum_{m=1}^{m_n} x_{n,m} \chi_{A_{n,m}}$ y el conjunto

$$F := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq k} B_n.$$

Claramente, $\mu(\Omega \setminus (E \cap F)) = 0$ y $\lim_n f_n(t) = f(t)$ para cada $t \in E \cap F$. Se sigue que f es fuertemente medible y la prueba ha finalizado. □

Definición 1.7.5. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice escalarmente medible si la composición $x^* \circ f$ es medible para cada $x^* \in X^*$.*

La relación entre medibilidad fuerte y medibilidad escalar fue descubierta por Pettis [Pet38], véase [DU77, Theorem 2, p. 42].

Teorema 1.7.6 (Teorema de medibilidad de Pettis). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es fuertemente medible;*
(ii) f *es escalarmente medible y existe $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ tal que $f(E)$ es separable.*

Corolario 1.7.7. *Supongamos que X es separable. Entonces una función $f:\Omega \longrightarrow X$ es fuertemente medible si y sólo si f es escalarmente medible.*

En general, las nociones de medibilidad fuerte y medibilidad escalar son diferentes. Quizás el ejemplo más sencillo de una función escalarmente medible que no es fuertemente medible lo proporciona la aplicación $f:[0,1] \longrightarrow \ell^2([0,1])$ dada por $f(t) = e_t$, donde $\{e_t : t \in [0,1]\}$ es la base ortonormal usual de $\ell^2([0,1])$.

Ambas clases de medibilidad pueden ser caracterizadas en términos de Σ-$\mathscr{B}$-medibilidad, para ciertas σ-álgebras $\mathscr{B}$ en X. En lo que se refiere a medibilidad fuerte, lo siguiente puede encontrarse, por ejemplo, en [Coh93, Appendix E].

Teorema 1.7.8. *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es fuertemente medible;*
(ii) f *es* Σ-$\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$*-medible y existe $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ tal que $f(E)$ es separable.*

Un teorema de Marczewski y Sikorski [MS48], véase [Fre03, 438D], afirma que en un espacio métrico con carácter de densidad de medida cero, toda medida de Borel no negativa y finita está concentrada en un conjunto separable; dentro del contexto del Teorema 1.7.8, el anterior resultado, aplicado a la medida imagen μf^{-1} inducida por f en $\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$, asegura que la medibilidad fuerte de f es equivalente a su Σ-$\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$-medibilidad si $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|)$ es de medida cero (e.g. $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) = \omega_1$).

Edgar mostró en [Edg77] (alternativamente, véase [Tal84, 2-2-4]) que $\mathrm{Baire}(X, w)$ es exactamente la σ-álgebra en X generada por X^*. Así, *una función $f:\Omega \longrightarrow X$ es escalarmente medible si y sólo si f es* Σ-$\mathrm{Baire}(X, w)$*-medible*. En tal caso, podemos considerar la medida imagen μf^{-1} inducida por f en $\mathrm{Baire}(X, w)$.

Definición 1.7.9. *Sean $f, g:\Omega \longrightarrow X$ dos funciones. Decimos que f y g son escalarmente equivalentes si para cada $x^* \in X^*$ se tiene $x^* \circ f = x^* \circ g$ μ-a.e. Si, además, g es idénticamente nula, decimos que f es escalarmente nula.*

El siguiente resultado aparece comentado sin demostración en [Tal84, p. 37].

Lema 1.7.10. *Sean $f, g:\Omega \longrightarrow X$ dos funciones escalarmente equivalentes. Entonces*

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(g^{-1}(E)) \quad \textit{para todo } E \in \mathrm{Baire}(X, w).$$

Demostración. Definimos $\mathscr{A} = \{E \in \mathrm{Baire}(X,w) : \ \chi_E \circ f = \chi_E \circ g \ \ \mu\text{-a.e.}\}$. Se afirma que $\mathscr{A}$ *es una* σ*-álgebra en* X. En efecto, nótese que $X \in \mathscr{A}$ y que si $E \in \mathscr{A}$, entonces $X \setminus E \in \mathscr{A}$. Además, dada una sucesión (E_n) en $\mathscr{A}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene la igualdad

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n} \circ f = \max_{1\le n\le m} \chi_{E_n} \circ f = \max_{1\le n\le m} \chi_{E_n} \circ g = \chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n} \circ g \ \ \mu\text{-a.e.}$$

Tomando límites obtenemos

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} \circ f = \lim_m \chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n} \circ f = \lim_m \chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n} \circ g = \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} \circ g \ \ \mu\text{-a.e.}$$

Por tanto, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathscr{A}$. Esto demuestra que $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en X.

Por otra parte, como f y g son escalarmente equivalentes, cada $x^* \in X^*$ es $\mathscr{A}$-medible. Pero $\mathrm{Baire}(X,w)$ es la σ-álgebra en X generada por X^*, luego $\mathrm{Baire}(X,w) = \mathscr{A}$. Finalmente, dado $E \in \mathrm{Baire}(X,w)$, tenemos $\chi_E \circ f = \chi_E \circ g$ μ-a.e. y, por tanto, $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(g^{-1}(E))$. □

Los siguientes resultados están tomados de [Edg77], véase [Tal84, 2-3-2 y 3-4-5].

Teorema 1.7.11 (Edgar). *Sea* $f : \Omega \longrightarrow X$ *una función escalarmente medible. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es escalarmente equivalente a una función fuertemente medible;*
(ii) μf^{-1} *es* τ*-suave.*

Corolario 1.7.12. *Un espacio de Banach* X *es compacto en medida con su topología débil si y sólo si, para cada espacio de medida finito y completo* (Ω,Σ,μ)*, toda función escalarmente medible* $f : \Omega \longrightarrow X$ *es escalarmente equivalente a una función fuertemente medible.*

1.8. Las integrales de Bochner y Pettis

El objetivo de esta sección es repasar algunos aspectos bien conocidos sobre las integrales de *Bochner*, *Pettis* y *Dunford*. El teorema de Orlicz-Pettis asegura que la integral indefinida de Pettis es una medida *contablemente aditiva*; demostramos que su variación es σ*-finita* a través de una representación integral válida incluso para funciones integrables Dunford (Lema 1.8.10). También mencionamos la equivalencia entre la *compacidad relativa en norma del rango de la integral indefinida de Pettis* y la aproximación por funciones simples (en la *norma de Pettis*). Nuestras referencias básicas sobre estos temas son los libros [DU77] y [Tal84]. Para información adicional sobre la integral de Pettis remitimos a los artículos [Mus91] y [Mus02]. Durante esta sección X es un espacio de Banach y (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finito y completo.

Definición 1.8.1. *Sea* $f : \Omega \longrightarrow X$ *una función simple,* $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$*, donde* $A_1,\dots,A_n \in \Sigma$ *y* $x_1,\dots,x_n \in X$*. Dado* $E \in \Sigma$*, la integral de* f *sobre* E *es el elemento de* X *definido por*

$$\int_E f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap E) x_i.$$

Definición 1.8.2. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice integrable Bochner si es fuertemente medible y existe una sucesión $f_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones simples tal que* $\text{lím}_n \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$.

En tal caso, para cada $E \in \Sigma$ existe $\text{lím}_n \int_E f_n \, d\mu$. Este límite es independiente de la sucesión (f_n) y será denotado (momentáneamente) mediante

$$(\text{Bochner}) \int_E f \, d\mu \quad \text{(la integral de Bochner de } f \text{ sobre } E).$$

La siguiente caracterización es bien conocida, véase [DU77, Theorem 2, p. 44].

Proposición 1.8.3. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función fuertemente medible. Entonces f es integrable Bochner si y sólo si $\|f\|_1 := \int_\Omega \|f\| \, d\mu < +\infty$.*

La prueba usual de la completitud de $L^1(\mu)$ funciona también en el caso vectorial mostrando que $\|\cdot\|_1$ es una seminorma completa en el espacio vectorial $\mathscr{L}^1(\mu, X)$ de todas las funciones integrables Bochner definidas en Ω con valores en X (véase [Din67, Theorem 3, p. 226]). El correspondiente espacio de Banach de clases de equivalencia (obtenido identificando funciones que coinciden μ-a.e.) será denotado por $L^1(\mu, X)$.

Es bien conocido que el clásico teorema de Radon-Nikodým *no* es válido en general para la integral de Bochner. Se dice que X tiene la *propiedad de Radon-Nikodým respecto de μ (μ-RNP)* si, para cada medida contablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, μ-continua y con variación acotada, existe una función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que $\nu(E) = (\text{Bochner}) \int_E f \, d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Decimos que X tiene la *propiedad de Radon-Nikodým (RNP)* si tiene la μ-RNP para cada medida de probabilidad completa μ. Por ejemplo, todo espacio de Banach reflexivo tiene la RNP. Para un estudio completo de la RNP remitimos al lector a [DU77] y [Bou83].

Definición 1.8.4. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice integrable Dunford si $x^* \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$.*

El siguiente lema es el punto de partida de la teoría de las integrales de Dunford y Pettis, véase [DU77, Lemma 1, p. 52].

Lema 1.8.5. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Entonces*

(i) $\|f\|_P := \sup\{\|x^* \circ f\|_1 : x^* \in B_{X^*}\} < +\infty$;

(ii) existe una medida finitamente aditiva $\nu_f : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ con rango acotado tal que

$$\langle \nu_f(E), x^* \rangle = \int_E x^* \circ f \, d\mu \quad \textit{para cada } E \in \Sigma \textit{ y cada } x^* \in X^*.$$

Decimos que ν_f es la integral indefinida de Dunford de f.

Es claro que $\|\cdot\|_P$ es una seminorma (habitualmente llamada *seminorma de Pettis*) en el espacio vectorial $\mathscr{D}(\mu, X)$ de todas las funciones integrables Dunford de Ω en X.

Definición 1.8.6. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Pettis si*

- *f es integrable Dunford;*
- *$\nu_f(E) \in X$ para todo $E \in \Sigma$.*

A veces escribiremos $(\text{Pettis}) \int_E f \, d\mu$ *para denotar el vector* $\nu_f(E)$.

En tal caso, el teorema de Orlicz-Pettis 1.5.7 se puede aplicar para deducir fácilmente que la medida vectorial ν_f es contablemente aditiva, como ya observó Pettis [Pet38], véase [DU77, Theorem 5, p. 53]:

Teorema 1.8.7 (Pettis). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces ν_f es una medida contablemente aditiva y μ-continua. Decimos que ν_f es la integral indefinida de Pettis de f.*

Cualquier función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Pettis, con

$$(\text{Bochner}) \int_E f \, d\mu = \nu_f(E) \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

Ambas nociones de integrabilidad coinciden cuando X es finito-dimensional y son distintas cuando X tiene dimensión infinita, gracias al teorema de Dvoretzky-Rogers. Para ver esto último necesitamos recordar que, dada una sucesión (x_n) en X, la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente si y sólo si la serie $\sum_n a_n x_n$ es incondicionalmente convergente para cada $(a_n) \in \ell_\infty$, véase [Die84, Exercise 4, p. 29].

Corolario 1.8.8. *Supongamos que X es infinito-dimensional, que $\mu(\Omega) > 0$ y que μ no tiene átomos. Entonces existe una función integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ que no es integrable Bochner.*

Demostración. Por el teorema de Dvoretzky-Rogers 1.5.9, existe una sucesión (x_n) en X tal que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente. Como μ no tiene átomos y $\mu(\Omega) > 0$, podemos encontrar una sucesión disjunta (E_n) en Σ con $\mu(E_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. No es difícil comprobar que la función

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(E_n)} x_n \chi_{E_n}$$

satisface las propiedades requeridas (téngase en cuenta que la serie $\sum_n (\mu(E \cap E_n)/\mu(E_n)) x_n$ es incondicionalmente convergente para cada $E \in \Sigma$). $\square$

Es conocido que cualquier integral indefinida de Dunford tiene variación σ-finita. Deduciremos este resultado (debido a Rybakov en el caso de funciones integrables Pettis) de la representación integral dada en el Lema 1.8.10 de abajo, que es un caso particular de [Mus79, Proposition 1] y depende del siguiente resultado estándar (véase, por ejemplo, [Mus91, Proposition 3.1]).

Lema 1.8.9. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia puntualmente acotada de funciones medibles. Entonces existe una función medible $g : \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que*

(i) para cada $h \in \mathscr{H}$ se tiene $|h| \le g$ μ-a.e.;

(ii) $g(t) \leq \sup\{|h(t)| : h \in \mathscr{H}\}$ *μ-a.e.;*

(iii) *si $g' : \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ es medible y cumple (i) y (ii) (cambiando g por g'), entonces $g \leq g'$ μ-a.e.*

Lema 1.8.10 (Musial). *Sean $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford y $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ una función medible tales que*

(i) *para cada $x^* \in B_{X^*}$ se tiene $|x^* \circ f| \leq \varphi$ μ-a.e.;*

(ii) $\varphi \leq \|f\|$ *μ-a.e.;*

(iii) *si $\varphi' : \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ es medible y cumple (i) y (ii) (cambiando φ por φ'), entonces $\varphi \leq \varphi'$ μ-a.e.*

Entonces

$$|\nu_f|(E) = \int_E \varphi \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

Demostración. Dados $E_1, \dots, E_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos, tenemos

$$\sum_{i=1}^n \|\nu_f(E_i)\| = \sum_{i=1}^n \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle \nu_f(E_i), x^* \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_{E_i} |x^* \circ f| \, d\mu \leq \int_{\bigcup_{i=1}^n E_i} \varphi \, d\mu.$$

Por tanto $|\nu_f|(E) \leq \int_E \varphi \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma$. Veamos ahora la desigualdad contraria. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos

$$A_n := \{t \in \Omega : \ n-1 \leq \varphi(t) < n\} \in \Sigma.$$

Entonces $\varphi|_{A_n} \in \mathscr{L}^1(\mu_{A_n})$. Como $|\nu_f|(E) \leq \int_E \varphi \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma_{A_n}$ y $|\nu_f|$ es finitamente aditiva, resulta que la restricción $|\nu_f||_{\Sigma_{A_n}}$ es una medida no negativa y finita. Dado que, además, $|\nu_f|(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$, el clásico teorema de Radon-Nikodým, véase e.g. [Fre01, 232F], asegura la existencia de $h_n \in \mathscr{L}^1(\mu_{A_n})$ tal que $|\nu_f|(E) = \int_E h_n \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma_{A_n}$. Se sigue inmediatamente que $h_n \leq \varphi|_{A_n} \leq \|f\||_{A_n}$ μ_{A_n}-a.e. Por otra parte, dado $x^* \in B_{X^*}$, se tiene

$$\left|\int_E x^* \circ f \, d\mu\right| = |\langle \nu_f(E), x^* \rangle| \leq \|\nu_f(E)\| \leq |\nu_f|(E) = \int_E h_n \, d\mu$$

para cada $E \in \Sigma_{A_n}$. Por tanto, $\int_E |x^* \circ f| \, d\mu \leq \int_E h_n \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma_A$ y así $|x^* \circ f||_{A_n} \leq h_n$ μ_{A_n}-a.e.

Definimos $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $h(t) := h_n(t)$ si $t \in A_n$ y $n \in \mathbb{N}$. Claramente, la función medible h cumple *(i)* y *(ii)* (cambiando φ por h), y así *(iii)* asegura que $\varphi \leq h$ μ-a.e. Como se tiene $h_n \leq \varphi|_{A_n}$ μ_{A_n}-a.e. para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\varphi = h$ μ-a.e. Finalmente, obsérvese que para cada $E \in \Sigma$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_E \varphi \, d\mu &= \lim_m \sum_{n=1}^m \int_{E \cap A_n} \varphi \, d\mu = \lim_m \sum_{n=1}^m \int_{E \cap A_n} h_n \, d\mu \\ &= \lim_m \sum_{n=1}^m |\nu_f|(E \cap A_n) = \lim_m |\nu_f|\Big(E \cap \Big(\bigcup_{n=1}^m A_n\Big)\Big) \leq |\nu_f|(E).\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 1.8.11. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Entonces ν_f tiene variación σ-finita.*

Corolario 1.8.12. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función fuertemente medible e integrable Dunford. Entonces*

$$|\nu_f|(E) = \int_E \|f\| \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

En particular, f es integrable Bochner si y sólo si ν_f tiene variación acotada.

Demostración. Obviamente, $\|f\|$ es una función medible que cumple las condiciones *(i)* y *(ii)* del enunciado del Lema 1.8.10. Por otra parte, por el teorema de medibilidad de Pettis 1.7.6, existe $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ tal que $f(E)$ es separable, luego $Y := \overline{\mathrm{span}}(f(E))$ es separable y, en particular, B_{Y^*} es w^*-separable. Por el teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar un conjunto contable $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset B_{X^*}$ tal que $\|f(t)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(x_n^* \circ f)(t)|$ para cada $t \in E$. Se sigue de esta igualdad que $\|f\|$ verifica la condición *(iii)* del Lema 1.8.10 y podemos concluir que $|\nu_f|(E) = \int_E \|f\| \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma$. La Proposición 1.8.3 completa la prueba. □

Ya hemos mencionado que la integral indefinida de una función integrable Pettis es una medida contablemente aditiva. Por tanto, el teorema de Bartle-Dunford-Schwartz 1.6.6 garantiza que el rango de dicha medida siempre es débilmente relativamente compacto. En lo que se refiere a compacidad relativa *en norma*, la siguiente equivalencia es bien conocida, véase [DU77, Theorem 5, p. 224] o [Mus91, Theorem 9.1 y Remark 9.1].

Teorema 1.8.13. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma;*
(ii) *existe una sucesión $f_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones simples tal que* $\lim_n \|f_n - f\|_P = 0$.

Resolviendo una vieja cuestión planteada por Pettis [Pet38], Fremlin y Talagrand mostraron en [FT79] que, en general, el rango de la integral indefinida de Pettis no es relativamente compacto en norma. Stegall (véase [FT79]) usó el profundo *teorema de la subsucesión de Fremlin* para deducir que tal compacidad relativa en norma siempre se tiene cuando μ es *perfecta*. Otro resultado "afirmativo" en esta dirección fue obtenido por Talagrand para espacios de Banach X sin subespacios isomorfos a $\ell_1(\omega_1)$ (o incluso $\ell_1(\mathfrak{c})$ bajo el Axioma de Martin), véase [Tal84, 4-1-6]. Para más información sobre este tema, remitimos al lector a [Tal84, Chapter 4] y las referencias que allí se proporcionan.

Las funciones integrables Pettis para las que el rango de la integral indefinida es *separable* pueden caracterizarse de la siguiente manera, véase [Tal84, 5-3-2] o [Mus91, Theorem 10.2].

Teorema 1.8.14 (Musial, Talagrand). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es integrable Pettis y $\nu_f(\Sigma)$ es separable;*
(ii) *existe una sucesión $f_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones simples tal que*

- *para cada* $x^* \in X^*$ *se tiene* $\lim_n x^* \circ f_n = x^* \circ f$ μ*-a.e.;*
- *la familia* $\{x^* \circ f_n : \ x^* \in B_{X^*}, \ n \in \mathbb{N}\}$ *es un subconjunto uniformemente integrable de* $\mathscr{L}^1(\mu)$.

Finalizamos la sección introduciendo la llamada integral de Gel'fand (o débil*-integral) para funciones con valores en espacios de Banach duales, y que realmente es una generalización de la integral de Dunford (cuando las funciones con valores en X se consideran con valores en X^{**}).

Definición 1.8.15. *Una función* $f : \Omega \longrightarrow X^*$ *se llama integrable Gel'fand si* $\langle f, x\rangle \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *para cada* $x \in X$.

Como se menciona en [DU77, p. 53], el mismo argumento "de gráfica cerrada" usado para probar el Lema 1.8.5 nos permite concluir el siguiente

Lema 1.8.16. *Sea* $f : \Omega \longrightarrow X^*$ *una función integrable Gel'fand. Entonces*

(i) $\sup\{\|\langle f, x\rangle\|_1 : x \in B_X\} < +\infty$;
(ii) existe una medida finitamente aditiva $\gamma_f : \Sigma \longrightarrow X^*$ *con rango acotado tal que*

$$\langle \gamma_f(E), x\rangle = \int_E \langle f, x\rangle \, d\mu \quad \textit{para cada } E \in \Sigma \textit{ y cada } x \in X.$$

Decimos que γ_f *es la integral indefinida de Gel'fand de* f.

1.9. Familias estables de funciones medibles

En esta sección recordamos brevemente la noción de familia *estable* de funciones medibles (en el sentido de Talagrand) y algunas de sus aplicaciones a la *integral de Pettis* y a cuestiones de *medibilidad conjunta*. Remitimos al lector a [Tal84] y [Fre03, Chapter 46] para información detallada sobre este tema. A lo largo de la sección, X es un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finito y completo.

Definición 1.9.1. *Una familia* $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *se dice estable si, para cada* $A \in \Sigma$ *con* $\mu(A) > 0$ *y cada par de números reales* $\alpha < \beta$*, existen* $k, l \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\mu^*_{k+l}(D_{k,l}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta)) < \mu(A)^{k+l},$$

donde μ_{k+l} *denota el producto de* $k + l$ *copias de* μ *y*

$$D_{k,l}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta) := \bigcup_{h \in \mathscr{H}} \{(t_i)_{i=1}^{k+l} \in A^{k+l} : \ h(t_i) < \alpha \textit{ para cada } 1 \le i \le k,$$
$$h(t_i) > \beta \textit{ para cada } k+1 \le i \le k+l\}.$$

En este caso, $\mathscr{H}$ está formada por funciones medibles y su clausura $\overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$ también es estable, véase [Tal84, Chapter 9] o [Fre03, 465C, 465D].

Estabilidad e integrabilidad Pettis están relacionadas como se explica a continuación. Dada una función $f:\Omega \longrightarrow X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f:\ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

La familia Z_f es $\mathfrak{T}_p$-compacta, al ser una imagen continua de (B_{X^*}, w^*). En [Edg79] se mostró por primera vez que la integrabilidad Pettis de una función integrable Dunford f es equivalente a la continuidad de la integral en $(Z_f, \mathfrak{T}_p)$, véase [Tal84, 4-2-3, 4-1-5]:

Proposición 1.9.2 (Edgar). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *(i) f es integrable Pettis;*
- *(ii) la aplicación canónica $I: Z_f \longrightarrow L^1(\mu)$ (que envía cada función a su clase de equivalencia en $L^1(\mu)$) es $\mathfrak{T}_p$-débil-continua.*
- *(iii) la aplicación canónica $J: B_{X^*} \longrightarrow L^1(\mu)$ (que envía cada $x^* \in B_{X^*}$ a la clase de equivalencia de $x^* \circ f$ en $L^1(\mu)$) es w^*-débil-continua.*

En tal caso, $\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma si y sólo si I (resp. J) es $\mathfrak{T}_p$-$\|\cdot\|_1$-continua (resp. w^*-$\|\cdot\|_1$-continua).

Como consecuencia del Teorema 1.2.2 y la Proposición 1.9.2, se deduce el siguiente resultado (véase e.g. [Tal84, Theorem 4-2-2]).

Corolario 1.9.3. *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces Z_f es uniformemente integrable.*

Por otra parte, un conocido resultado de Talagrand (véase [Tal84, 9-5-2] o [Fre03, 465G]) asegura que, *para una familia estable y uniformemente integrable $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$, la aplicación canónica $I: \mathscr{H} \longrightarrow L^1(\mu)$ es $\mathfrak{T}_p$-$\|\cdot\|_1$-continua*. En términos de la integral de Pettis, esto se traduce de la siguiente manera:

Teorema 1.9.4 (Talagrand). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función tal que Z_f es estable y uniformemente integrable. Entonces f es integrable Pettis y $\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma.*

La noción de estabilidad juega también un papel relevante en el estudio de la medibilidad conjunta de funciones de la forma $h:\Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, donde K es un compacto con una medida de Radon y h es medible en la primera variable y continua en la segunda. A continuación presentamos un par de resultados en esta línea, debidos a Talagrand (véase [Tal84, Section 10-2]), que nos serán de utilidad en el Capítulo 5.

Teorema 1.9.5 (Talagrand). *Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff y $h:\Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que*

- *para cada $s \in K$, la función $t \mapsto h(t,s)$ es medible;*
- *para cada $t \in \Omega$, la función $s \mapsto h(t,s)$ es continua.*

Supongamos que la familia

$$\{h(\cdot,s):\ s\in K\}\subset\mathbb{R}^{\Omega}$$

es estable. Entonces h es $(\mu\times\nu)$*-medible para toda* $\nu\in M^{+}(K)$.

La afirmación “[0,1] no es la unión de menos de $\mathfrak{c}$ subconjuntos cerrados de medida nula” se conoce como *Axioma L*, véase [Tal84, 1-6-3], y es consecuencia del Axioma de Martin, como se indica en los comentarios que siguen a la Definición 1.10.7. *Bajo el Axioma L, cuando* μ *es perfecta, cualquier familia* $\mathfrak{T}_p$*-compacta y* $\mathfrak{T}_p$*-separable de funciones medibles* $\mathscr{H}\subset\mathbb{R}^{\Omega}$ *es estable*, véase [Tal84, Section 9-3]. Cabe destacar que en [SF93] se construye un modelo de ZFC para el que existen familias de funciones medibles Lebesgue, puntualmente compactas y separables, que no son estables.

Teorema 1.9.6 (Talagrand). *(Axioma L) Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff,* $\nu\in M^{+}(K)$ *con* $\operatorname{supp}(\nu)=K$ *y* $h:\Omega\times K\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función tal que*

- *para cada* $s\in K$*, la función* $t\mapsto h(t,s)$ *es medible;*
- *para cada* $t\in\Omega$*, la función* $s\mapsto h(t,s)$ *es continua.*

Supongamos que μ *es perfecta y que la función de* Ω *en* $L^1(\nu)$ *inducida por h, que envía cada* $t\in\Omega$ *a la clase de equivalencia de* $h(t,\cdot)$ *en* $L^1(\nu)$*, es fuertemente medible. Entonces la familia* $\{h(\cdot,s):s\in K\}$ *es estable y, en consecuencia, h es* $(\mu\times\nu)$*-medible.*

1.10. Liftings

En esta sección introducimos una herramienta muy útil en teoría de la medida que utilizaremos en el Capítulo 2: el *lifting* de un espacio de medida. Presentamos el teorema de von Neumann-Maharam sobre la *existencia de liftings* en espacios de probabilidad *completos* y algunas consecuencias de las interesantes propiedades de medibilidad que tienen los conjuntos transformados mediante un lifting (por ejemplo, la posibilidad de definir una topología asociada conveniente). En [ES92, Section 6.4] se puede encontrar una introducción básica a este tema. Para un tratamiento más detallado remitimos al lector a [ITIT69] y [Fre02]. De aquí en adelante (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finito y completo.

Definición 1.10.1. *Un lifting en* Σ *es una aplicación* $\tau:\Sigma\longrightarrow\Sigma$ *tal que:*

(i) $\mu(A\triangle\tau(A))=0$ *para cada* $A\in\Sigma$*;*
(ii) si $A,B\in\Sigma$ *cumplen* $\mu(A\triangle B)=0$*, entonces* $\tau(A)=\tau(B)$*;*
(iii) $\tau(A\cap B)=\tau(A)\cap\tau(B)$ *para cada* $A,B\in\Sigma$*;*
(iv) $\tau(\Omega\setminus A)=\Omega\setminus\tau(A)$ *para cada* $A\in\Sigma$.

Definición 1.10.2. *Un lifting en* $\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$ *es una aplicación* $\rho:\mathscr{L}^{\infty}(\mu)\longrightarrow\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$ *tal que:*

(i) $\rho(f)=f$ μ*-a.e. para cada* $f\in\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$*;*
(ii) si $f,g\in\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$ *coinciden* μ*-a.e., entonces* $\rho(f)=\rho(g)$*;*
(iii) ρ *es lineal y* $\rho(f\cdot g)=\rho(f)\cdot\rho(g)$ *para cada* $f,g\in\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$*;*
(iv) $\rho(1)=1$.

Ambas nociones están conectadas como sigue. Dado un lifting τ en Σ, siempre existe un único lifting ρ_τ en $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ tal que $\rho_\tau(\chi_A) = \chi_{\tau(A)}$ para cada $A \in \Sigma$. Recíprocamente, cualquier lifting ρ en $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ induce un único lifting τ_ρ en Σ definido por $\tau_\rho(A) = \rho(\chi_A)$, véase [ITIT69, Chapter III, Section 1] o [ES92, 6.4.3].

Un hecho crucial, atribuido a von Neumann (que publicó el caso particular de $[0,1]$ con la medida de Lebesgue) y probado por Maharam en [Mah58], es que siempre existe un lifting cuando μ es *completa*, véase [ITIT69, Theorem 3, p. 46] o [Fre02, 341K]. Es un problema abierto determinar si ocurre lo mismo sin la hipótesis de completitud.

Teorema 1.10.3 (von Neumann, Maharam). *Siempre existe un lifting τ en Σ.*

Muchas de las aplicaciones de los liftings descansan en las propiedades de medibilidad especiales que tienen las uniones arbitrarias de imágenes de conjuntos medibles. En esta línea, el siguiente resultado es bien conocido, véase [ES92, 6.4.10].

Lema 1.10.4. *Sean τ un lifting en Σ y $\mathscr{F} \subset \Sigma$ una familia tal que $F \subset \tau(F)$ para cada $F \in \mathscr{F}$. Entonces $\cup\mathscr{F} \in \Sigma$ y $\cup\mathscr{F} \subset \tau(\cup\mathscr{F})$.*

Demostración. Definimos $\alpha := \sup\{\mu(\cup\mathscr{F}_0) : \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ es contable$\}$. Es fácil ver que existe una familia contable $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ tal que $\mu(\cup\mathscr{F}_0) = \alpha$. Consideramos $E := \cup\mathscr{F}_0 \in \Sigma$. *Se afirma que $\tau(F) \subset \tau(E)$ para cada $F \in \mathscr{F}$*. En efecto, dado $F \in \mathscr{F}$, se tiene $\mu(E \cup F) = \mu(E)$ (por la definición de α), luego $\mu(F \setminus E) = 0$ y así $\tau(F) \setminus \tau(E) = \tau(F \setminus E) = \emptyset$, como se quería demostrar. Así, $E \subset \cup\mathscr{F} \subset \cup\{\tau(F) : F \in \mathscr{F}\} \subset \tau(E)$. Como $\mu(\tau(E) \setminus E) = 0$ y (Ω, Σ, μ) es completo, $\cup\mathscr{F} \in \Sigma$. Mas todavía, el hecho de que τ preserva inclusiones permite concluir que $\cup\mathscr{F} \subset \tau(E) \subset \tau(\cup\mathscr{F})$, lo que completa la prueba. $\square$

El lema anterior nos permite introducir una topología asociada a los liftings que será de utilidad en el Capítulo 2. Los dos siguientes resultados pueden encontrarse en [ITIT69, Proposition 1, p. 54].

Lema 1.10.5. *Sea τ un lifting en Σ. Entonces la familia*

$$\mathscr{C}_\tau = \{\tau(A) \setminus N : \; A, N \in \Sigma, \; \mu(N) = 0\}$$

es una topología en Ω contenida en Σ.

Demostración. Para probar que $\mathscr{C}_\tau$ es una topología en Ω, el único paso no trivial es comprobar que $\mathscr{C}_\tau$ es cerrada al tomar uniones arbitrarias. Consideramos una familia $(C_i)_{i \in I}$ en $\mathscr{C}_\tau$ y escribimos $C_i = \tau(A_i) \setminus N_i$, donde $A_i, N_i \in \Sigma$ y $\mu(N_i) = 0$. Obsérvese que para cada $i \in I$ se tiene $\tau(C_i) = \tau(\tau(A_i)) \setminus \tau(N_i) = \tau(A_i)$, por tanto $C_i \subset \tau(C_i)$ y el Lema 1.10.4 puede ser aplicado para deducir que $C := \bigcup_{i \in I} C_i \in \Sigma$ y $C \subset \tau(C)$. Ahora podemos escribir $C = \tau(C) \setminus (\tau(C) \setminus C)$, con $C \in \Sigma$ y $\mu(\tau(C) \setminus C) = 0$, luego $C \in \mathscr{C}_\tau$. Esto prueba que $\mathscr{C}_\tau$ es una topología en Ω, como se quería demostrar. $\square$

Lema 1.10.6. *Sean τ un lifting en Σ y $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$. Entonces la función $\rho_\tau(f)$ es $\mathscr{C}_\tau$-continua.*

Demostración. Comenzamos probando la siguiente afirmación.

Afirmación: si $h \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ verifica $h \geq 0$ μ-a.e., entonces $\rho_\tau(h)(t) \geq 0$ para cada $t \in \Omega$. En efecto, tomemos $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ tal que $g^2 = h$ μ-a.e. Entonces $\rho_\tau(h) = (\rho_\tau(g))^2$ y así $\rho_\tau(h)(t) \geq 0$ para cada $t \in \Omega$.

Supongamos que f es de la forma $f = \chi_A$ para algún $A \in \Sigma$. Entonces la función $\rho_\tau(f) = \chi_{\tau(A)}$ es $\mathscr{C}_\tau$-continua, ya que $\tau(A)$ y $\Omega \setminus \tau(A) = \tau(\Omega \setminus A)$ pertenecen a $\mathscr{C}_\tau$. De la linealidad de ρ_τ se sigue que $\rho_\tau(f)$ es $\mathscr{C}_\tau$-continua para cada función simple f. Finalmente, para una $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ arbitraria, podemos encontrar una sucesión f_n de funciones simples que converge uniformemente a f μ-a.e. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon \leq f_n - f \leq \varepsilon$ μ-a.e. para cada $n \geq m$. La afirmación inicial asegura que

$$-\varepsilon \leq \rho_\tau(f_n)(t) - \rho_\tau(f)(t) \leq \varepsilon$$

para cada $t \in \Omega$ y $n \geq m$. Así, $(\rho_\tau(f_n))$ converge uniformemente hacia $\rho_\tau(f)$ y, por tanto, esta función es $\mathscr{C}_\tau$-continua. Esto completa la prueba. □

Finalizamos la sección probando la medibilidad de uniones de familias "pequeñas" de conjuntos medibles. Antes necesitamos introducir la siguiente

Definición 1.10.7. *Se define*

$$\kappa(\mu) = \text{mín}\{\#(\mathscr{E}) : \ \mathscr{E} \subset \Sigma, \ \mu(E) = 0 \text{ para cada } E \in \mathscr{E}, \ \mu^*(\cup\mathscr{E}) > 0\}$$

si existen tales familias $\mathscr{E}$ (por ejemplo, esto ocurre si μ no tiene átomos).

Obviamente, cuando $\kappa(\mu)$ está definido siempre se tiene $\kappa(\mu) \geq \omega_1$. Es bien conocido que el Axioma de Martin implica $\kappa(\lambda) = \mathfrak{c}$ (Martin-Solovay, véase [Sho75]). La afirmación "$\kappa(\lambda) = \mathfrak{c}$" se conoce habitualmente como *Axioma M*, véase [Tal84, 1-6-1]. En los casos en que $\kappa(\mu)$ no está definido, todos los resultados de esta memoria que involucran a $\kappa(\mu)$ son ciertos sin restricción en las cardinalidades o caracteres de densidad que aparecen en los enunciados, como quedará claro en las correspondientes demostraciones.

Lema 1.10.8. *Sea $\mathscr{E} \subset \Sigma$ tal que $\#(\mathscr{E}) < \kappa(\mu)$. Entonces $\cup\mathscr{E} \in \Sigma$.*

Demostración. Fijamos un lifting τ en Σ y definimos $\tilde{E} := E \cap \tau(E)$ para cada $E \in \mathscr{E}$. Como $\tau(\tilde{E}) \supset \tilde{E}$ para cada $E \in \mathscr{E}$, el Lema 1.10.4 nos dice que $F := \bigcup\{\tilde{E} : E \in \mathscr{E}\} \in \Sigma$. Obsérvese que $\cup\mathscr{E} \supset F$ y

$$\cup\mathscr{E} \setminus F \subset \bigcup_{E \in \mathscr{E}} (E \setminus \tilde{E}).$$

Como $\mu(E \setminus \tilde{E}) = 0$ para cada $E \in \mathscr{E}$ y $\#(\mathscr{E}) < \kappa(\mu)$, obtenemos

$$\mu^*\Big(\bigcup_{E \in \mathscr{E}} (E \setminus \tilde{E})\Big) = 0,$$

por tanto $\cup\mathscr{E} \setminus F \in \Sigma$ y, en consecuencia, $\cup\mathscr{E} \in \Sigma$, como se quería demostrar. □

Corolario 1.10.9. *Sea* $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ *una familia puntualmente acotada de funciones medibles tal que* $\#(\mathscr{H}) < \kappa(\mu)$. *Entonces la función* $g \in \mathbb{R}^\Omega$ *definida por* $g(t) := \sup\{|h(t)| : h \in \mathscr{H}\}$ *es medible.*

Demostración. Obsérvese que, para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{t \in \Omega : \ g(t) > a\} = \bigcup_{h \in \mathscr{H}} \{t \in \Omega : \ |h(t)| > a\}$$

pertenece a Σ, por el Lema 1.10.8. $\square$

Capítulo 2

La integral de Birkhoff de funciones vectoriales

El punto de partida de nuestra investigación se remonta al artículo de Garrett Birkhoff [Bir35], en el que se estudia la integración de funciones definidas en un espacio de medida con valores en un espacio de Banach. La idea de Birkhoff fue extender, al contexto de la integración vectorial, *"la elegante interpretación de Fréchet de la integral de Lebesgue"*, que vamos a describir a continuación. *A lo largo de este capítulo X es un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finito y completo.*

Fréchet considera en [Fre15] funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y, para cada partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en conjuntos medibles, define las integrales "superior" e "inferior" mediante las expresiones

$$J^*(f,\Gamma) = \sum_n \sup f(A_n)\, \mu(A_n) \quad \text{y} \quad J_*(f,\Gamma) = \sum_n \inf f(A_n)\, \mu(A_n),$$

respectivamente, cuando ambas series están bien definidas (esto es, $f(A_n)$ es acotado si $\mu(A_n) > 0$) y son absolutamente convergentes. En tal caso, siguiendo la terminología de Fréchet, se dice que f es *sumable* respecto de Γ. Si Γ y Γ' son dos particiones contables de Ω en conjuntos medibles para las que f es sumable, siempre se tiene la desigualdad $J_*(f,\Gamma) \leq J^*(f,\Gamma')$; si además Γ' es más fina que Γ, entonces $[J_*(f,\Gamma'), J^*(f,\Gamma')] \subset [J_*(f,\Gamma), J^*(f,\Gamma)]$. Por tanto, la intersección

$$\bigcap \{[J_*(f,\Gamma), J^*(f,\Gamma)] : \ f \text{ es sumable respecto de } \Gamma\}$$

no es vacía. Fréchet probó que dicha intersección consiste en un único punto $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si f es integrable Lebesgue y, en tal caso, $x = \int_\Omega f\, d\mu$. En palabras del propio Fréchet [Fre15, p. 249]:

> *Esta manera de presentar la teoría de integración debida a M. Lebesgue tiene la ventaja, respecto de la manera en que la presentó el propio M. Lebesgue, de que es mucho más cercana a los puntos de vista de Riemann-Darboux con los que muchos estudiantes están familiarizados.*

Partiendo de la caracterización de Fréchet, Birkhoff introdujo una nueva noción de integral para funciones $f : \Omega \longrightarrow X$ que, a diferencia de las de Bochner y Pettis, apenas ha sido estudiada hasta ahora (una reciente excepción de relevancia es [Freb]). En este capítulo analizamos con detalle la integral de Birkhoff de funciones con valores en espacios de Banach. La mayoría de resultados originales que incluimos están tomados de nuestro trabajo conjunto con B. Cascales [CR05] y nuestros artículos [Rod05, Rodb, Rode].

2.1. Introducción a la integral de Birkhoff

En esta sección presentamos la integral de Birkhoff y mostramos que coincide con la *integral incondicional de Riemann-Lebesgue* recientemente estudiada en [KT00, KSS+02] (Apartado 2.1.1). En el Apartado 2.1.2 repasamos la relación de la integral de Birkhoff con las integrales de Bochner y Pettis. Resulta que la noción de integrabilidad Birkhoff es intermedia entre las de Bochner y Pettis, coincidiendo con esta última para funciones fuertemente medibles. Finalmente, caracterizamos la integrabilidad Birkhoff mediante un único proceso de límite que sólo involucra sumas finitas, en la línea de las *integrales de calibre* abstractas discutidas en [Fre03, Chapter 48] (Apartado 2.1.3).

2.1.1. Definición y propiedades elementales

Como se ha mencionado, los puntos de vista de Fréchet sobre la integral de Lebesgue inspiraron a Birkhoff para dar la siguiente definición:

Definición 2.1.1 ([Bir35]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función. Si $\Gamma=(A_n)$ es una partición contable de Ω en Σ, la función f se dice sumable respecto de Γ si la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n)>0$ y el conjunto de sumas*

$$J(f,\Gamma)=\Big\{\sum_n \mu(A_n)f(t_n):\ t_n\in A_n\Big\} \tag{2.1}$$

está formado por series incondicionalmente convergentes. La función f se dice integrable Birkhoff si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición contable Γ de Ω en Σ para la que f es sumable y $\mathrm{diam}(J(f,\Gamma))\le\varepsilon$.

Para introducir la "integral" de una función integrable Birkhoff necesitamos el Lema 2.1.2 de abajo, que es un caso especial de [Bir35, Theorem 9].

Dada una función $f:\Omega\longrightarrow X$, una familia contable $\Gamma=(A_n)$ formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos y una *elección* $T=(t_n)$ en Γ (i.e. $t_n\in A_n$ para cada n), el símbolo

$$S(f,\Gamma,T)=\sum_n \mu(A_n)f(t_n)$$

denota una serie formal en X. Como es habitual, decimos que otra familia contable Γ', formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos, es *más fina* que Γ cuando cada elemento de Γ' está contenido en algún elemento de Γ.

Lema 2.1.2. *Sean $f:\Omega\longrightarrow X$ una función y Γ una partición contable de Ω en Σ para la que f es sumable. Si Γ' es cualquier partición contable de Ω en Σ más fina que Γ, entonces f es sumable respecto de Γ' y*

$$\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma'))}\subset\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))}. \tag{2.2}$$

Demostración. Escribimos $\Gamma = (A_n)$ y $\Gamma' = (A_{n,k})$, donde $\bigcup_k A_{n,k} = A_n$ para cada n, y consideramos los subconjuntos de X dados por $B_n := \mu(A_n) f(A_n)$ y $B_{n,k} := \mu(A_{n,k}) f(A_{n,k})$.

Afirmamos que $\sum_{n,k} B_{n,k}$ es incondicionalmente convergente. Fijamos $\varepsilon > 0$. Como $\sum_n B_n$ es incondicionalmente convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\| \sum_{n \in S} B_n \Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

para cada conjunto finito $S \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N\}$ (véase la Observación 1.5.5). Fijamos

$$M > \text{máx}\{\|f(A_i)\| : \ 1 \leq i \leq N, \ \mu(A_i) > 0\}$$

y tomamos un $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande cumpliendo

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k>K} \mu(A_{n,k}) \leq \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.4}$$

Vamos a probar que

$$\Big\| \sum_{(n,k) \in S} B_{n,k} \Big\| \leq \varepsilon$$

para cada conjunto finito $S \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus (\{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, K\})$. En efecto, para un tal S, escribimos

$$S' := \{(n,k) \in S : \ 1 \leq n \leq N\} \quad \text{y} \quad S'' = \{(n,k) \in S : \ n > N\}.$$

Por un lado, la desigualdad (2.4) permite obtener $\|\sum_{(n,k) \in S'} B_{n,k}\| \leq \varepsilon/2$. Por otra parte, si definimos

$$N' = \text{máx}\{n > N : \ \text{existe } k \text{ con } (n,k) \in S\},$$

algunos cálculos y la desigualdad (2.3) nos dan (con el convenio $0/0 = 0$)

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{(n,k) \in S''} B_{n,k} \Big\| &\leq \Big\| \sum_{(n,k) \in S''} \frac{\mu(A_{n,k})}{\mu(A_n)} B_n \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{N < n \leq N'} \text{co}(B_n \cup \{0\}) \Big\| = \Big\| \text{co}\Big(\sum_{N < n \leq N'} \big(B_n \cup \{0\}\big) \Big) \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{N < n \leq N'} \big(B_n \cup \{0\}\big) \Big\| = \sup_{F \subset \{N+1, \ldots, N'\}} \Big\| \sum_{k \in F} B_k \Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\sum_{(n,k) \in S} B_{n,k}\| \leq \varepsilon$. Esto prueba la afirmación y, así, f es sumable respecto de Γ'.

Para finalizar la prueba mostraremos que $J(f, \Gamma') \subset \overline{\text{co}(J(f, \Gamma))}$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $J(f, \Gamma') \not\subset \overline{\text{co}(J(f, \Gamma))}$, esto es, que existe alguna elección T' en Γ' tal que $S(f, \Gamma', T') \notin \overline{\text{co}(J(f, \Gamma))}$. El teorema de separación de Hahn-Banach garantiza la existencia de $x^* \in X^*$ tal que

$$x^*(S(f, \Gamma', T')) > \sup\{x^*(y) : \ y \in J(f, \Gamma)\}. \tag{2.5}$$

Pero, al mismo tiempo, también se tiene

$$x^*(S(f,\Gamma',T')) \leq \sum_{n,k} \mu(A_{n,k}) \sup(x^* \circ f)(A_n) = \sum_n \mu(A_n) \sup(x^* \circ f)(A_n)$$
$$= \sup\{x^*(S(f,\Gamma,T)) : \ T \text{ elección en } \Gamma\} = \sup\{\langle x^*, y\rangle : \ y \in J(f,\Gamma)\},$$

lo que contradice la desigualdad (2.5). Esto demuestra la inclusión (2.2) y la prueba ha terminado. □

Ahora ya podemos dar la definición de "integral" de una función integrable Birkhoff.

Corolario 2.1.3 ([Bir35]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff. Entonces la intersección*

$$\bigcap \{\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))} : \ f \text{ es sumable respecto de } \Gamma\}$$

contiene un único punto, denotado por $(B)\int_\Omega f \, d\mu$ y llamado la integral de Birkhoff de f.

Demostración. Por el Lema 2.1.2, el conjunto de todas las particiones contables de Ω en Σ para las que f es sumable, denotado por D, es un conjunto dirigido cuando ordenamos las particiones por refinamiento y, además, $\{\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))}\}_{\Gamma \in D}$ es una red decreciente de conjuntos cerrados. El resultado se sigue de la completitud de X y el hecho de que $\lim_{\Gamma \in D} \mathrm{diam}(\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))}) = 0$. □

La siguiente proposición muestra, en particular, que la noción de *integrabilidad incondicional Riemann-Lebesgue*, estudiada recientemente en [KT00, KSS+02], coincide con la de Birkhoff. Antes necesitamos introducir algo de terminología. Dada una función $f : \Omega \longrightarrow X$, denotamos por $\mathscr{S}_f$ el conjunto de todos los pares (Γ, T), donde Γ es una partición contable de Ω en Σ para la que f es sumable y T es una elección en Γ. Obsérvese que el Lema 2.1.2 implica que $\mathscr{S}_f$ es un conjunto dirigido cuando se considera la relación

$$(\Gamma, T) \preceq (\Gamma', T') \ \Leftrightarrow \ \Gamma' \text{ es más fina que } \Gamma.$$

Resulta que la convergencia de la red $\{S(f,\Gamma,T)\}_{(\Gamma,T)\in \mathscr{S}_f}$ equivale a la integrabilidad Birkhoff de f:

Proposición 2.1.4 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es integrable Birkhoff;*

(ii) *existe $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que*

$$\|S(f,\Gamma,T) - x\| \leq \varepsilon$$

para cada elección T en Γ, siendo la serie $S(f,\Gamma,T)$ incondicionalmente convergente;

(iii) f *es incondicionalmente integrable Riemann-Lebesgue, i.e. existe* $y \in X$ *con la siguiente propiedad: para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una partición contable* Γ *de* Ω *en* Σ *tal que, para cada partición contable* Γ' *de* Ω *en* Σ *más fina que* Γ *y cada elección* T' *en* Γ'*, la serie* $S(f,\Gamma',T')$ *es incondicionalmente convergente y*

$$\|S(f,\Gamma',T') - y\| \leq \varepsilon.$$

En este caso, $x = y = (B)\int_\Omega f\, d\mu$.

Demostración. La implicación *(iii)*⇒*(ii)* es obvia. Para la prueba de *(ii)*⇒*(i)* fijamos $\varepsilon > 0$ y una partición contable Γ de Ω en Σ cumpliendo la condición que aparece en *(ii)*. Entonces, para cada dos elecciones T y T' en Γ, las series $S(f,\Gamma,T)$ y $S(f,\Gamma,T')$ son incondicionalmente convergentes y

$$\|S(f,\Gamma,T) - S(f,\Gamma,T')\| \leq 2\varepsilon.$$

De esta desigualdad se deduce que para cada $A \in \Gamma$ con $\mu(A) > 0$ se tiene $\operatorname{osc}(f|_A) \leq 2\varepsilon/\mu(A)$ y, en particular, $f|_A$ es acotada. Por tanto, f es sumable respecto de Γ y $\operatorname{diam}(J(f,\Gamma)) \leq 2\varepsilon$. Esto prueba que f es integrable Birkhoff.

Para ver *(i)*⇒*(iii)*, simplemente observamos que la integrabilidad Birkhoff de f y el Lema 2.1.2 implican que $\{S(f,\Gamma,T)\}_{(\Gamma,T)\in\mathscr{S}_f}$ es una red de Cauchy y, por tanto, converge hacia algún $y \in X$.

La prueba de la última afirmación es como sigue. Fijamos un $x \in X$ cumpliendo la propiedad de *(ii)*. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que f es sumable respecto de Γ y

$$\|S(f,\Gamma,T) - x\| \leq \varepsilon$$

para cada elección T en Γ. En particular, $\operatorname{diam}(\overline{\operatorname{co}(J(f,\Gamma))}) \leq 2\varepsilon$. Se sigue de la definición de la integral de Birkhoff de f (Corolario 2.1.3) que $\|(B)\int_\Omega f\, d\mu - x\| \leq 3\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene $x = (B)\int_\Omega f$, lo que completa la demostración. □

La equivalencia *(i)*⇔*(iii)* en la proposición anterior permite deducir automáticamente las siguientes propiedades.

Corolario 2.1.5. *Si* $f,g : \Omega \longrightarrow X$ *son funciones integrables Birkhoff y* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*, entonces* $\alpha f + \beta g$ *es integrable Birkhoff y*

$$(B)\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha\Big((B)\int_\Omega f\, d\mu\Big) + \beta\Big((B)\int_\Omega g\, d\mu\Big).$$

Corolario 2.1.6. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador entre espacios de Banach. Si* $f : \Omega \longrightarrow X$ *es integrable Birkhoff, entonces la composición* $T \circ f$ *es integrable Birkhoff y*

$$T\Big((B)\int_\Omega f\, d\mu\Big) = (B)\int_\Omega T \circ f\, d\mu.$$

Finalizamos el apartado analizando el comportamiento de las restricciones (a subconjuntos medibles) de funciones integrables Birkhoff.

Lema 2.1.7. *Sean $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff y $E \in \Sigma$. Entonces la restricción $f|_E$ es integrable Birkhoff (respecto de μ_E).*

Demostración. Por la Proposición 2.1.4 basta demostrar que la red

$$\{S(f|_E, \Gamma, T)\}_{(\Gamma,T)\in \mathscr{S}_{f|_E}}$$

es de Cauchy. Fijamos $\varepsilon > 0$. Como f es integrable Birkhoff, la Proposición 2.1.4 asegura la existencia de una partición contable $\Gamma_0 = (A_n)$ de Ω en Σ tal que, para cada par de particiones contables Γ_1 y Γ_2 de Ω en Σ más finas que Γ_0, y cada par de elecciones T_1 en Γ_1 y T_2 en Γ_2, las series $S(f, \Gamma_1, T_1)$ y $S(f, \Gamma_2, T_2)$ son incondicionalmente convergentes y $\|S(f, \Gamma_1, T_1) - S(f, \Gamma_2, T_2)\| \leq \varepsilon$. Consideramos la partición contable de E en Σ_E dada por

$$\Gamma_0^E = \{A_n \cap E : \ A_n \cap E \neq \emptyset\}.$$

Definimos $\Gamma_0^{\Omega\setminus E} = \{A_n \setminus E : A_n \setminus E \neq \emptyset\}$ y fijamos una elección $T_0^{\Omega\setminus E}$ en $\Gamma_0^{\Omega\setminus E}$.

Sean Γ_1' y Γ_2' dos particiones contables de E en Σ_E más finas que Γ_0^E, y tomemos dos elecciones en Γ_1' y Γ_2', digamos T_1' y T_2'. Entonces $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \Gamma_0^{\Omega\setminus E}$ y $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cup \Gamma_0^{\Omega\setminus E}$ son particiones contables de Ω en Σ más finas que Γ_0, y $T_1 = T_1' \cup T_0^{\Omega\setminus E}$ y $T_2 = T_2' \cup T_0^{\Omega\setminus E}$ son elecciones en Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Por tanto, $S(f|_E, \Gamma_1', T_1')$ y $S(f|_E, \Gamma_2', T_2')$ son incondicionalmente convergentes (porque son subseries de las series incondicionalmente convergentes $S(f, \Gamma_1, T_1)$ y $S(f, \Gamma_2, T_2)$, respectivamente) y

$$\|S(f, \Gamma_1', T_1') - S(f, \Gamma_2', T_2')\| = \|S(f, \Gamma_1, T_1) - S(f, \Gamma_2, T_2)\| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que la red $\{S(f|_E, \Gamma, T)\}_{(\Gamma,T)\in \mathscr{S}_{f|_E}}$ es de Cauchy, como se quería demostrar. □

El lema siguiente será utilizado en las demostraciones del Lema 2.1.14 y la Proposición 2.1.20.

Lema 2.1.8. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_0 de Ω en Σ con la siguiente propiedad: para cada familia contable Γ formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0, y cada elección T en Γ, la serie $S(f, \Gamma, T)$ es incondicionalmente convergente y*

$$\left\| S(f, \Gamma, T) - (B)\int_{\cup\Gamma} f|_{\cup\Gamma}\, d\mu_{\cup\Gamma} \right\| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición contable Γ_0 de Ω en Σ para la que f es sumable y $\operatorname{diam}(J(f, \Gamma_0)) \leq \varepsilon$. Fijamos cualquier familia contable Γ formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos y más fina que Γ_0. Definimos $E = \cup\Gamma$ y consideramos la partición contable de Ω en Σ dada por

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{A \setminus E : \ A \in \Gamma_0, \ A \setminus E \neq \emptyset\}.$$

Como Γ' es más fina que Γ_0, el Lema 2.1.2 asegura que f es sumable respecto de Γ' y

$$\operatorname{diam}(J(f, \Gamma')) \leq \operatorname{diam}(J(f, \Gamma_0)) \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $f|_E$ es sumable respecto de Γ y $\operatorname{diam}(J(f|_E,\Gamma)) \leq \operatorname{diam}(J(f,\Gamma') \leq \varepsilon$. De la propia definición de $(B)\int_E f|_E \, d\mu_E$ se sigue que, para cualquier elección T en Γ, se tiene

$$\left\| S(f,\Gamma,T) - (B)\int_E f|_E \, d\mu_E \right\| \leq \varepsilon,$$

lo que completa la demostración. □

2.1.2. Relación con las integrales de Bochner y Pettis

En este apartado recordamos los resultados de [Bir35] y [Pet38] que relacionan la integral de Birkhoff con las integrales de Bochner y Pettis. Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$ se tiene:

$$f \text{ integrable Bochner } \Rightarrow \; f \text{ integrable Birkhoff } \Rightarrow \; f \text{ integrable Pettis},$$

véase el Teorema 2.1.9 y el Corolario 2.1.13 más abajo. Ninguno de los recíprocos es cierto en general, aunque las nociones de integrabilidad Birkhoff y Pettis coinciden para funciones fuertemente medibles (Corolario 2.1.16) y, por tanto, para funciones con valores en espacios de Banach separables. El primer ejemplo de una función integrable Pettis que no es integrable Birkhoff se debe a Phillips [Phi40]. En la Sección 2.5 proporcionaremos otros ejemplos de funciones integrables Pettis que no son integrables Birkhoff.

Teorema 2.1.9 ([Bir35]). *Toda función integrable Bochner $f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Como f es fuertemente medible, podemos encontrar una partición contable (A_n) de Ω en Σ, una sucesión (x_n) en X y un $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$, tales que la función $g:\Omega \longrightarrow X$ definida por $g = \sum_n x_n \chi_{A_n}$ satisface $\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$ para cada $t \in E$ (véase el Lema 1.7.4). Consideramos la partición contable de Ω dada por $\Gamma = \{\Omega \setminus E, A_1 \cap E, A_2 \cap E, \dots\}$. Claramente, para cada $A \in \Gamma$ con $\mu(A) > 0$, se tiene $\operatorname{osc}(f|_A) \leq 2\varepsilon$ y, por tanto, $f|_A$ es acotada.

Por otro lado, como $f-g$ es fuertemente medible y $\|f-g\| \leq \varepsilon$ μ-a.e., la Proposición 1.8.3 nos asegura que $f-g$ es integrable Bochner y, en consecuencia, lo mismo ocurre con $g = f-(f-g)$. Así

$$\sum_n \mu(A_n)\|x_n\| = \int_\Omega \|g\| \, d\mu < +\infty.$$

Teniendo en cuenta que $\|f(t) - x_n\| \leq \varepsilon$ para cada $t \in A_n \cap E$ y cada $n \in \mathbb{N}$, es fácil deducir que f es sumable respecto de Γ y que, además, $\operatorname{diam}(J(f,\Gamma)) \leq 2\mu(\Omega)\varepsilon$. Esto demuestra que f es integrable Birkhoff. □

Observación 2.1.10. En la situación del teorema precedente, la función f es integrable Pettis y, por el Corolario 2.1.13, se tiene la igualdad

$$(\text{Bochner})\int_\Omega f \, d\mu = \nu_f(\Omega) = (B)\int_\Omega f \, d\mu.$$

En vista de los Corolarios 1.8.8 y 2.1.17, las nociones de integrabilidad Bochner y Birkhoff son distintas en general. Conectando con la integral de Riemann de funciones vectoriales, al final de este apartado incluimos un ejemplo clásico de una función *acotada* integrable Birkhoff que no es integrable Bochner.

Para probar, en el caso de funciones reales, la equivalencia de las integrales de Birkhoff y Lebesgue, necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 2.1.11. *Sean $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\Gamma = (A_n)$ una partición contable de Ω en Σ para la que f es sumable. Entonces*

$$\overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))} = \Big[\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\inf f(A_n), \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\sup f(A_n)\Big],$$

siendo las series involucradas absolutamente convergentes.

Demostración. En primer lugar, mostramos que la serie $\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\sup f(A_n)$ es absolutamente convergente y que su suma pertenece a $\overline{J(f,\Gamma)}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, para cada A_n de medida positiva podemos tomar un punto $t_n \in A_n$ tal que $f(t_n) \leq \sup f(A_n) \leq f(t_n) + \varepsilon/2^n$. Teniendo en cuenta que f es sumable respecto de Γ, deducimos que

$$\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)|\sup f(A_n)| \leq \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\Big(|f(t_n)| + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) < +\infty.$$

Por otra parte, es claro que $x = \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\sup f(A_n)$ satisface la desigualdad $|x-y| \leq \mu(\Omega)\varepsilon$, donde

$$y = \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n) f(t_n) \in J(f,\Gamma).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $x \in \overline{J(f,\Gamma)}$. Análogamente, la serie $\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\inf f(A_n)$ es absolutamente convergente y su suma pertenece a $\overline{J(f,\Gamma)}$.

En particular, se tiene

$$\Big[\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\inf f(A_n), \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)\sup f(A_n)\Big] \subset \overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))}.$$

La inclusión contraria es clara y la prueba ha terminado. □

Teorema 2.1.12 ([Fre15]). *Una función $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue si y sólo si es integrable Birkhoff. En tal caso, $\int_\Omega f\,d\mu = (B)\int_\Omega f\,d\mu$.*

Demostración. El *sólo si* es un caso particular de la Proposición 2.1.9. Recíprocamente, supongamos que f es integrable Birkhoff. Comenzamos probando que f *es medible* con la ayuda del Lema 1.7.4. Fijamos $\varepsilon > 0$ y $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. Como f es integrable Birkhoff, existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ para la que f es sumable y

$$\Big|\sum_n \mu(A_n) f(t_n) - \sum_n \mu(A_n) f(t_n')\Big| \leq \frac{\varepsilon\mu(E)}{2} \tag{2.6}$$

para cualesquiera elecciones $t_n, t'_n \in A_n$. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n \cap E) > \mu(E)/2$ y definimos $I = \{1 \leq n \leq N : \mu(A_n \cap E) > 0\}$. *Se afirma que existe un* $n \in I$ *tal que* $\mathrm{osc}(f|_{A_n \cap E}) \leq \varepsilon$. En efecto, si esto no es así, entonces para cada $n \in I$ podemos tomar $t_n, t'_n \in A_n \cap E$ tales que $f(t_n) - f(t'_n) > \varepsilon$, de donde

$$\frac{\varepsilon \mu(E)}{2} < \sum_{n \in I} \mu(A_n \cap E)\big(f(t_n) - f(t'_n)\big) \leq \sum_{n \in I} \mu(A_n)\big(f(t_n) - f(t'_n)\big),$$

lo que contradice la desigualdad (2.6) y prueba la afirmación. Esto demuestra que f es medible.

Por otra parte, fijamos cualquier partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en Σ para la que f es sumable. El Lema 2.1.11 garantiza que las series

$$\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n) \inf f(A_n) \ \text{ y } \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n) \sup f(A_n)$$

son absolutamente convergentes y, por tanto, se tiene

$$\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)|\inf f(A_n)| + \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n)|\sup f(A_n)| < +\infty.$$

Luego f es integrable Lebesgue. Finalmente, como

$$\sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n) \inf f(A_n) \leq \int_\Omega f \, d\mu \leq \sum_{\mu(A_n)>0} \mu(A_n) \sup f(A_n),$$

el Lema 2.1.11 nos dice que $\int_\Omega f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(J(f,\Gamma))}$. Dado que Γ ha sido escogida arbitrariamente entre todas las particiones para las que f es sumable, se sigue que $\int_\Omega f \, d\mu = (B) \int_\Omega f \, d\mu$. □

Combinando el Corolario 2.1.6, el Lema 2.1.7 y el Teorema 2.1.12, obtenemos el siguiente

Corolario 2.1.13 ([Bir35]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff. Entonces f es integrable Pettis y*

$$\nu_f(E) = (B) \int_E f|_E \, d\mu_E \quad \textit{para cada } E \in \Sigma.$$

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que integrabilidad Birkhoff e integrabilidad Pettis coinciden en el caso de funciones fuertemente medibles (Corolario 2.1.16). Para ello empleamos el siguiente lema, que también nos será de utilidad más adelante.

Lema 2.1.14 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;

(ii) existe una partición contable $\Gamma_0 = (A_n)$ de Ω en Σ con las siguientes propiedades:

- *$f|_{A_n}$ es integrable Birkhoff para cada n;*
- *para cada partición contable Γ de Ω en Σ más fina que Γ_0, la serie*

$$\sum_{E \in \Gamma} (B) \int_E f|_E \, d\mu_E$$

es incondicionalmente convergente.

Demostración. La implicación *(i)*⇒*(ii)* se sigue del Corolario 2.1.13, teniendo en cuenta que la integral indefinida de cualquier función integrable Pettis es una medida contablemente aditiva (Teorema 1.8.7).

Recíprocamente, veamos que *(ii)*⇒*(i)*. Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada n, el Lema 2.1.8 aplicado a $f|_{A_n}$ garantiza la existencia de una partición contable $\Gamma^n = (A_{n,k})_k$ de A_n en Σ_{A_n} tal que

- $f|_{A_n}$ es sumable respecto de Γ^n;
- para cada familia finita $\Gamma' \subset \Gamma^n$ y cada elección T' en Γ', se tiene la desigualdad

$$\left\|S(f,\Gamma',T') - (B)\int_{\cup\Gamma'} f|_{\cup\Gamma'}\, d\mu_{\cup\Gamma'}\right\| \le \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{2.7}$$

Consideramos la partición contable de Ω en Σ definida por $\Gamma := \bigcup_n \Gamma^n$. *Afirmamos que f es sumable respecto de Γ y que* $\mathrm{diam}(J(f,\Gamma)) \le 2\varepsilon$. En efecto, fijamos una elección $T = (t_{n,k})$ en Γ y, para cada n, consideramos la elección en Γ^n dada por $T^n := (t_{n,k})_k$. Obsérvese que:

(a) para cada n, la serie $S(f,\Gamma^n,T^n)$ es incondicionalmente convergente (ya que $f|_{A_n}$ es sumable respecto de Γ^n);

(b) $\sum_{n,k}(B)\int_{A_{n,k}} f|_{A_{n,k}}\, d\mu_{A_{n,k}}$ es incondicionalmente convergente (porque Γ es más fina que Γ_0);

(c) para cada conjunto finito $Q \subset \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la desigualdad (2.7) asegura que

$$\left\|\sum_{k\in Q}\mu(A_{n,k})f(t_{n,k}) - \sum_{k\in Q}(B)\int_{A_{n,k}} f|_{A_{n,k}}\, d\mu_{A_{n,k}}\right\| \le \frac{\varepsilon}{2^n}$$

(téngase en cuenta el Corolario 2.1.13, aplicado a $f|_{A_n}$, y el hecho de que $\nu_{f|_{A_n}}$ es finitamente aditiva).

En vista de (a), (b) y (c), el Lema 1.5.6 nos permite concluir que la serie $S(f,\Gamma,T)$ converge incondicionalmente. Por tanto, f es sumable respecto de Γ.

Finalmente, de la desigualdad (2.7) se deduce

$$\left\|S(f,\Gamma,T) - \sum_n (B)\int_{A_n} f|_{A_n}\, d\mu_{A_n}\right\| \le \sum_n \left\|S(f,\Gamma^n,T^n) - (B)\int_{A_n} f|_{A_n}\, d\mu_{A_n}\right\| \le \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \le \varepsilon.$$

En particular, tenemos que $\mathrm{diam}(J(f,\Gamma)) \le 2\varepsilon$. Esto demuestra que f es integrable Birkhoff. □

Corolario 2.1.15 ([Freb]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *f es integrable Birkhoff;*

(ii) *f es integrable Pettis y existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $f|_{A_n}$ es integrable Birkhoff para cada n.*

Demostración. Basta combinar el Corolario 2.1.13 con el Lema 2.1.14, usando de nuevo que ν_f es contablemente aditiva (Teorema 1.8.7). □

Corolario 2.1.16 ([Pet38]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función fuertemente medible. Entonces f es integrable Birkhoff si y sólo si es integrable Pettis.*

Demostración. Supongamos que f es fuertemente medible e integrable Pettis. La medibilidad fuerte de f asegura la existencia de una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $f|_{A_n}$ es acotada para cada A_n de medida positiva (basta aplicar el Lema 1.7.4). Entonces, para cada n, la restricción $f|_{A_n}$ es integrable Bochner y, en particular, integrable Birkhoff (Proposición 2.1.9). El resultado se sigue ahora del Corolario 2.1.15. □

El “teorema de medibilidad” de Pettis (Teorema 1.7.6) nos permite deducir el siguiente

Corolario 2.1.17. *Supongamos que X es separable. Entonces una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff si y sólo si es integrable Pettis.*

Finalizamos el apartado mostrando que la integral de Birkhoff extiende a la de Riemann, a diferencia de lo que ocurre con la integral de Bochner. Recordamos que una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ se dice *integrable Riemann* si existe un $x \in X$ (la *integral de Riemann de* f) con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para cada familia finita (I_k) de intervalos cerrados que no se solapan, con unión $[0,1]$ y tales que $\max_k \lambda(I_k) \leq \delta$, se tiene

$$\left\| \sum_k \lambda(I_k) f(t_k) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cualquier elección $t_k \in I_k$. Graves [Gra27] fue el primero en estudiar la integral de Riemann en el caso de funciones con valores en espacios de Banach. Remitimos al lector a [Gor91], donde se puede encontrar una completa exposición sobre este tema.

Proposición 2.1.18 ([Bir35]). *Toda función integrable Riemann $f : [0,1] \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff, y las respectivas integrales coinciden.*

Demostración. Sea $x \in X$ la integral de Riemann de f. Dado $\varepsilon > 0$, existe una familia finita $I_1, \dots, I_n$ de intervalos cerrados que no se solapan, con unión $[0,1]$, tales que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) f(t_k) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para puntos cualesquiera $t_k \in I_k$, $1 \leq k \leq n$. Denotamos por A el conjunto formado por los extremos de los intervalos $I_1, \dots, I_n$. Escribimos J_k para denotar el interior de cada I_k y consideramos la partición finita $\Gamma = \{J_1, \dots, J_n\} \cup \{A\}$. Claramente, se tiene

$$\|S(f, \Gamma, T) - x\| \leq \varepsilon \quad \text{para cualquier elección } T \text{ en } \Gamma.$$

En vista de la Proposición 2.1.4, f es integrable Birkhoff y $(B)\int_\Omega f \, d\mu = x$. □

Toda función integrable Riemann es acotada y escalarmente medible. Por tanto, para funciones con valores en espacios de Banach *separables*, integrabilidad Riemann implica integrabilidad Bochner (basta aplicar el “teorema de medibilidad” de Pettis 1.7.6 y la Proposición 1.8.3). Sin embargo, al considerar espacios de Banach no separables, se pueden encontrar ejemplos sencillos de funciones integrables Riemann que no son integrables Bochner, como el siguiente.

Ejemplo 2.1.19 ([Pet38]). *Una función integrable Riemann $f : [0,1] \longrightarrow \ell_\infty([0,1])$ que no es integrable Bochner.*

Demostración. Fijamos un conjunto $E \subset [0,1]$ que no sea medible Lebesgue y consideramos la función $f : [0,1] \longrightarrow \ell_\infty([0,1])$ dada por $f(t) = \chi_{\{t\}}$ si $t \in E$, $f(t) = 0$ en caso contrario. Como $\|f\| = \chi_E$ no es medible, f no es fuertemente medible.

Fijamos $\varepsilon > 0$. Tomamos cualquier familia finita (I_k) de intervalos cerrados que no se solapan, con unión $[0,1]$ y tales que $\max_k \lambda(I_k) \leq \varepsilon$. Para puntos cualesquiera $t_k \in I_k$ se tiene

$$\Big\|\sum_k \lambda(I_k) f(t_k)\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{t_k \in E} \lambda(I_k)\chi_{\{t_k\}}\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{t \in E}\Big(\sum_{t_k = t} \lambda(I_k)\Big)\chi_{\{t\}}\Big\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Por tanto, f es integrable Riemann, con integral de Riemann 0. □

2.1.3. La integral de Birkhoff a través de sumas finitas

Es sencillo comprobar que, para una función *acotada* $f : \Omega \longrightarrow X$, la noción de integrabilidad Birkhoff y la correspondiente integral no varían si se consideran exclusivamente particiones *finitas*. Este apartado está dedicado a caracterizar la integrabilidad Birkhoff (para funciones no necesariamente acotadas) mediante un único proceso de paso al límite que sólo involucra *sumas finitas* (Proposición 2.1.20). Esta descripción muestra que la integral de Birkhoff puede ser considerada una *integral de calibre*, en el sentido de [Fre03, Chapter 48].

Proposición 2.1.20. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;

(ii) existe $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existen una partición contable Γ_0 de Ω en Σ y un $\eta > 0$ tales que, para cada familia finita Γ formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0 y tal que $\mu(\Omega \setminus \cup\Gamma) \leq \eta$, se tiene

$$\|S(f,\Gamma,T) - x\| \leq \varepsilon$$

para cualquier elección T en Γ.

En tal caso, $x = (B)\int_\Omega f\,d\mu$.

Para la prueba de la Proposición 2.1.20 es conveniente introducir algo de terminología (que no se empleará en el resto de la memoria). Escribimos Π_Ω para denotar el conjunto de todos los pares (Γ, T), donde Γ es una familia finita formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos y T es una elección en Γ. Dada una partición contable Γ_0 de Ω en Σ y un $\eta > 0$, denotamos por $\Pi_\Omega(\Gamma_0, \eta)$ al conjunto formado por todos los pares $(\Gamma, T) \in \Pi_\Omega$ tales que Γ es más fina que Γ_0 y $\mu(\Omega \setminus \cup\Gamma) \leq \eta$. Escribimos $\mathscr{F}_\Omega$ para denotar el filtro en Π_Ω generado por la base de filtro

$$\{\Pi_\Omega(\Gamma_0, \eta) : \ \Gamma_0 \text{ es una partición contable de } \Omega \text{ en } \Sigma, \ \eta > 0\}.$$

Definición 2.1.21. *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función. Decimos que f es F-integrable si existe el límite*

$$\lim_{(\Gamma,T)\to\mathscr{F}_\Omega} S(f,\Gamma,T).$$

En tal caso, empleamos la notación $(F)\int_\Omega f\,d\mu=\lim_{(\Gamma,T)\to\mathscr{F}_\Omega} S(f,\Gamma,T)$.

Es claro que *una función $f:\Omega\longrightarrow X$ es F-integrable si y sólo si verifica la condición (ii) de la Proposición 2.1.20 (cumpliéndose además que $x=(F)\int_\Omega f\,d\mu$)*. Para ver que la noción de F-integrabilidad coincide con la de Birkhoff necesitamos los dos siguientes lemas. Dados $A\in\Sigma$ y una partición contable Γ_0 de Ω en Σ, escribimos $\Gamma_0^A:=\{E\cap A:\ E\in\Gamma_0,\ E\cap A\neq\emptyset\}$.

Lema 2.1.22. *Sean $f:\Omega\longrightarrow X$ una función F-integrable y $E\in\Sigma$. Entonces $f|_E:E\longrightarrow X$ es F-integrable (respecto de μ_E).*

Demostración. Dado $\varepsilon>0$, como f es F-integrable, existen una partición contable Γ_0 de Ω en Σ y un $\eta>0$ tales que

$$\|S(f,\Gamma_1,T_1)-S(f,\Gamma_2,T_2)\|\leq\varepsilon$$

para cualesquiera $(\Gamma_1,T_1),(\Gamma_2,T_2)\in\Pi_\Omega(\Gamma_0,\eta)$. Fijamos $(\Gamma',T')\in\Pi_{\Omega\setminus E}(\Gamma_0^{\Omega\setminus E},\eta/2)$.

Tomamos $(\Gamma_1',T_1'),(\Gamma_2',T_2')\in\Pi_E(\Gamma_0^E,\eta/2)$ y definimos $\Gamma_i=\Gamma_i'\cup\Gamma'$ y $T_i=T_i'\cup T'$ para $i=1,2$. Claramente, (Γ_1,T_1) y (Γ_2,T_2) pertenecen a $\Pi_\Omega(\Gamma_0,\eta)$ y, por tanto, se tiene

$$\|S(f|_E,\Gamma_1',T_1')-S(f|_E,\Gamma_2',T_2')\|=\|S(f,\Gamma_1,T_1)-S(f,\Gamma_2,T_2)\|\leq\varepsilon.$$

La F-integrabilidad de $f|_E$ se sigue ahora de la completitud de X. □

Lema 2.1.23. *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función F-integrable. Entonces la función $\theta_f:\Sigma\longrightarrow X$ definida por $\theta_f(E)=(F)\int_E f|_E\,d\mu_E$ es una medida contablemente aditiva.*

Demostración. Es fácil ver que θ_f es una medida finitamente aditiva. Por tanto, el resultado quedará demostrado si probamos

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\theta_f(E)=0.$$

Fijamos $\varepsilon>0$. Como f es F-integrable, existen una partición contable Γ_0 de Ω en Σ y un $\eta>0$ tales que $\|S(f,\Gamma,T)-\theta_f(\Omega)\|\leq\varepsilon$ para cada $(\Gamma,T)\in\Pi_\Omega(\Gamma_0,\eta)$.

Se afirma que $\|\theta_f(E)\|\leq 3\varepsilon$ para cada $E\in\Sigma$ con $\mu(E)\leq\eta/2$. En efecto, fijamos

- $(\Gamma_1,T_1)\in\Pi_{\Omega\setminus E}(\Gamma_0^{\Omega\setminus E},\eta/2)$ y
- $(\Gamma_2,T_2)\in\Pi_E$ tal que Γ_2 es más fina que Γ_0^E y $\|S(f|_E,\Gamma_2,T_2)-\theta_f(E)\|\leq\varepsilon$.

Claramente, (Γ_1,T_1) y $(\Gamma_1\cup\Gamma_2,T_1\cup T_2)$ pertenecen a $\Pi_\Omega(\Gamma_0,\eta)$, luego

$$\begin{aligned}\|\theta_f(E)\|&\leq\|\theta_f(E)-S(f|_E,\Gamma_2,T_2)\|\\&\qquad+\|S(f,\Gamma_1\cup\Gamma_2,T_1\cup T_2)-\theta_f(\Omega)\|+\|S(f,\Gamma_1,T_1)-\theta_f(\Omega)\|\leq 3\varepsilon,\end{aligned}$$

como se quería demostrar. Por tanto, $\lim_{\mu(E)\to 0}\theta_f(E)=0$ y, en consecuencia, θ_f es una medida contablemente aditiva. □

Demostración de la Proposición 2.1.20. La prueba de *(i)⇒(ii)* es como sigue. Ya sabemos que f es integrable Pettis y que $\nu_f(E) = (B)\int_E f|_E \, d\mu_E$ para cada $E \in \Sigma$ (Corolario 2.1.13). Dado $\varepsilon > 0$, como ν_f es μ-continua (Teorema 1.8.7), existe un $\eta > 0$ tal que

$$\|\nu_f(E)\| \leq \varepsilon \quad \text{para cada } E \in \Sigma \text{ con } \mu(E) \leq \eta. \tag{2.8}$$

Por otra parte, el Lema 2.1.8 asegura la existencia de una partición contable Γ_0 de Ω en Σ verificando

$$\|S(f,\Gamma,T) - \nu_f(\cup\Gamma)\| \leq \varepsilon$$

para cada $(\Gamma, T) \in \Pi_\Omega$ con Γ más fina que Γ_0. En vista de (2.8), se tiene

$$\|S(f,\Gamma,T) - \nu_f(\Omega)\| \leq 2\varepsilon$$

para cada $(\Gamma, T) \in \Pi_\Omega(\Gamma_0, \eta)$. Esto demuestra que f es F-integrable y $(F)\int_\Omega f \, d\mu = \nu_f(\Omega)$.

Recíprocamente, supongamos que la condición *(ii)* se verifica. Claramente, si f es acotada, entonces es automáticamente integrable Birkhoff. En general, como f es F-integrable, existe una partición contable $\Gamma_0 = (A_n)$ de Ω en Σ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(f(t_i) - f(t_i'))\right\| \leq 1$$

para n suficientemente grande y puntos cualesquiera $t_i, t_i' \in A_i$. En particular, $f|_{A_n}$ es acotada para cada A_n de medida positiva. Por el Lema 2.1.22, $f|_{A_n}$ es F-integrable y, por tanto, integrable Birkhoff para cada n.

En vista del Lema 2.1.14, para terminar la prueba de la integrabilidad Birkhoff de f basta comprobar que, dada una partición contable Γ de Ω en Σ más fina que Γ_0, la serie $\sum_{E\in\Gamma}(B)\int_E f|_E \, d\mu_E$ es incondicionalmente convergente. Pero esto es una consecuencia inmediata del Lema 2.1.23 y la igualdad

$$(B)\int_E f|_E \, d\mu_E = (F)\int_E f|_E \, d\mu_E \quad \text{para cada } E \in \Gamma$$

(que se sigue de la prueba de *(i)⇒(ii)*). Esto completa la demostración. □

2.2. La propiedad de Bourgain

La propiedad de Bourgain de una familia de funciones reales (Definición 2.2.1), introducida en [Bou], fue inicialmente estudiada como una herramienta técnica, más fuerte que la estabilidad en el sentido de Talagrand (véase el Apartado 2.2.1), con aplicaciones a la integral de Pettis. Riddle y Saab [RS85] observaron que *una función acotada $f : \Omega \longrightarrow X^*$ es integrable Pettis si la familia de composiciones $\{\langle x, f\rangle : x \in B_X\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain*. La base de este resultado es un teorema fundamental de Bourgain (Teorema 2.2.3): para una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ con la propiedad de Bourgain, los puntos de $\overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$ se alcanzan como límites en casi todo punto de *sucesiones* contenidas en $\mathscr{H}$. Por otra parte, Musial [Mus83, Mus84] empleó estas ideas para dar una nueva prueba del hecho de que los duales de espacios de Banach sin subespacios isomorfos a ℓ^1 tienen la propiedad débil de Radon-Nikodým (véase la Sección 2.4).

La propiedad de Bourgain también fue utilizada por Ghoussoub, Godefroy, Maurey y Schachermayer en [GGMS87, Chapter IV], a la hora de estudiar los operadores fuertemente regulares de $L^1[0,1]$ en otro espacio de Banach. En aquella memoria se puede encontrar una caracterización (debida a Talagrand) de la propiedad de Bourgain en términos de *familias de oscilación pequeña*. Dicha caracterización (véase el Apartado 2.2.2) será una herramienta esencial en la Sección 2.3, que está dedicada a analizar la integrabilidad *Birkhoff* de una función $f : \Omega \longrightarrow X$ a través de la familia $Z_f = \{x^* \circ f : x^* \in B_{X^*}\}$.

2.2.1. Propiedad de Bourgain y estabilidad

Definición 2.2.1. *Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existen $A_1, \dots, A_n \subset A$, $A_i \in \Sigma$ con $\mu(A_i) > 0$, tales que*

$$\min_{1\le i\le n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \le \varepsilon \quad \textit{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

En la siguiente proposición resumimos algunas propiedades elementales de las familias con la propiedad de Bourgain. A menudo serán utilizadas sin mención explícita.

Proposición 2.2.2. *Sean $\mathscr{H}, \mathscr{G} \subset \mathbb{R}^\Omega$ dos familias de funciones y $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. Entonces:*

- *(i)* $\overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$ *tiene la propiedad de Bourgain;*
- *(ii)* $\mathscr{H}$ *está formada por funciones medibles;*
- *(iii) si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $\{f\}$ tiene la propiedad de Bourgain;*
- *(iv) si $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain, entonces $\mathscr{H} \cup \mathscr{G}$ también tiene la propiedad de Bourgain;*
- *(v) si $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$, entonces $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain;*
- *(vi) para cada $A \subset \Omega$, la familia de restricciones $\mathscr{H}|_A = \{h|_A : h \in \mathscr{H}\}$ tiene la propiedad de Bourgain (respecto de μ_A);*
- *(vii) $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus A) \le \varepsilon$ tal que $\mathscr{G}|_A$ tiene la propiedad de Bourgain (respecto de μ_A);*
- *(viii) dada una partición contable (E_n) de Ω en Σ, la familia $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain si y sólo si, para cada n, la familia $\mathscr{G}|_{E_n}$ tiene la propiedad de Bourgain (respecto de μ_{E_n});*
- *(ix) $\alpha\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain;*
- *(x) si $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain, entonces $\mathscr{H} + \mathscr{G}$ también tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. *(ii)* y *(iii)* son consecuencia directa del Lema 1.7.4. Los restantes apartados se siguen de manera inmediata de la definición de la propiedad de Bourgain. Por ejemplo, veamos la prueba de *(vi)*. Fijamos un $C \in \Sigma$ tal que $A \subset C$ y $\mu^*(A) = \mu(C)$; entonces $\mu_A(A \cap E) = \mu(C \cap E)$ para cada $E \in \Sigma$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y $B \in \Sigma_A$ con $\mu_A(B) > 0$, y tomamos un $E \in \Sigma$ tal que $B = A \cap E$. Como $\mu(C \cap E) > 0$ y $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, existen $A_1, \dots, A_n \subset C \cap E$, $A_i \in \Sigma$ con medida positiva, tales que $\min_{1\leq i\leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \varepsilon$ para toda $h \in \mathscr{H}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, el conjunto $B_i := A \cap A_i \in \Sigma_A$ está contenido en B y cumple $\mu_A(B_i) = \mu(C \cap A_i) = \mu(A_i) > 0$. Además, se tiene $\min_{1\leq i\leq n} \operatorname{osc}(h|_{B_i}) \leq \varepsilon$ para toda $h \in \mathscr{H}$. Esto demuestra que $\mathscr{H}|_A$ tiene la propiedad de Bourgain (respecto de μ_A). $\square$

Gran parte del interés de este concepto se debe al siguiente resultado de Bourgain [Bou], véase [RS85, Theorem 11].

Teorema 2.2.3 (Bourgain). *Sean $\mathscr{H}$ una familia con la propiedad de Bourgain y $g \in \overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$. Entonces existe una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ que converge hacia g μ-a.e.*

Demostración. Como $g \in \overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$, existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en $\mathscr{H}$ de manera que $g \in \overline{U}^{\mathfrak{T}_p}$ para cada $U \in \mathscr{U}$. Dados $A \in \Sigma$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$\mathscr{H}(A,\varepsilon) := \{h \in \mathscr{H} : \operatorname{osc}(h|_A) \leq \varepsilon\}.$$

En primer lugar, observamos que *para cada $A \in \Sigma$ de medida positiva y cada $\varepsilon > 0$, existe $B \in \Sigma_A$ de medida positiva tal que $\mathscr{H}(B,\varepsilon) \in \mathscr{U}$*. En efecto, como $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, existen $B_1,\dots,B_n \in \Sigma_A$ de medida positiva tales que $\mathscr{H} = \bigcup_{i=1}^n \mathscr{H}(B_i,\varepsilon)$. Ahora, el hecho de que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en $\mathscr{H}$ asegura que $\mathscr{H}(B_i,\varepsilon) \in \mathscr{U}$ para algún $1 \leq i \leq n$.

Por el "principio de exhaustividad" (Lema 1.7.3), para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una familia contable $(A_{n,m})_m$ de elementos de Σ con medida positiva, disjuntos dos a dos, tal que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_m A_{n,m}) = 0$ y $\mathscr{H}(A_{n,m}, 1/n) \in \mathscr{U}$ para cada m. En particular, $B := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_m A_{n,m}$ satisface $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. Fijamos puntos $t_{n,m} \in A_{n,m}$ y definimos $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f_n := \sum_m g(t_{n,m})\chi_{A_{n,m}}.$$

Se afirma que

$$|f_n(t) - g(t)| \leq \frac{3}{n} \quad \text{para cada } t \in B \text{ y cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

En efecto, dados $t \in B$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $t \in A_{n,m}$. Como $g \in \overline{\mathscr{H}(A_{n,m}, 1/n)}^{\mathfrak{T}_p}$, podemos encontrar $g_n \in \mathscr{H}(A_{n,m}, 1/n)$ tal que $|g_n(t) - g(t)| \leq 1/n$ y $|g_n(t_{n,m}) - g(t_{n,m})| \leq 1/n$. El hecho de que $\operatorname{osc}(g_n|_{A_{n,m}}) \leq 1/n$ nos permite concluir

$$|f_n(t) - g(t)| = |g(t_{n,m}) - g(t)| \leq |g(t_{n,m}) - g_n(t_{n,m})| + |g_n(t_{n,m}) - g_n(t)| + |g_n(t) - g(t)| \leq \frac{3}{n},$$

y la desigualdad (2.9) queda demostrada.

Por otra parte, dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\bigcap_{k=1}^n \bigcap_{m=1}^n \mathscr{H}(A_{k,m}, 1/k)$ pertenece a $\mathscr{U}$, por lo que existe una $h_n \in \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{m=1}^n \mathscr{H}(A_{k,m}, 1/k)$ cumpliendo $|h_n(t_{k,m}) - g(t_{k,m})| \leq 1/n$ para todo $1 \leq k \leq n$ y $1 \leq m \leq n$. Para finalizar la prueba vamos a demostrar que

$$\lim_n h_n(t) = g(t) \quad \text{para cada } t \in B.$$

Dados $t \in B$ y $k \in \mathbb{N}$, la desigualdad (2.9) asegura que $|f_k(t) - g(t)| \leq 3/k$. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ de manera que $t \in A_{k,m}$. Por la elección de las h_n's, para cada $n \geq \max\{k, m\}$ se tiene

$$|h_n(t) - g(t)| \leq |h_n(t) - h_n(t_{k,m})| + |h_n(t_{k,m}) - g(t_{k,m})| + |g(t_{k,m}) - g(t)| \\ \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{n} + |f_k(t) - g(t)| \leq \frac{5}{k}.$$

Esto demuestra que $\lim_n h_n(t) = g(t)$ para cada $t \in B$ y la prueba ha finalizado. $\square$

Corolario 2.2.4. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$ un conjunto uniformemente integrable con la propiedad de Bourgain. Entonces la aplicación canónica*

$$I : (\mathscr{H}, \mathfrak{T}_p) \longrightarrow (L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$$

(que envía cada función a su clase de equivalencia) es continua.

Demostración. Basta comprobar que $I(\overline{\mathscr{F}}^{\mathfrak{T}_p}) \subset \overline{I(\mathscr{F})}^{\|\cdot\|_1}$ para cada $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$. Fijamos $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$ y $g \in \overline{\mathscr{F}}^{\mathfrak{T}_p}$. Como $\mathscr{F}$ tiene la propiedad de Bourgain, el Teorema 2.2.3 asegura la existencia de una sucesión (f_n) en $\mathscr{F}$ que converge hacia g μ-a.e. Además, (f_n) es uniformemente integrable, luego podemos aplicar el teorema de convergencia de Vitali (véase e.g. [Fre01, 246J]) para deducir que $\lim_n \|f_n - g\|_1 = 0$. Se sigue que $I(g) \in \overline{I(\mathscr{F})}^{\|\cdot\|_1}$, como se quería demostrar. $\square$

Dado que toda familia con la propiedad de Bourgain es estable en el sentido de Talagrand (Proposición 2.2.5), el anterior corolario es realmente un caso particular de [Tal84, 9-5-2] (véase la Sección 1.9). El lector puede encontrar en [Ver96] un completo estudio sobre la continuidad de la aplicación canónica $I : (\mathscr{H}, \mathfrak{T}_p) \longrightarrow (L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ para ciertas familias $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$.

Proposición 2.2.5. *Toda familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ con la propiedad de Bourgain es estable.*

Demostración. Fijamos $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y números reales $\alpha < \beta$. Como $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, existen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_A$ de medida positiva tales que para cualquier $h \in \mathscr{H}$ se tiene

$$\min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \beta - \alpha.$$

En particular, el conjunto $F = A_1 \times \ldots \times A_n \times A_1 \times \ldots \times A_n \in \otimes_{2n}\Sigma$ no corta a

$$D_{n,n}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta) = \bigcup_{h \in \mathscr{H}} \{(t_i)_{i=1}^{2n} \in A^{2n} : \ h(t_i) < \alpha \text{ para cada } 1 \leq i \leq n, \\ h(t_i) > \beta \text{ para cada } n+1 \leq i \leq 2n\}.$$

Como $\mu_{2n}(F) = (\prod_{i=1}^n \mu(A_i))^2 > 0$, se sigue que

$$\mu_{2n}^*(D_{n,n}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta)) \leq \mu_{2n}(A^{2n} \setminus F) < \mu(A)^{2n}.$$

Por tanto, $\mathscr{H}$ es estable, como se quería demostrar. $\square$

El recíproco de la Proposición 2.2.5 no es cierto en general, como se muestra en [Tal84, 9-5-4]. A continuación incluimos otro contraejemplo, que volveremos a utilizar en la Sección 2.3. Desde aquí hasta el final del apartado suponemos que $\mu(\Omega)=1$.

Ejemplo 2.2.6. *Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión independiente en Σ tal que*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)(1-\mu(E_n))=+\infty$;

(ii) para algún $k\in\mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)^k$ es convergente.

Entonces la familia $\{\chi_{E_n}:n\in\mathbb{N}\}$ es estable, pero no tiene la propiedad de Bourgain.

Antes de pasar a la prueba del Ejemplo 2.2.6, observamos que, para espacios de probabilidad sin átomos, siempre existen sucesiones independientes cumpliendo las anteriores propiedades *(i)* y *(ii)*: basta aplicar el siguiente lema (que es bien conocido, véase e.g. [Fre01, 272X(a)]) a la sucesión $a_n=1/n$. Para demostrarlo necesitamos introducir notación adicional, que será utilizada también en lo sucesivo. Dado un conjunto finito $\mathscr{D}=\{D_1,\dots,D_m\}\subset\Sigma$, denotamos por $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ la familia de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^m F_i$, donde $F_i\in\{D_i,\Omega\setminus D_i\}$ para cada $1\leq i\leq m$. Nótese que $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ es una familia finita de elementos de Σ, disjuntos dos a dos, con unión Ω.

Lema 2.2.7. *Supongamos que μ no tiene átomos. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$. Entonces existe una sucesión independiente $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ en Σ tal que $\mu(E_n)=a_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Vamos a construir, por inducción en n, una sucesión $E_1,E_2,\dots$ en Σ de manera que $\mu(E_n)=a_n$ y la familia $(E_i)_{i=1}^n$ es independiente para cada $n\in\mathbb{N}$. El primer paso es sencillo: como μ no tiene átomos, podemos encontrar un $E_1\in\Sigma$ con $\mu(E_1)=a_1$, véase e.g. [Fre01, 215D].

Supongamos ahora que $n\geq 2$ y que ya hemos construido una familia independiente $(E_i)_{i=1}^{n-1}$ en Σ tal que $\mu(E_i)=a_i$ para cada $1\leq i\leq n-1$. Dado $A\in\mathscr{A}(\{E_1,\dots,E_{n-1}\})$, puesto que μ_A no tiene átomos, podemos encontrar un $E_n^A\in\Sigma_A$ tal que $\mu(E_n^A)=\mu(A)a_n$. Observamos que el conjunto
$$E_n=\bigcup\{E_n^A:\ A\in\mathscr{A}(\{E_1,\dots,E_{n-1}\})\in\Sigma$$
verifica $\mu(E_n)=a_n$. Más todavía, la familia $(E_i)_{i=1}^n$ es independiente. En efecto, para cualquier conjunto $\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n-1\}$ tenemos
$$\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)\cap E_n=\bigcup\Big\{E_n^A:\ A\in\mathscr{A}(\{E_1,\dots,E_{n-1}\}),\ A\subset\bigcap_{i\in I}E_i\Big\}$$
y por tanto
$$\mu\Big(\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)\cap E_n\Big)=\Big(\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}(\{E_1,\dots,E_{n-1}\})\\ A\subset\bigcap_{i\in I}E_i}}\mu(A)\Big)a_n=\mu\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)a_n=\Big(\prod_{i\in I}a_i\Big)a_n.$$
Esto completa la demostración. □

El Ejemplo 2.2.6 es consecuencia inmediata de los dos siguientes lemas. El primero se debe a Fremlin (comunicación personal), mientras que el segundo puede encontrarse en [FM94, 3B].

Lema 2.2.8 (Fremlin). *Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión independiente en Σ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)(1-\mu(E_n)) = +\infty.$$

Entonces la familia $\{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain.

Demostración. Como $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es independiente, lo mismo ocurre con $(\Omega \setminus E_n)_{n=1}^{\infty}$ (véase e.g. [Fre01, 272F]) y, por tanto, $(E_n \times (\Omega \setminus E_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión independiente en el espacio de probabilidad producto $(\Omega \times \Omega, \Sigma \otimes \Sigma, \mu \times \mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \mu)\big((E_n \times (\Omega \setminus E_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)(1-\mu(E_n)) = +\infty.$$

Fijamos $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ con medida positiva. Se afirma que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(A_i \times A_i) \cap (E_n \times (\Omega \setminus E_n)) \neq \emptyset \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m.$$

Para verlo razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$, donde

$$P_i := \{n \in \mathbb{N} : \ (A_i \times A_i) \cap (E_n \times (\Omega \setminus E_n)) = \emptyset\} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m.$$

Entonces existe un $1 \leq i \leq m$ tal que $\sum_{n \in P_i} (\mu \times \mu)\big((E_n \times (\Omega \setminus E_n)\big) = +\infty$. Escribimos $P_i = \{n_1 < n_2 < \dots\}$. Por el lema de Borel-Cantelli (véase e.g. [Fre01, 273K]), tenemos

$$(\mu \times \mu)\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq k} \big(E_{n_m} \times (\Omega \setminus E_{n_m})\big)\Big) = 1.$$

Como $(\mu \times \mu)(A_i \times A_i) > 0$, se deduce

$$(A_i \times A_i) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq k} \big(E_{n_m} \times (\Omega \setminus E_{n_m})\big)\Big) \neq \emptyset,$$

lo que contradice la definición de P_i. Por tanto, existe algún $n \in \mathbb{N}$ verificando $\operatorname{osc}(\chi_{E_n}|_{A_i}) = 1$ para cada $1 \leq i \leq m$. Se sigue que $\{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain, como se quería demostrar. □

Lema 2.2.9. *Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Σ tal que, para algún $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^k$ es convergente. Entonces la familia $\{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es estable.*

Demostración. Escribimos $\mathscr{H} = \{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Fijamos $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y números reales $\alpha < \beta$. Claramente, $D_{1,1}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta) = \emptyset$ si $\alpha < 0$ ó $\beta > 1$, luego en estos casos se tiene

$$\mu_2(D_{1,1}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta)) = 0 < \mu(A)^2.$$

Supongamos ahora que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^k$ converge, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\sum_{n>N} \mu(E_n)^k < \mu(A)^k$ y $\mu(E_n) \leq \mu(A)$ para cada $n > N$. Por tanto, tenemos

$$\sum_{n>N} \mu(E_n)^m < \mu(A)^m \quad \text{para cada } m \geq k. \tag{2.10}$$

Definimos $J = \{1 \leq n \leq N : \mu(A \cap E_n) > 0\}$. Evidentemente, $\mu(A \setminus E_n)/\mu(A) < 1$ para cada $n \in J$, luego existe un $m \geq k$ tal que

$$\sum_{n\in J} \Big(\frac{\mu(A \setminus E_n)}{\mu(A)}\Big)^m < 1,$$

y así

$$\sum_{n\in J} \mu(A \setminus E_n)^m < \mu(A)^m. \tag{2.11}$$

Por otra parte, la desigualdad (2.10) asegura que

$$\sum_{n\in \mathbb{N}\setminus J} \mu(A \cap E_n)^m < \mu(A)^m. \tag{2.12}$$

Es claro que el conjunto

$$F = \Big(A^m \setminus \bigcup_{n\in J} (\Omega \setminus E_n)^m\Big) \times \Big(A^m \setminus \bigcup_{n\in \mathbb{N}\setminus J} E_n^m\Big) \in \otimes_{2m}\Sigma$$

no corta a

$$D_{m,m}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(t_i)_{i=1}^{2m} \in A^{2m} : \ t_i \in \Omega \setminus E_n \text{ para cada } 1 \leq i \leq m,$$
$$t_i \in E_n \text{ para cada } m+1 \leq i \leq 2m\} \in \otimes_{2m}\Sigma.$$

Por otra parte, la desigualdad (2.11) conduce a

$$\mu_m\Big(A^m \setminus \bigcup_{n\in J} (\Omega \setminus E_n)^m\Big) = \mu_m(A^m) - \mu_m\Big(A^m \cap \Big(\bigcup_{n\in J} (\Omega \setminus E_n)^m\Big)\Big)$$
$$= \mu(A)^m - \mu_m\Big(\bigcup_{n\in J} (A \setminus E_n)^m\Big) \geq \mu(A)^m - \sum_{n\in J} \mu(A \setminus E_n)^m > 0.$$

De manera semejante, podemos utilizar (2.12) para deducir que

$$\mu_m\Big(A^m \setminus \Big(\bigcup_{n\in \mathbb{N}\setminus J} E_n^m\Big)\Big) > 0.$$

De la identificación canónica entre μ_{2m} y $\mu_m \times \mu_m$ se sigue que $\mu_{2m}(F) > 0$. Por tanto

$$\mu_{2m}(D_{m,m}(\mathscr{H}, A, \alpha, \beta)) < \mu(A)^{2m}.$$

Esto prueba que $\mathscr{H} = \{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es estable. $\square$

2.2.2. Familias de oscilación pequeña

La siguiente noción fue introducida en [GGMS87, Chapter IV], identificando funciones que coinciden en casi todo punto y considerando oscilaciones “esenciales”.

Definición 2.2.10. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia uniformemente acotada. Se dice que $\mathscr{H}$ es una familia de oscilación pequeña si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que*

$$\sum_{A\in\Gamma} \mu(A)\,\mathrm{osc}(h|_A) \leq \varepsilon \quad \textit{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Este apartado está dedicado a mostrar que una familia uniformemente acotada $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ es de oscilación pequeña si y sólo si tiene la propiedad de Bourgain (Corolario 2.2.12). Dicho resultado se sigue inmediatamente del siguiente lema, que esencialmente se debe a Talagrand (véase la prueba de [GGMS87, Proposition IV.8] o, alternativamente, [CR05, Lemma 2.3]).

Lema 2.2.11 (Talagrand). *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia de funciones. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain;*

(ii) *para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que*

$$\mu\Big(\bigcup\{A\in\Gamma:\ \mathrm{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\Big) < \delta \quad \textit{para cada } h \in \mathscr{H}.$$

Demostración. La implicación *(ii)⇒(i)* es sencilla. Para verla, fijamos $\varepsilon > 0$ y un $E \in \Sigma$ de medida positiva. Por hipótesis existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\Big(\bigcup\{A\in\Gamma:\ \mathrm{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\Big) < \frac{\mu(E)}{2} \quad \text{para cada } h \in \mathscr{H}.$$

De esta desigualdad se deduce que, para cualquier $h \in \mathscr{H}$, siempre podemos encontrar un $A \in \Gamma$ con $\mu(A\cap E) > 0$ para el que $\mathrm{osc}(h|_A) \leq \varepsilon$ y, por tanto, $\mathrm{osc}(h|_{A\cap E}) \leq \varepsilon$. Esto prueba *(ii)⇒(i)*.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. Fijamos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Evidentemente, la familia

$$K = \Big\{g \in \mathbb{R}^\Omega:\ g \text{ es medible},\ 0 \leq g \leq 1\ \mu\text{-a.e},\ \int_\Omega g\, d\mu \geq \delta\Big\}.$$

es un subconjunto uniformemente integrable de $\mathscr{L}^1(\mu)$. Por tanto, la caracterización de Dunford de la compacidad débil en $L^1(\mu)$ (Teorema 1.2.2) nos permite deducir que su imagen canónica en $L^1(\mu)$, denotada por K^μ, es relativamente débilmente compacta. No es complicado ver que K^μ es $\|\cdot\|_1$-cerrado y, dado que K^μ es convexo, concluimos que K^μ es débilmente compacto.

Fijamos $g \in K$. Como $A^g := \{t \in \Omega : g(t) > 0\}$ tiene medida positiva y $\mathscr{H}$ verifica la propiedad de Bourgain, existen conjuntos medibles $A^g_1, \dots, A^g_{n(g)} \subset A^g$, con medida positiva, tales que

$$\min_{1\leq i\leq n(g)} \mathrm{osc}(h|_{A^g_i}) \leq \varepsilon \quad \text{para cada } h \in \mathscr{H}. \tag{2.13}$$

Claramente, la imagen canónica en $L^1(\mu)$ del conjunto

$$V(g) := \bigcap_{i=1}^{n(g)} \Big\{ f \in \mathscr{L}^1(\mu) : \int_{A_i^g} f \, d\mu > 0 \Big\}$$

es un entorno abierto, en la topología débil, de la clase de equivalencia de g. Por la compacidad débil de K^μ, existen $g_1, \dots, g_k \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^k V(g_j)$.

Escribimos $\mathscr{D} = \{A_i^{g_j} : 1 \le j \le k, \ 1 \le i \le n(g_j)\}$ y consideramos la partición finita Γ de Ω en Σ formada por los elementos no vacíos de $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ (véase la página 82 para la definición). Se afirma que Γ satisface la condición requerida. En efecto, tomamos cualquier $h \in \mathscr{H}$ y definimos

$$C = \bigcup \{A \in \Gamma : \ \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}.$$

Vamos a ver que χ_C no pertenece a K por reducción al absurdo. Si $\chi_C \in K$, entonces $\chi_C \in V(g_j)$ para algún $1 \le j \le k$. Esto significa que, para cualquier $1 \le i \le n(g_j)$, tenemos $\mu(C \cap A_i^{g_j}) > 0$ y por tanto existe un $A_i \in \Gamma$ tal que $A_i \cap A_i^{g_j} \neq \emptyset$ y $\operatorname{osc}(h|_{A_i}) > \varepsilon$. Como A_i corta a $A_i^{g_j}$, de la definición de Γ se sigue que $A_i \subset A_i^{g_j}$. Por lo tanto $\operatorname{osc}(h|_{A_i^{g_j}}) > \varepsilon$ para cada $1 \le i \le n(g_j)$, lo que contradice (2.13). Esto demuestra que $\chi_C \notin K$, es decir, $\mu(C) < \delta$. La prueba está completa. $\square$

Corolario 2.2.12 (Talagrand). *Una familia uniformemente acotada $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si y sólo si es una familia de oscilación pequeña.*

Demostración. Fijamos $M > 0$ tal que $|h(t)| \le M$ para cada $h \in \mathscr{H}$ y cada $t \in \Omega$. Supongamos que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. Dado $\varepsilon > 0$, el Lema 2.2.11 asegura la existencia de una partición finita Γ de Ω en Σ tal que, para cualquier $h \in \mathscr{H}$, se tiene $\mu(\bigcup\{A \in \Gamma : \ \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}) \le \varepsilon$ y por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{A \in \Gamma} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) &= \sum_{\substack{A \in \Gamma \\ \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon}} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) + \sum_{\substack{A \in \Gamma \\ \operatorname{osc}(h|_A) \le \varepsilon}} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) \\ &\le 2M\varepsilon + \varepsilon\mu(\Omega) = (2M + \mu(\Omega))\varepsilon.\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\mathscr{H}$ es una familia de oscilación pequeña.

Recíprocamente, si $\mathscr{H}$ es una familia de oscilación pequeña, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que, para cualquier $h \in \mathscr{H}$, se cumple $\sum_{A \in \Gamma} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) < \varepsilon\delta$ y así

$$\mu\Big(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\Big)\varepsilon \le \sum_{A \in \Gamma} \mu(A) \operatorname{osc}(h|_A) < \varepsilon\delta,$$

de donde $\mu(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}) < \delta$. El Lema 2.2.11 nos dice ahora que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, como se quería demostrar. $\square$

2.3. La integral de Birkhoff y la propiedad de Bourgain

Como se ha puesto de manifiesto en la Sección 1.9, una buena forma de estudiar la integrabilidad Pettis de una función vectorial $f:\Omega \longrightarrow X$ consiste en examinar la familia de funciones reales

$$Z_f = \{x^* \circ f: \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

En esta sección hacemos lo mismo con la *integral de Birkhoff*, mostrando la estrecha relación existente entre esta noción y la *propiedad de Bourgain* (estudiada en la Sección 2.2).

En el Apartado 2.3.1 probamos que una función *acotada* $f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff si y sólo si Z_f tiene la propiedad de Bourgain. En general, *una función no necesariamente acotada $f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff si y sólo si Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain*. Como aplicación deducimos que el rango de la integral indefinida de una función integrable Birkhoff siempre es relativamente compacto en norma.

El Apartado 2.3.2 está dedicado a analizar cuándo, en las caracterizaciones anteriores, podemos reemplazar Z_f por la familia

$$Z_{f,B} = \{x^* \circ f : x^* \in B\} \subset \mathbb{R}^\Omega$$

para un conjunto normante arbitrario $B \subset B_{X^*}$. Mostramos que esto *no* es siempre posible, aunque sí lo es, por ejemplo, cuando f es acotada, B es convexo ó (B_{X^*}, w^*) es separable. Esta cuestión se puede reformular del siguiente modo: *dada una familia puntualmente acotada $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ con la propiedad de Bourgain, ¿tiene su envolutura convexa* $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ *la propiedad de Bourgain?*

2.3.1. Caracterización de la integrabilidad Birkhoff

Fremlin [Freb] demostró que, para cualquier función integrable Birkhoff $f:\Omega \longrightarrow X$, la familia Z_f es estable. De hecho, Z_f tiene incluso la propiedad de Bourgain, como mostramos a continuación. Naturalmente, la prueba es semejante a la de la medibilidad de las funciones reales integrables Birkhoff (véase la demostración del Teorema 2.1.12).

Proposición 2.3.1 ([CR05]). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff. Entonces Z_f tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$ y $A \in \Sigma$ con medida positiva. Como f es integrable Birkhoff, existe una partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en Σ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera elecciones $t_i, t_i' \in A_i$, se tiene

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\big((x^*\circ f)(t_i) - (x^*\circ f)(t_i')\big)\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\big(f(t_i) - f(t_i')\big)\Big\| \leq \frac{\varepsilon\mu(A)}{2} \tag{2.14}$$

para cada $x^* \in B_{X^*}$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\sum_{i=1}^{n} \mu(A\cap A_i) > \mu(A)/2$, y definimos $I = \{1 \leq i \leq n : \mu(A \cap A_i) > 0\}$. Vamos a demostrar, por reducción al absurdo, que para cada $x^* \in B_{X^*}$ se cumple

$$\min_{i\in I}\ \mathrm{osc}(x^* \circ f|_{A\cap A_i}) \leq \varepsilon.$$

En efecto, si para algún $x^* \in B_{X^*}$ no se verifica la desigualdad anterior, entonces para cada $i \in I$ podemos tomar puntos $t_i, t_i' \in A \cap A_i$ tales que $(x^* \circ f)(t_i) - (x^* \circ f)(t_i') > \varepsilon$. Por tanto

$$\frac{\varepsilon\mu(A)}{2} < \sum_{i\in I} \mu(A \cap A_i)\big((x^* \circ f)(t_i) - (x^* \circ f)(t_i')\big) \leq \sum_{i\in I} \mu(A_i)\big((x^* \circ f)(t_i) - (x^* \circ f)(t_i')\big),$$

lo que contradice la desigualdad (2.14) y termina la prueba. $\square$

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general. En efecto, del Lema 1.7.4 se sigue fácilmente que Z_f *tiene la propiedad de Bourgain para cada función fuertemente medible* $f : \Omega \longrightarrow X$. Por otro lado, existen funciones fuertemente medibles que no son integrables Birkhoff (es decir, integrables Pettis, véase el Corolario 2.1.16). Un ejemplo sencillo lo proporciona la función $f : [0,1] \longrightarrow c_0$ definida por $f = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n/\lambda(E_n))\chi_{E_n}$, donde $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una partición de $[0,1]$ formada por conjuntos medibles Lebesgue con medida positiva.

Sin embargo, sí que podemos establecer la equivalencia en el caso de funciones *acotadas*, gracias a la caracterización (dada en el Apartado 2.2.2) de la propiedad de Bourgain en términos de familias de oscilación pequeña.

Teorema 2.3.2 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;
(ii) Z_f tiene la propiedad de Bourgain;
(iii) existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain.

Demostración. En vista de la Proposición 2.3.1, sólo queda demostrar *(iii)⇒(i)*. Nótese que, al ser acotada, f es sumable respecto de cualquier partición contable de Ω en Σ. Por otra parte, como $Z_{f,B} = \{x^* \circ f : x^* \in B\}$ es uniformemente acotada y tiene la propiedad de Bourgain, el Corolario 2.2.12 nos asegura que $Z_{f,B}$ es una familia de oscilación pequeña. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición finita $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ de Ω en Σ tal que $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, \operatorname{osc}(x^* \circ f|_{A_i}) \leq \varepsilon$ para cada $x^* \in B$. Entonces, para cualesquiera elecciones $t_i, t_i' \in A_i$, tenemos

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) f(t_i')\Big\| = \sup_{x^*\in B} \Big|x^*\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\big(f(t_i) - f(t_i')\big)\Big)\Big|$$
$$\leq \sup_{x^*\in B} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\big|(x^* \circ f)(t_i) - (x^* \circ f)(t_i')\big| \leq \varepsilon.$$

Por tanto, $\operatorname{diam}(J(f,\Gamma)) \leq \varepsilon$. Esto demuestra que f es integrable Birkhoff. $\square$

Como hemos comentado anteriormente, Riddle y Saab [RS85] probaron que una función acotada $f : \Omega \longrightarrow X^*$ es integrable Pettis si la familia $\{\langle f, x\rangle : x \in B_X\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain. El siguiente caso particular del Teorema 2.3.2 mejora dicho resultado.

Corolario 2.3.3 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X^*$ una función acotada. Entonces f es integrable Birkhoff si y sólo si la familia $\{\langle f, x\rangle : x \in B_X\}$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Pasamos ahora a analizar el caso de funciones *no necesariamente acotadas*. En primer lugar, para reducirnos al "caso acotado" vamos a emplear el siguiente lema.

Lema 2.3.4 ([CR05]). *Sean $B_1, \dots, B_n \subset X$ conjuntos para los que existe una constante $M > 0$ tal que*
$$\min_{1\leq i\leq n} \operatorname{osc}(x^*|_{B_i}) \leq M \quad \text{para cada } x^* \in B_{X^*}.$$
Entonces existe un $1 \leq j \leq n$ tal que B_j es acotado.

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq n$, definimos $C_i := \{x^* \in B_{X^*} : \operatorname{osc}(x^*|_{B_i}) \leq M\}$. Obsérvese que cada C_i es cerrado en la topología de la norma. Como $\{B_{X^*} \setminus C_i : 1 \leq i \leq n\}$ es una familia de subconjuntos relativamente abiertos de B_{X^*} con intersección vacía, existe un $1 \leq j \leq n$ tal que $B_{X^*} \setminus C_j$ no es denso en B_{X^*}. Por tanto, $G := \{x^* \in X^* : \|x^*\| < 1\} \not\subset \overline{B_{X^*} \setminus C_j}^{\|\cdot\|}$, luego existen $x_0^* \in G$ y $\delta > 0$ tales que
$$\{x^* \in X^* : \|x_0^* - x^*\| \leq \delta\} \subset G \cap C_j.$$
Fijamos $x_0 \in B_j$. Dado $x^* \in B_{X^*}$, el vector $x_0^* + \delta x^*$ pertenece a C_j y, por tanto, para cada $x \in B_j$ se tiene
$$\begin{aligned} |\delta x^*(x)| &\leq |(x_0^* + \delta x^*)(x) - (x_0^* + \delta x^*)(x_0)| + |x_0^*(x) - x_0^*(x_0)| + |\delta x^*(x_0)| \\ &\leq \operatorname{osc}((x_0^* + \delta x^*)|_{B_j}) + \operatorname{osc}(x_0^*|_{B_j}) + \delta\|x_0\| \leq 2M + \delta\|x_0\|. \end{aligned}$$
Así, $\|x\| \leq (2M)/\delta + \|x_0\|$ para cada $x \in B_j$ y, en particular, B_j es acotado. □

Observación 2.3.5. La conclusión del Lema 2.3.4 es válida incluso para una sucesión infinita $B_1, B_2, \dots$ de subconjuntos de X. Para comprobarlo, basta razonar del mismo modo observando que, en este caso, la existencia de "un $j \in \mathbb{N}$ tal que $B_{X^*} \setminus C_j$ no es denso en B_{X^*}" se puede deducir del Teorema de la Categoría de Baire.

Corolario 2.3.6 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que Z_f tiene la propiedad de Bourgain. Entonces existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$.*

Demostración. Por el "principio de exhaustividad" (Lema 1.7.3), basta demostrar que *para cada $A \in \Sigma$ de medida positiva existe un $E \subset \Sigma_A$ de medida positiva tal que $f|_E$ es acotada*. Vamos a probar esto: como Z_f tiene la propiedad de Bourgain, existen $E_1, \dots, E_n \in \Sigma_A$ con medida positiva tales que
$$\min_{1\leq i\leq n} \operatorname{osc}(x^*|_{B_i}) = \min_{1\leq i\leq n} \operatorname{osc}(x^* \circ f|_{E_i}) \leq 1 \quad \text{para cada } x^* \in B_{X^*},$$
donde escribimos $B_i := f(E_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por el Lema 2.3.4, existe un $1 \leq j \leq n$ tal que $B_j = f(E_j)$ es acotado. Esto completa la demostración. □

Estamos ya en condiciones de demostrar el principal resultado de este apartado.

Teorema 2.3.7 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;

(ii) Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Demostración. Supongamos que f es integrable Birkhoff. Entonces f es integrable Pettis (Corolario 2.1.13) y, por el Corolario 1.9.3, Z_f es un subconjunto uniformemente integrable de $\mathscr{L}^1(\mu)$. Por otro lado, ya sabemos que la integrabilidad Birkhoff de f asegura que Z_f tiene la propiedad de Bourgain (Proposición 2.3.1). La implicación *(i)⇒(ii)* queda así establecida.

Recíprocamente, probamos *(ii)⇒(i)*. En vista del Corolario 2.2.4, la aplicación canónica

$$I : (Z_f, \mathfrak{T}_p) \longrightarrow (L^1(\mu), \|\cdot\|_1) \tag{2.15}$$

(que envía cada función a su clase de equivalencia) es continua. Por tanto, podemos aplicar la Proposición 1.9.2 para deducir que f *es integrable Pettis*. Por otro lado, como Z_f tiene la propiedad de Bourgain, existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$ (Corolario 2.3.6). Se afirma que $f|_{A_n}$ *es integrable Birkhoff para cada n*. En efecto, esto es obvio si $\mu(A_n) = 0$; por otra parte, cuando A_n tiene medida positiva, sabemos que la restricción $f|_{A_n}$ es acotada y que $Z_{f|_{A_n}}$ tiene la propiedad de Bourgain, por lo que podemos aplicar el Teorema 2.3.2 para concluir que $f|_{A_n}$ es integrable Birkhoff. Finalmente, el Lema 2.1.15 garantiza la integrabilidad Birkhoff de f. □

En [Bir35, Theorem 18] se demostró que toda función integrable Birkhoff es el límite, en la seminorma de Pettis, de una sucesión de funciones simples. Como ya sabemos (Teorema 1.8.13), esto equivale a decir que *el rango de la integral indefinida de cualquier función integrable Birkhoff es relativamente compacto en norma*. Nosotros ahora podemos deducir este resultado combinando la Proposición 1.9.2 y la continuidad de la aplicación I dada en (2.15).

Corolario 2.3.8 ([Bir35]). *Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff, entonces $\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma.*

El Corolario 2.3.8 mejora un resultado de [KSS$^+$02] relativo a la separabilidad del rango de la integral indefinida de las funciones integrables Riemann-Lebesgue, que se definen como sigue.

Definición 2.3.9 ([KT00, KSS$^+$02]). *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice integrable Riemann-Lebesgue si existe $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que, para cada partición contable Γ' de Ω en Σ más fina que Γ y cada elección T' in Γ', la serie $S(f, \Gamma', T')$ es absolutamente convergente y $\|S(f, \Gamma', T') - x\| \leq \varepsilon$.*

En virtud de la Proposición 2.1.4, toda función integrable Riemann-Lebesgue es integrable Birkhoff, y ambas nociones coinciden para funciones acotadas.

Corolario 2.3.10 ([CR05]). *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Riemann-Lebesgue;
(ii) Z_f tiene la propiedad de Bourgain y existe $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que $\|f\| \leq g$ μ-a.e.

Demostración. Veamos *(i)⇒(ii)*. Como f es integrable Birkhoff, la familia Z_f tiene la propiedad de Bourgain (Proposición 2.3.1). Fijamos ahora una partición contable $\Gamma = (A_n)$ de Ω en Σ tal que

$$\|S(f,\Gamma,T) - S(f,\Gamma,T')\| \leq 1$$

para cualquiera dos elecciones T y T' en Γ, siendo las series absolutamente convergentes. En particular, $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$. Es fácil ver que la serie $\sum_{\mu(A_n)>0} \|f(A_n)\|\mu(A_n)$ es convergente y, por tanto, la función definida por $g = \sum_{\mu(A_n)>0} \|f(A_n)\|\chi_{A_n}$ es integrable. Además, se tiene $\|f\| \leq g$ μ-a.e.

Recíprocamente, *(ii)⇒(i)*. Como $\|f\| \leq g$ μ-a.e. y Z_f está formada por funciones medibles (porque tiene la propiedad de Bourgain), Z_f es uniformemente integrable y, por tanto, f es integrable Birkhoff (Teorema 2.3.7). Por otra parte, la desigualdad $\|f\| \leq g$ μ-a.e. se puede aplicar nuevamente para encontrar una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$ y la serie $\sum_{\mu(A_n)>0} \|f(A_n)\|\mu(A_n)$ es convergente. Claramente, esto implica que $S(f,\Gamma',T')$ es absolutamente convergente para cada partición contable Γ' de Ω en Σ más fina que Γ y cada elección T' in Γ'. Finalmente, podemos utilizar la Proposición 2.1.4 para deducir que f es integrable Riemann-Lebesgue. □

Talagrand [Tal87] caracterizó las funciones $f:\Omega \longrightarrow X$ para las que Z_f es *estable* y existe $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ cumpliendo $\|f\| \leq g$ μ-a.e. como aquéllas que satisfacen la llamada *ley de los grandes números*: existe $\lim_n (1/n)\sum_{i=1}^n f(t_i)$ para casi todo $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$, donde $\Omega^{\mathbb{N}}$ se considera equipado con la probabilidad producto (suponiendo que $\mu(\Omega) = 1$). Tales funciones se conocen como *funciones integrables Talagrand* y han sido ampliamente estudiadas, véase [FM94, Fre95, Freb, HJ85, Mus94, Tal87]. Por el Teorema 1.9.4, toda función integrable Talagrand es integrable Pettis.

Corolario 2.3.11. *Toda función integrable Riemann-Lebesgue $f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable Talagrand.*

Demostración. Basta combinar el Corolario 2.3.10 y la Proposición 2.2.5. □

2.3.2. La propiedad de Bourgain y envolturas convexas

En vista de las caracterizaciones de la integrabilidad Birkhoff del apartado anterior, la siguiente pregunta surge de manera natural.

Pregunta 1. *Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función para la que existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que la familia $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain. ¿Es f integrable Birkhoff?*

El propósito de este apartado es investigar esta cuestión, que, como vamos a explicar más adelante, puede reformularse del siguiente modo.

Pregunta 2. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ una familia puntualmente acotada con la propiedad de Bourgain. ¿Tiene su envoltura convexa* $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ *la propiedad de Bourgain?*

Ambas preguntas tienen, en general, respuesta negativa (Ejemplos 2.3.20 y 2.3.21). Por otra parte, ya hemos visto que la Pregunta 1 tiene solución afirmativa para funciones acotadas (Teorema 2.3.2). Del mismo modo, la Pregunta 2 puede responderse afirmativamente para familias uniformemente acotadas:

Teorema 2.3.12. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ una familia uniformemente acotada con la propiedad de Bourgain. Entonces* $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ *tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Por el Corolario 2.2.12, $\mathscr{H}$ es una familia de oscilación pequeña. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que $\sum_{A\in\Gamma} \mu(A)\, \mathrm{osc}(h|_A) \leq \varepsilon$ para toda $h \in \mathscr{H}$. Tomamos $g \in \mathrm{co}(\mathscr{H})$ y escribimos $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$, donde $h_i \in \mathscr{H}$, $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Entonces

$$\sum_{A\in\Gamma} \mu(A)\, \mathrm{osc}(g|_A) \leq \sum_{A\in\Gamma} \mu(A) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathrm{osc}(h_i|_A)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{A\in\Sigma} \mu(A)\, \mathrm{osc}(h_i|_A)\Big) \leq \varepsilon.$$

Por tanto, la familia (uniformemente acotada) $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ también es de oscilación pequeña. El Corolario 2.2.12 nos dice que $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ tiene la propiedad de Bourgain, como se quería demostrar. □

Pasamos ahora a analizar la equivalencia entre las dos preguntas anteriores. En este sentido, la Proposición 2.3.14 muestra que *una respuesta afirmativa a la Pregunta 2 nos aseguraría que la Pregunta 1 también tiene solución positiva*. Para la prueba necesitamos la siguiente observación elemental.

Lema 2.3.13. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ una familia. Entonces* $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ *tiene la propiedad de Bourgain si y sólo si* $\mathrm{aco}(\mathscr{H})$ *la tiene.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ tiene la propiedad de Bourgain. Fijamos $h \in \mathscr{H}$. Un sencillo cálculo nos permite ver que

$$\mathrm{aco}(\mathscr{H}) \subset \mathrm{co}(\mathscr{H}) - \mathrm{co}(\mathscr{H}) + \{\alpha h :\ \alpha \in [-1,1]\}.$$

Como $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, lo mismo ocurre con la familia $\{\alpha h : \alpha \in [-1,1]\}$ y, por tanto, $\mathrm{aco}(\mathscr{H})$ tiene la propiedad de Bourgain. □

Proposición 2.3.14 ([Rodb]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;

(ii) existe un conjunto normante y convexo $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain;

(iii) *existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y $\mathrm{co}(Z_{f,B})$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Dado un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$, es claro que $\mathrm{co}(B)$ y $\mathrm{aco}(B)$ son también normantes y cumplen las igualdades $\mathrm{co}(Z_{f,B}) = Z_{f,\mathrm{co}(B)}$ y $\mathrm{aco}(Z_{f,B}) = Z_{f,\mathrm{aco}(B)}$.

En virtud del Teorema 2.3.7, sólo tenemos que demostrar que la condición *(iii)* implica que Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain. Por un lado, es claro que $\mathrm{aco}(Z_{f,B})$ es uniformemente integrable. Por otro, como B es normante, el teorema de separación de Hahn-Banach asegura que $\mathrm{aco}(B)$ es w^*-denso in B_{X^*} y, por tanto, se tiene

$$\overline{\mathrm{aco}(Z_{f,B})}^{\mathfrak{T}_p} = Z_f. \tag{2.16}$$

Como $\mathrm{co}(Z_{f,B})$ tiene la propiedad de Bourgain, lo mismo ocurre con $\mathrm{aco}(Z_{f,B})$ (Lema 2.3.13). El hecho de que la propiedad de Bourgain se conserva al tomar $\mathfrak{T}_p$-clausuras nos permite deducir que Z_f *tiene la propiedad de Bourgain*. Mas todavía, cada elemento de Z_f es el límite en casi todo punto de una sucesión en $\mathrm{aco}(Z_{f,B})$ (por el Teorema 2.2.3). Por tanto, podemos utilizar el teorema de convergencia de Vitali (véase e.g. [Fre01, 246J]) para inferir que Z_f *es uniformemente integrable*. Esto completa la demostración. □

Corolario 2.3.15 ([CR05]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X^*$ una función. Entonces f es integrable Birkhoff si y sólo si la familia $\{\langle x, f\rangle : x \in B_X\}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.*

Por otro lado, *la Pregunta 2 tendría solución afirmativa si lo mismo ocurriese con la Pregunta 1*, como consecuencia del siguiente lema y la Proposición 2.3.1.

Lema 2.3.16 ([Rodb]). *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia puntualmente acotada de funciones medibles. Entonces existen:*

(i) *una sucesión disjunta (A_n) en Σ con $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$,*
(ii) *una sucesión (X_n) de espacios de Banach,*
(iii) *una sucesión de funciones $f_n : A_n \longrightarrow X_n$,*

de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto normante $B_n \subset B_{X_n^*}$ tal que $Z_{f_n,B_n} = \mathscr{H}|_{A_n}$ es uniformemente integrable.

Demostración. Como $\mathscr{H}$ está formada por funciones medibles y es puntualmente acotada, existe una función medible $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ tal que, para cada $h \in \mathscr{H}$, se tiene $|h| \leq \varphi$ μ-a.e. (Lema 1.8.9). Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos $A_n := \{t \in \Omega : n-1 \leq \varphi(t) < n\} \in \Sigma$. Claramente, $\mathscr{H}|_{A_n}$ es un subconjunto uniformemente integrable de $\mathscr{L}^1(\mu_{A_n})$. Tomamos $X_n := \ell_\infty(\mathscr{H}|_{A_n})$ y definimos la función $f_n : A_n \longrightarrow X_n$ mediante $f_n(t)(g) := g(t)$ para cada $t \in A_n$ y cada $g \in \mathscr{H}|_{A_n}$. Obsérvese finalmente que f_n satisface la igualdad $Z_{f_n,B_n} = \mathscr{H}|_{A_n}$, donde $B_n = \{e_g^* : g \in \mathscr{H}|_{A_n}\} \subset B_{X_n^*}$ es el conjunto normante formado por todos los "funcionales evaluación". □

Algunas de las ideas utilizadas en la prueba del Lema 2.3.16 pueden explotarse de nuevo para deducir el siguiente

Corolario 2.3.17 ([Rodb]). *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ una familia puntualmente acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ *tiene la propiedad de Bourgain;*

(ii) $\mathscr{H}$ *tiene la propiedad de Bourgain y existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $\mathscr{H}|_{A_n}$ es uniformemente acotada cuando $\mu(A_n) > 0$.*

Demostración. La implicación *(ii)⇒(i)* es consecuencia del Teorema 2.3.12. Para la prueba de *(i)⇒(ii)*, consideramos la función $f : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(\mathscr{H})$ definida por $f(t)(h) := h(t)$ para cada $t \in \Omega$ y cada $h \in \mathscr{H}$. Entonces $Z_{f,B} = \mathscr{H}$ para el conjunto normante $B = \{e_h^* : h \in \mathscr{H}\} \subset B_{\ell_\infty(\mathscr{H})^*}$. Como $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ tiene la propiedad de Bourgain, lo mismo ocurre con $\mathrm{aco}(\mathscr{H}) = \mathrm{aco}(Z_{f,B})$ (Lema 2.3.13) y con su clausura $\overline{\mathrm{aco}(Z_{f,B})}^{\mathfrak{T}_p} = Z_f$. Por tanto, podemos aplicar el Corolario 2.3.6 para encontrar una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que, para cada A_n de medida positiva, la restricción $f|_{A_n}$ es acotada y, como consecuencia, $\mathscr{H}|_{A_n}$ es uniformemente acotada. □

Corolario 2.3.18. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ una familia puntualmente acotada y convexa con la propiedad de Bourgain. Entonces existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $\mathscr{H}|_{A_n}$ es uniformemente acotada cuando $\mu(A_n) > 0$.*

Nuestro siguiente objetivo es mostrar mediante ejemplos que, como ya hemos mencionado, las Preguntas 1 y 2 tienen respuesta negativa en general. El Ejemplo 2.3.20 se debe a Fremlin (comunicación personal, véase [Rodb]) y es similar al que aparece en [Fre03, 465X(o)].

Obsérvese que, como $\mathrm{Borel}([0,1])$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase e.g. [Fre03, 424D]), lo mismo ocurre con la familia de todas las colecciones finitas (no vacías) de elementos de $\mathrm{Borel}([0,1])$ con medida de Lebesgue positiva, que enumeramos como $\{\mathscr{E}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Lema 2.3.19. *Existe una familia $(J_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de subconjuntos finitos de $[0,1]$, disjuntos dos a dos, tal que $J_\alpha \cap E \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ y cada $E \in \mathscr{E}_\alpha$.*

Demostración. Procedemos por inducción transfinita. Supongamos que $\beta < \mathfrak{c}$ y que ya hemos construido una familia $(J_\alpha)_{\alpha<\beta}$ de subconjuntos finitos de $[0,1]$, disjuntos dos a dos, de manera que $J_\alpha \cap E \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \beta$ y cada $E \in \mathscr{E}_\alpha$. El conjunto $A = \bigcup_{\alpha<\beta} J_\alpha$ tiene cardinalidad $\#(A) < \mathfrak{c}$, porque cada J_α es finito y $\beta < \mathfrak{c}$. Como cada subconjunto de Borel no numerable de $[0,1]$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase e.g. [Fre03, 423K]), tenemos $E \setminus A \neq \emptyset$ para cada $E \in \mathscr{E}_\beta$. Por tanto, J_β puede construirse tomando exactamente un punto de $E \setminus A$ para cada $E \in \mathscr{E}_\beta$. Esto completa la demostración. □

Ejemplo 2.3.20 (Fremlin). *Existe una familia puntualmente acotada $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ tal que*

(i) cada $h \in \mathscr{H}$ se anula en casi todo punto;

(ii) $\mathscr{H}$ *tiene la propiedad de Bourgain;*

(iii) $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ *no tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Por el lema previo, existe una familia $(J_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de subconjuntos finitos de $[0,1]$, disjuntos dos a dos, tales que $J_\alpha \cap E \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ y cada $E \in \mathscr{E}_\alpha$. Definimos

$$\mathscr{H} = \{\#(J_\alpha)\chi_{\{t\}} : \ t \in J_\alpha, \ \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

Obviamente, la familia $\mathscr{H}$ está formada por funciones que se anulan λ-a.e. y, además, es puntualmente acotada, puesto que $J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset$ cuando $\alpha \neq \beta$. Por otra parte, $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. En efecto, dado cualquier conjunto medible Lebesgue $A \subset [0,1]$ con medida positiva, podemos encontrar conjuntos medibles Lebesgue disjuntos $A_1, A_2 \subset A$ con medida positiva. De la definición de $\mathscr{H}$ se sigue que cada $h \in \mathscr{H}$ se anula en A_1 o en A_2.

Finalmente, nótese que $\{\chi_{J_\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathrm{co}(\mathscr{H})$ y que $\{\chi_{J_\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain. En efecto, esto último se sigue de la regularidad interior de λ con respecto a $\mathrm{Borel}([0,1])$ y el hecho de que, dada una cantidad finita de subconjuntos de Borel de $[0,1]$ con medida positiva, digamos $A_1, \dots, A_n$, siempre existe un $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\mathscr{E}_\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$ y, por tanto, $J_\alpha \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq n$, luego $\min_{1\leq i \leq n} \mathrm{osc}(\chi_{J_\alpha}|_{A_i}) = 1$. Esto prueba que $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ no tiene la propiedad de Bourgain. $\square$

Ejemplo 2.3.21 ([Rodb]). *Existe una función escalarmente nula $f : [0,1] \longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ tal que*

(i) para cierto conjunto normante $B \subset B_{c_0(\mathfrak{c})^*}$, la familia $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain;

(ii) f no es integrable Birkhoff.

Demostración. Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ la familia (con cardinalidad $\mathfrak{c}$) definida en la prueba del Ejemplo 2.3.20. Obsérvese que para cada $t \in [0,1]$ existe como mucho una $h \in \mathscr{H}$ tal que $h(t) \neq 0$. Definimos

$$f : [0,1] \longrightarrow c_0(\mathscr{H}), \quad f(t)(h) := h(t) \quad \text{para cada } t \in [0,1] \text{ y cada } h \in \mathscr{H}.$$

El conjunto $B = \{e_h^* : h \in \mathscr{H}\} \subset B_{c_0(\mathscr{H})^*}$ es normante y la familia $Z_{f,B} = \mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, pero $\mathrm{co}(\mathscr{H}) = Z_{f,\mathrm{co}(B)}$ no la tiene. Por tanto, f no es integrable Birkhoff (Proposición 2.3.1). Para finalizar la prueba vamos a comprobar que f es escalarmente nula. En efecto, como $\mathscr{H}$ está formada por funciones que se anulan en casi todo punto, lo mismo ocurre con $\mathrm{aco}(\mathscr{H}) = Z_{f,\mathrm{aco}(B)}$. Teniendo en cuenta la identificación $c_0(\mathscr{H})^* = \ell^1(\mathscr{H})$, se observa inmediatamente que $\overline{\mathrm{aco}(B)}^{\|\cdot\|} = B_{c_0(\mathscr{H})^*}$. Por tanto, $Z_{f,\mathrm{aco}(B)}$ es $\mathfrak{T}_p$-sucesionalmente denso en Z_f y, así, cada elemento de Z_f se anula λ-a.e., como se quería demostrar. $\square$

Ya sabemos que una función $f : \Omega \longrightarrow X$ en las condiciones de la Pregunta 1 es integrable Birkhoff si y sólo si *existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que la restricción $f|_{A_n}$ es acotada cuando $\mu(A_n) > 0$* (basta combinar la Proposición 2.3.14 con el Teorema 2.3.12). Nótese que, por ejemplo, dicha "descomposición" siempre existe cuando $\|f\|$ es *medible*.

Motivados por este hecho, a continuación estudiamos la medibilidad de $\|f\|$ para funciones $f : \Omega \longrightarrow X$ para las que existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain. En primer lugar, probamos que tales funciones siempre son escalarmente medibles (Corolario 2.3.23); este resultado es, de hecho, equivalente al siguiente.

Proposición 2.3.22 ([Rodb]). *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ una familia puntualmente acotada con la propiedad de Bourgain. Entonces $\overline{\mathrm{aco}(\mathscr{H})}^{\mathfrak{T}_p}$ está formada por funciones medibles.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una $g \in \overline{\mathrm{aco}(\mathscr{H})}^{\mathfrak{T}_p}$ que no es medible. Como g no es medible, existen $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y números reales $\alpha < \beta$ tales que

$$\mu^*(\{t \in A : \ g(t) < \alpha\}) = \mu^*(\{t \in A : \ g(t) > \beta\}) = \mu(A),$$

véase e.g. [Tal84, 1-1-5]. Definimos $H_n = \{t \in \Omega : \ \sup_{h \in \mathscr{H}} |h(t)| \leq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (H_n) es una sucesión creciente con unión Ω, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande verificando

$$\mu^*(H_n \cap \{t \in A : \ g(t) < \alpha\}) > \frac{\mu(A)}{2} \quad \text{y} \quad \mu^*(H_n \cap \{t \in A : \ g(t) > \beta\}) > \frac{\mu(A)}{2}.$$

Por tanto,

$$\mu^*(\{t \in H_n \cap A : \ g(t) < \alpha\}) + \mu^*(\{t \in H_n \cap A : \ g(t) > \beta\}) > \mu(A) \geq \mu^*(H_n \cap A). \qquad (2.17)$$

Escribimos $B = H_n \cap A$. Como $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, la familia de restricciones $\mathscr{H}|_B$ tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ_B (Proposición 2.2.2 *(v)*). Además, $\mathscr{H}|_B$ es uniformemente acotada, luego podemos aplicar el Teorema 2.3.12 (junto con el Lema 2.3.13) para deducir que la familia $\overline{\mathrm{aco}(\mathscr{H}|_B)}^{\mathfrak{T}_p(B)} = \overline{\mathrm{aco}(\mathscr{H})|_B}^{\mathfrak{T}_p(B)}$ tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ_B; en particular, está formada por funciones Σ_B-medibles. Teniendo en cuenta que $g|_B \in \overline{\mathrm{aco}(\mathscr{H})|_B}^{\mathfrak{T}_p(B)}$, concluimos que los conjuntos $\{t \in B : g(t) < \alpha\}$ y $\{t \in B : g(t) > \beta\}$ pertenecen a Σ_B. Finalmente, la desigualdad (2.17) implica

$$\begin{aligned} \mu_B(B) \geq \mu_B(\{t \in B : \ g(t) < \alpha\} \cup \{t \in B : \ g(t) > \beta\}) \\ = \mu_B(\{t \in B : \ g(t) < \alpha\}) + \mu_B(\{t \in B : \ g(t) > \beta\}) \\ = \mu^*(\{t \in B : \ g(t) < \alpha\}) + \mu^*(\{t \in B : \ g(t) > \beta\}) > \mu^*(B) = \mu_B(B), \end{aligned}$$

una contradicción que termina la prueba. □

Ahora, la igualdad (2.16) en la página 93 nos permite concluir el siguiente

Corolario 2.3.23 ([Rodb]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función para la que existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain. Entonces f es escalarmente medible.*

Observación 2.3.24. Un profundo resultado de Talagrand afirma que *la envoltura convexa de una familia estable y uniformemente acotada es también estable*, véase [Tal84, 11-2-1] o [Fre03, 465N]. Este hecho puede utilizarse para comprobar que las conclusiones de la Proposición 2.3.22 y el Corolario 2.3.23 son ciertas incluso cuando la propiedad de Bourgain se reemplaza por la noción de estabilidad.

Recordemos que, *para una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ puntualmente acotada de funciones medibles con cardinalidad $\#(\mathscr{H}) < \kappa(\mu)$, la función $t \mapsto \sup_{h \in \mathscr{H}} |h(t)|$ es medible* (Corolario 1.10.9). Este hecho y nuestro trabajo previo conducen a otras soluciones parciales afirmativas para las Preguntas 1 y 2.

Corolario 2.3.25 ([Rodb]). *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia puntualmente acotada con $\#(\mathscr{H}) < \kappa(\mu)$. Si $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain, entonces $\mathrm{co}(\mathscr{H})$ también tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Aplicando el Corolario 1.10.9, podemos encontrar una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $\mathscr{H}|_{A_n}$ es uniformemente acotada para cada n. El resultado se sigue ahora del Teorema 2.3.12. □

Corolario 2.3.26 ([Rodb]). *Supongamos que $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \kappa(\mu)$. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función escalarmente medible. Entonces $\|f\|$ es medible.*

Demostración. Fijamos un conjunto w^*-denso $C \subset B_{X^*}$ con $\#(C) < \kappa(\mu)$. Como

$$\|f(t)\| = \sup\{|(x^* \circ f)(t)| : \ x^* \in C\} \quad \text{para cada } t \in \Omega,$$

el Corolario 1.10.9 nos asegura que $\|f\|$ es medible. □

Corolario 2.3.27 ([Rodb]). *Supongamos que $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \kappa(\mu)$. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;

(ii) existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Demostración. Supongamos que se cumple *(ii)*. Como $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain, podemos aplicar los Corolarios 2.3.23 y 2.3.26 para deducir que existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $f|_{A_n}$ es acotada para cada n. Esta última condición, junto con *(ii)*, asegura que f es integrable Birkhoff. □

En particular, *bajo el Axioma M*, cuando trabajamos en $[0,1]$ equipado con la medida de Lebesgue, la Pregunta 1 (resp. Pregunta 2) tiene respuesta afirmativa si $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \mathfrak{c}$ (resp. $\#(\mathscr{H}) < \mathfrak{c}$). Sin suponer la validez de axiomas adicionales, se tiene:

Corolario 2.3.28 ([Rodb]). *Supongamos que B_{X^*} es w^*-separable. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es integrable Birkhoff;

(ii) existe un conjunto normante $B \subset B_{X^*}$ tal que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Finalizamos el apartado con un ejemplo, debido a Fremlin (comunicación personal), de una familia *contable* con la propiedad de Bourgain tal que su envoltura convexa no tiene dicha propiedad. Por supuesto, una tal familia no puede ser puntualmente acotada (en vista del Corolario 2.3.25).

Ejemplo 2.3.29 (Fremlin). *Supongamos que μ es una medida de probabilidad sin átomos. Entonces existe una familia contable $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tal que*

(i) *$\mathscr{H}$ es uniformemente integrable;*
(ii) *$\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain;*
(iii) $\operatorname{co}(\mathscr{H})$ *no tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Como μ no tiene átomos, podemos encontrar una sucesión independiente $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ en Σ tal que $\mu(E_n) = 1/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lema 2.2.7).

Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Nótese que cualquier $A \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ tiene medida positiva. En efecto, si escribimos $A = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$, con $F_i \in \{E_i, \Omega \setminus E_i\}$ para todo $1 \leq i \leq n$, la familia $(F_i)_{i=1}^{n}$ es independiente (véase e.g. [Fre01, 272E]) y, por tanto, se tiene $\mu(A) = \prod_{i=1}^{n} \mu(F_i) > 0$. Denotamos por $\mathscr{A}_n$ el conjunto de todos los $A \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ contenidos en E_n, y definimos, para cada $A \in \mathscr{A}_n$, la función

$$h_{n,A} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_{n,A} := \frac{\mu(E_n)}{\mu(A)} \chi_A.$$

Vamos a demostrar que la familia

$$\mathscr{H} := \{h_{n,A} : \ n \in \mathbb{N},\, A \in \mathscr{A}_n\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$$

satisface las condiciones requeridas. En primer lugar, *$\mathscr{H}$ es uniformemente integrable*, puesto que se tiene $\lim_n \int_{\Omega} h_{n,A} \, d\mu = \lim_n \mu(E_n) = 0$. Por otra parte, $\operatorname{co}(\mathscr{H})$ *no tiene la propiedad de Bourgain*, porque

$$\chi_{E_n} = \sum_{A \in \mathscr{A}_n} \frac{\mu(A)}{\mu(E_n)} h_{n,A} \in \operatorname{co}(\mathscr{H}) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

y la familia $\{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain (por el Lema 2.2.8). Veamos finalmente que *$\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain*. Dividimos la prueba en tres pasos.

Paso 1.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, cualquier $h \in \mathscr{H}$ es constante en todos los elementos de la partición $\mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ salvo, a lo más, en uno de ellos. Escribimos $h = h_{m,C}$, con $m \in \mathbb{N}$ y $C \in \mathscr{A}_m$. Si $m \leq n$, entonces para cada $B \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ se tiene $B \subset C$ ó $B \subset \Omega \setminus C$, luego en ambos casos $h|_B$ es constante. Si $n < m$ y tomamos un $B \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ con $C \subset B$, entonces $h|_{B'}$ se anula para cada $B' \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ distinto de B.

Paso 2.- Para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(A \setminus B) > 0 \quad \text{para todo } B \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\}).$$

Como $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es independiente y $\sum_n \mu(E_n) = +\infty$, el lema de Borel-Cantelli (véase e.g. [Fre01, 273K]) garantiza que $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} E_m$ tiene medida 1. Fijamos un $A \in \Sigma$ con la propiedad de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $B_n \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$ con $\mu(A \setminus B_n) = 0$. Vamos a ver que $\mu(A) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos dos posibilidades mutuamente excluyentes:

- $B_n \subset E_n$, y así $\mu(A \setminus E_n) = 0$;
- $B_n \subset \Omega \setminus E_n$, y así $\mu(A \cap E_n) = 0$.

Por tanto, podemos distinguir un par de casos:

- Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A \cap E_m) = 0$ para todo $m \geq n$. Entonces

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) \leq \mu\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} (A \cap E_m)\Big) = 0.$$

- Existen $m_1 < m_2 < \dots$ en $\mathbb{N}$ tales que $\mu(A \setminus E_{m_k}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_{m_k}) \leq \mu(E_{m_k}) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

  Como $\lim_k \mu(E_{m_k}) = 0$, se tiene $\mu(A) = 0$.

Esto completa la prueba del *Paso 2*.

Paso 3.- Fijamos $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$. Como ya hemos demostrado en el *Paso 2*, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A \setminus B) > 0$ para cada $B \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\})$. En particular, la familia

$$\mathscr{S} = \{A \cap B : \ B \in \mathscr{A}(\{E_1, \dots, E_n\}), \ \mu(A \cap B) > 0\}$$

tiene al menos dos elementos. Por tanto, teniendo en cuenta el *Paso 1*, para cada $h \in \mathscr{H}$ existe algún $S \in \mathscr{S}$ tal que $\operatorname{osc}(h|_S) = 0$. Esto demuestra que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain y la prueba ha terminado. □

2.4. La propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios de Banach duales

La propiedad débil de Radon-Nikodým de un espacio de Banach, introducida por Musial en [Mus79], es la condición análoga a la propiedad de Radon-Nikodým (RNP) cuando la integral de Bochner se sustituye por la integral de Pettis. Más precisamente:

Definición 2.4.1. *Se dice que X tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým respecto de μ (brevemente, μ-WRNP) si, para cada medida contablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, μ-continua y con variación σ-finita, existe una función integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que $\nu = \nu_f$ (en tal caso, decimos que f es una densidad de ν). Se dice que X tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým (WRNP) si tiene la μ-WRNP para cada medida de probabilidad completa μ.*

Al igual que ocurre con la propiedad de Radon-Nikodým, el espacio X tiene la WRNP si y sólo si tiene la λ-WRNP (Musial, véase [Tal84, 7-2-5]). Para espacios de Banach con la *propiedad de complementación separable* (aquéllos en los que todo subespacio separable está contenido en un subespacio separable y complementado; e.g. espacios WCG), la RNP y la WRNP son equivalentes, véase [Mus79]. Lo mismo se cumple para espacios de Banach compactos en medida en su topología débil (basta aplicar el Corolario 1.7.12) y *retículos de Banach* (Ghoussoub y Saab [GS81]). Por otra parte, el dual del *James tree space JT* proporciona un ejemplo de espacio que tiene la WRNP pero no la RNP, [Mus79].

Es bien conocido que, en el caso de espacios de Banach *duales*, la WRNP queda completamente caracterizada de la siguiente forma (véase e.g. [Dul89, Chapter 6] o [Tal84, Chapter 7]):

X^* tiene la WRNP si y sólo si X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.

El “sólo si” se debe a Musial y Ryll-Nardzewski [MRN78], mientras que la condición suficiente fue demostrada por Musial [Mus79] (cuando X tiene la propiedad de complementación separable), Janicka [Jan79] y Bourgain [Bou]; Musial dio en [Mus83, Mus84] una nueva prueba de esta implicación a través de la propiedad de Bourgain. El principal objetivo de esta sección es proporcionar una caracterización de la WRNP en duales mediante la integral de Birkhoff (Teoremas 2.4.19 y 2.4.22). En el Capítulo 3 aplicaremos este resultado para resolver, en el caso de espacios de Banach duales, un problema propuesto por Fremlin [Fre94, Fre95] relativo a la representación de medidas vectoriales como integrales indefinidas de funciones integrables *McShane*.

2.4.1. La propiedad de Bourgain y ℓ^1-sucesiones

En este apartado mostramos la estrecha relación que existe entre la propiedad de Bourgain y la ausencia de sucesiones “equivalentes” (en la norma del supremo) a la base canónica de ℓ^1.

Definición 2.4.2. *Una sucesión acotada (x_n) en X se llama ℓ^1-sucesión si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\delta \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\Big) \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\| \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N} \textit{ y cada } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.4.3. Si (x_n) es una ℓ^1-sucesión en X, entonces $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ en X es isomorfo a ℓ^1.

Demostración. Escribimos $Z = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Como (x_n) está acotada, podemos definir una aplicación lineal continua $T : \ell^1 \longrightarrow Z$ mediante $T((a_n)) = \sum_n a_n x_n$. Por otra parte, (x_n) es linealmente independiente, por lo que podemos definir una aplicación lineal $s : \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \ell^1$ mediante la formula

$$s(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots), \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Del hecho de que (x_n) es una ℓ^1-sucesión se desprende que s es continua. Por tanto, existe una aplicación lineal continua $S : Z \longrightarrow \ell^1$ tal que $S|_{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = s$. Es claro que $S \circ T = \mathrm{Id}_{\ell^1}$ y que $T \circ S = \mathrm{Id}_Z$. Esto completa la demostración. □

El Lema 2.4.5 proporciona un criterio útil para determinar si una sucesión uniformemente acotada de funciones es una ℓ^1-sucesión. Rosenthal [Ros74] empleó este resultado en la prueba de su caracterización de los espacios de Banach que no contienen subespacios isomorfos a ℓ^1 como aquéllos para los que toda sucesión acotada posee una subsucesión que es de Cauchy en la topología débil, véase e.g. [Dul89, Theorem 4.1] o [Die84, Chapter XI]. Antes necesitamos introducir la siguiente:

Definición 2.4.4 ([Ros74]). *Sea S un conjunto. Una sucesión (C_n, D_n) de pares de subconjuntos de S se dice independiente si*

(i) $C_n \cap D_n = \emptyset$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) para cada par de conjuntos finitos (no vacíos) y disjuntos $P, Q \subset \mathbb{N}$, se tiene

$$\Big(\bigcap_{n\in P} C_n\Big) \cap \Big(\bigcap_{m\in Q} D_m\Big) \neq \emptyset.$$

Lema 2.4.5 (Rosenthal). *Sean S un conjunto y (h_n) una sucesión acotada en $\ell_\infty(S)$. Supongamos que existen números reales $\alpha < \beta$ tales que la sucesión (C_n, D_n) es independiente, donde*

$$C_n = \{s \in S : \ h_n(s) < \alpha\} \quad y \quad D_n = \{s \in S : \ h_n(s) > \beta\} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces (h_n) es una ℓ^1-sucesión.

Demostración. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Vamos a probar que

$$\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^m |a_i|\Big) \leq \Big\|\sum_{i=1}^m a_i h_i\Big\|_\infty. \tag{2.18}$$

Para ello, definimos $P = \{1 \leq i \leq m : a_i > 0\}$ y $Q = \{1 \leq i \leq m : a_i < 0\}$. Como la sucesión (C_n, D_n) es independiente, podemos encontrar

$$x \in \Big(\bigcap_{i\in P} C_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in Q} D_i\Big) \quad \text{e} \quad y \in \Big(\bigcap_{i\in Q} C_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in P} D_i\Big).$$

(Con el convenio de que la intersección de una familia vacía de subconjuntos de S es todo S.)

Por un lado, se tiene

$$-\sum_{i=1}^m a_i h_i(x) = \sum_{i\in P} |a_i|(-h_i(x)) + \sum_{i\in Q} |a_i| h_i(x) \geq \Big(\sum_{i\in P} |a_i|\Big) \cdot (-\alpha) + \Big(\sum_{i\in Q} |a_i|\Big) \cdot \beta. \tag{2.19}$$

Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^m a_i h_i(y) = \sum_{i\in P} |a_i| h_i(y) + \sum_{i\in Q} |a_i|(-h_i(y)) \geq \Big(\sum_{i\in P} |a_i|\Big) \cdot \beta + \Big(\sum_{i\in Q} |a_i|\Big) \cdot (-\alpha). \tag{2.20}$$

Finalmente, sumando (2.19) y (2.20) deducimos

$$2\Big\|\sum_{i=1}^m a_i h_i\Big\|_\infty \geq -\sum_{i=1}^m a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^m a_i h_i(y) \geq (\beta-\alpha) \cdot \Big(\sum_{i=1}^m |a_i|\Big),$$

lo que completa la demostración. □

La noción de espacio de medida topológico hereditariamente soportado (Definición 2.4.6) proporciona un marco general apropiado para aplicar el Lema 2.4.5 a familias uniformemente acotadas de funciones continuas que no tienen la propiedad de Bourgain (Proposición 2.4.9).

Definición 2.4.6. *Un espacio de medida topológico $(T, \mathfrak{T}, \Sigma, \mu)$ se dice que está hereditariamente soportado si, para cada $A \in \Sigma$ de medida positiva, existe un $B \in \Sigma_A$ de medida positiva tal que $\mu(U \cap B) > 0$ para cada $U \in \mathfrak{T}$ con $U \cap B \neq \emptyset$.*

Ejemplo 2.4.7. *Todo espacio de medida topológico de Radon $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ está hereditariamente soportado.*

Demostración. Fijamos $A \in \mathrm{Borel}(T,\mathfrak{T})$ con medida positiva. Como μ es de Radon, podemos encontrar un conjunto compacto $K \subset A$ con $\mu(K) > 0$. Entonces el conjunto $B := \mathrm{supp}(\mu_K)$ tiene medida positiva y cumple $\mu(U \cap B) = \mu_K((U \cap K) \cap B) > 0$ para todo $U \in \mathfrak{T}$ que corte a B. $\square$

Ejemplo 2.4.8. *Sean τ un lifting en Σ y $\mathscr{C}_\tau$ la topología asociada definida en el Lema 1.10.5. Entonces $(\Omega,\mathscr{C}_\tau,\Sigma,\mu)$ está hereditariamente soportado.*

Demostración. Fijamos $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. El conjunto $B = \tau(E) \cap E$ pertenece a Σ_E y tiene medida positiva, porque $\mu(\tau(E) \triangle E) = 0$. Tomamos ahora $U \in \mathscr{C}_\tau$ verificando $\mu(U \cap B) = 0$. *Vamos a ver que* $U \cap B = \emptyset$. En efecto, escribimos $U = \tau(A) \setminus N$, donde $A, N \in \Sigma$ y $\mu(N) = 0$, y observamos que

$$\mu(\tau(A) \cap \tau(E) \cap E) = \mu(U \cap B) = 0.$$

Por tanto, $U \cap B \subset \tau(A) \cap \tau(E) = \tau(\tau(A) \cap \tau(E) \cap E) = \emptyset$. Esto completa la demostración. $\square$

La siguiente proposición, tomada de [Mus83, Mus84] (véase [Mus91] o [Mus02]), es nuestro punto de partida para demostrar (en el Apartado 2.4.2) que los duales de espacios de Banach sin subespacios isomorfos a ℓ^1 tienen la WRNP, y que las correspondientes densidades pueden escogerse de manera que sean integrables Birkhoff.

Proposición 2.4.9 (Musial). *Sean $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ un espacio de medida topológico que está hereditariamente soportado y $\mathscr{H}$ un subconjunto acotado de $C_b(T,\mathfrak{T})$ que no contiene ℓ^1-sucesiones. Entonces $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Antes de pasar a la prueba de la Proposición 2.4.9, necesitamos reescribir la propiedad de Bourgain de la siguiente forma, véase [RS85, p. 520].

Lema 2.4.10. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia uniformemente acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain;*

(ii) *para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y cada par de números reales $\alpha < \beta$, existen $A_1, \dots, A_n \in \Sigma_A$ de medida positiva con la siguiente propiedad: para cada $h \in \mathscr{H}$, existe un $1 \leq i \leq n$ de manera que* $\sup(h(A_i)) \leq \beta$ *ó* $\inf(h(A_i)) \geq \alpha$.

Demostración. La implicación *(i)⇒(ii)* es inmediata y no requiere la hipótesis de "acotación uniforme". Recíprocamente, veamos *(ii)⇒(i)*. Fijamos $M > 0$ tal que $|h(t)| \leq M$ para cada $t \in \Omega$ y cada $h \in \mathscr{H}$, y tomamos $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y $\varepsilon > 0$. Escogemos $a_0 = -M < a_1 < \ldots < a_{n+1} = M$ de manera que $a_i - a_{i-1} \leq \varepsilon/2$ para cada $1 \leq i \leq n+1$. Aplicando *(ii)* al conjunto A con $\alpha = a_1$ y $\beta = a_2$, podemos encontrar una colección finita $\mathscr{S}_2$ de subconjuntos medibles de A con medida positiva de manera que, para cada $h \in \mathscr{H}$, existe un $B \in \mathscr{S}_2$ tal que $\sup(h(B)) \leq a_2$ ó $\inf(h(B)) \geq a_1$. Si aplicamos de nuevo la condición *(ii)* a cada elemento de $\mathscr{S}_2$ con $\alpha = a_2$ y

$\beta = a_3$, podemos encontrar una colección finita $\mathscr{S}_3$ de subconjuntos medibles de A con medida positiva tales que, para cada $h \in \mathscr{H}$, existe un $B \in \mathscr{S}_3$ tal que

$$\sup(h(B)) \leq a_2 \ \text{ó} \ \inf(h(B)) \geq a_1$$

y

$$\sup(h(B)) \leq a_3 \ \text{ó} \ \inf(h(B)) \geq a_2.$$

De esta manera, utilizando recursivamente la condición *(ii)*, podemos encontrar $A_1, \ldots, A_k \in \Sigma_A$ de medida positiva de manera que, para cualquier $h \in \mathscr{H}$, existe un $1 \leq j \leq k$ tal que

$$\text{para cada } 2 \leq i \leq n, \quad \sup(h(A_j)) \leq a_i \ \text{ó} \ \inf(h(A_j)) \geq a_{i-1},$$

luego $\operatorname{osc}(h|_{A_j}) \leq \varepsilon$. Esto demuestra que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. □

Demostración de la Proposición 2.4.9. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathscr{H}$ no tiene la propiedad de Bourgain. Como $\mathscr{H}$ es uniformemente acotada, el Lema 2.4.10 asegura la existencia de números reales $\alpha < \beta$ y un $A \in \Sigma$ de medida positiva con la siguiente propiedad:

(+) para cualquier colección finita $A_1, \ldots, A_k$ de elementos de Σ_A con medida positiva, existe una $h \in \mathscr{H}$ verificando $\sup(h(A_i)) > \beta$ e $\inf(h(A_i)) < \alpha$ para cada $1 \leq i \leq k$.

La demostración se divide ahora en dos etapas.

Paso 1.- Existen una familia $\{A_{n,m} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 2^n\}$ de elementos de Σ con medida positiva y una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $1 \leq m \leq 2^n$, se tiene

(a) $A_{n+1,2m-1} \cap A_{n+1,2m} = \emptyset$ *y* $A_{n+1,2m-1} \cup A_{n+1,2m} \subset A_{n,m}$*;*
(b) $h_{n+1}(t) < \alpha$ *para todo* $t \in A_{n+1,2m-1}$*;*
(c) $h_{n+1}(t) > \beta$ *para todo* $t \in A_{n+1,2m}$.

Para verlo, vamos a razonar por inducción en $n \in \mathbb{N}$. El caso $n = 1$ es como sigue. Usando que $(T, \mathfrak{T}, \Sigma, \mu)$ está hereditariamente soportado, podemos encontrar $B \in \Sigma_A$ con $\mu(B) > 0$ tal que $\mu(U \cap B) > 0$ para todo $U \in \mathfrak{T}$ con $U \cap B \neq \emptyset$. Por otro lado, la propiedad (+) garantiza la existencia de $h_1 \in \mathscr{H}$ cumpliendo $\sup(h_1(B)) > \beta$ e $\inf(h_1(B)) < \alpha$. Es claro que los elementos de Σ definidos por

$$A_{1,1} := \{t \in B : \ h_1(t) < \alpha\} \quad \text{y} \quad A_{1,2} := \{t \in B : \ h_1(t) > \beta\}$$

satisfacen las propiedades requeridas.

Supongamos que $n > 1$ y que ya hemos construido una colección

$$\{A_{i,m} : \ 1 \leq i \leq n-1, \ 1 \leq m \leq 2^i\}$$

de elementos de Σ con medida positiva, y funciones $h_1, \ldots, h_{n-1} \in \mathscr{H}$, cumpliendo las condiciones *(a)*, *(b)* y *(c)* para $1 \leq i \leq n-1$. Como $(T, \mathfrak{T}, \Sigma, \mu)$ está hereditariamente soportado, para cada $1 \leq m \leq 2^{n-1}$ existe un conjunto $B_{n-1,m} \in \Sigma_{A_{n-1,m}}$ de medida positiva tal que $\mu(U \cap B_{n-1,m}) > 0$ para todo $U \in \mathfrak{T}$ con $U \cap B_{n-1,m} \neq \emptyset$. Ahora podemos aplicar la propiedad (+) para encontrar

$h_n \in \mathscr{H}$ verificando $\sup h((B_{n-1,m})) > \beta$ e $\inf(h(B_{n-1,m})) < \alpha$ para cada $1 \le m \le 2^{n-1}$. Como antes, los conjuntos medibles

$$A_{n,2m-1} := \{t \in B_{n-1,m} : \ h_1(t) < \alpha\} \quad \text{y} \quad A_{n,2m} := \{t \in B_{n-1,m} : \ h_1(t) > \beta\} \quad (1 \le m \le 2^{n-1})$$

cumplen las propiedades deseadas. Esto completa la prueba del *Paso 1*.

Paso 2.- Definimos

$$C_n = \{t \in T : \ h_n(t) < \alpha\} \quad y \quad D_n = \{t \in T : \ h_n(t) > \beta\} \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces (C_n, D_n) *es una sucesión independiente*. En efecto, fijamos un par de conjuntos finitos (no vacíos) disjuntos $P, Q \subset \mathbb{N}$. Las condiciones *(a)*, *(b)* y *(c)* nos permiten encontrar números naturales $1 \le m_n \le 2^n$, para cada $1 \le n \le k := \text{máx}\{P \cup Q\}$, de manera que

- $A_{1,m_1} \supset A_{2,m_2} \supset \ldots \supset A_{k,m_k}$;
- $A_{n,m_n} \subset C_n$ para todo $n \in P$;
- $A_{n,m_n} \subset D_n$ para todo $n \in Q$.

Por tanto, $(\bigcap_{n \in P} C_n) \cap (\bigcap_{n \in Q} D_n) \supset A_{k,m_k} \neq \emptyset$. Esto prueba que (C_n, D_n) es independiente.

Finalmente, el Lema 2.4.5 asegura que (h_n) es una ℓ^1-sucesión en $C_b(T, \mathfrak{T})$, en contra de la hipótesis. La prueba ha finalizado. □

Observación 2.4.11. Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff y $\mathscr{H} \subset C(K)$ un subconjunto acotado. Un profundo resultado de Bourgain, Fremlin y Talagrand [BFT78], véase [Tal84, 14-1-7], asegura que son equivalentes:

(i) $\mathscr{H}$ no contiene ℓ^1-sucesiones;

(ii) para cada medida de Radon μ en K, todos los elementos de $\overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$ son μ-medibles.

En vista de la Proposición 2.4.9, la siguiente condición es equivalente a las anteriores:

(iii) para cada medida de Radon μ en K, la familia $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ.

Aplicando la Proposición 2.4.9 en los contextos de los Ejemplos 2.4.7 y 2.4.8, podemos deducir los siguientes corolarios.

Corolario 2.4.12 (Musial). *Sean $(T, \mathfrak{T}, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida topológico de Radon y $\mathscr{H}$ un subconjunto acotado de $C_b(T, \mathfrak{T})$ que no contiene ℓ^1-sucesiones. Entonces $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Corolario 2.4.13 (Musial). *Sean τ un lifting en Σ y $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ una familia uniformemente acotada de funciones medibles. Si $\rho_\tau(\mathscr{H})$ no contiene ℓ^1-sucesiones (visto como subconjunto de $\ell_\infty(\Omega)$), entonces $\rho_\tau(\mathscr{H})$ tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Por el Lema 1.10.6, $\rho_\tau(\mathscr{H})$ es un subconjunto (acotado) de $C_b(\Omega, \mathscr{C}_\tau)$. Como $(\Omega, \mathscr{C}_\tau, \Sigma, \mu)$ está hereditariamente soportado (Ejemplo 2.4.8) y $\rho_\tau(\mathscr{H})$ no contiene ℓ^1-sucesiones, el resultado se sigue de la Proposición 2.4.9. □

La noción de integrabilidad Pettis *universal*, definida debajo, ha sido ampliamente estudiada por distintos autores, véase por ejemplo [And85], [Ple98], [RSU83], [RS85] y [Tal84].

Definición 2.4.14. *Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff y $f : K \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es universalmente [escalarmente medible, integrable Pettis, integrable Birkhoff] si es [escalarmente medible, integrable Pettis, integrable Birkhoff] respecto de cada medida de Radon μ en K.*

Un resultado de Riddle, Saab y Uhl [RSU83] afirma que *una función acotada, definida en un compacto y con valores en el dual de un espacio de Banach separable, es universalmente escalarmente medible si y sólo si es universalmente integrable Pettis*. Como aplicación de nuestro trabajo previo, vamos a finalizar el apartado mostrando que, en la anterior caracterización, se puede reemplazar integrabilidad Pettis por integrabilidad Birkhoff (Corolario 2.4.17). La prueba se basa en la equivalencia aislada en la Observación 2.4.11 y en la siguiente generalización del clásico *teorema de Luzin*.

Lema 2.4.15. *Supongamos que X es separable. Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff, μ una medida de Radon en K y $f : K \longrightarrow X^*$ una función tal que la composición $\langle f, x\rangle$ es μ-medible para cada $x \in X$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $F \subset K$ con $\mu(K \setminus F) \leq \varepsilon$ tal que la restricción $f|_F$ es w^*-continua.*

Demostración. Fijamos un conjunto denso contable $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_X$. Para cada $x^* \in X^*$ se tiene la igualdad $\|x^*\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)|$, luego $\|f\|$ es μ-medible. Por tanto, existe una sucesión disjunta (A_m) en Borel(K) tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$, la restricción $f|_{A_m}$ es acotada.

Fijamos $m \in \mathbb{N}$ y tomamos un compacto $K_m \subset A_m$ tal que $\mu(A_m \setminus K_m) < \varepsilon/2^{m+1}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, la función $\langle f, x_n\rangle|_{K_m}$ pertenece a $\mathscr{L}^1(\mu_{K_m})$ y podemos aplicar el teorema de Luzin, véase e.g. [Fre03, 418J], para encontrar un compacto $F_{n,m} \subset K_m$ con $\mu(K_m \setminus F_{n,m}) \leq \varepsilon/2^{m+n+1}$ tal que la restricción $\langle f, x_n\rangle|_{F_{n,m}}$ es continua. Nótese que el conjunto compacto $F_m := \bigcap_{n=1}^\infty F_{n,m} \subset K_m$ verifica $\mu(K_m \setminus F_m) \leq \varepsilon/2^{m+1}$. Vamos a demostrar que $f|_{F_m}$ *es w^*-continua*. Para ello, fijamos $x \in B_X$, $\eta > 0$ y $t \in K$. Podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| \leq \eta$. Como $\langle f, x_n\rangle|_{F_m}$ es continua, existe un $V \subset F_m$ entorno abierto (relativo) de t tal que $|\langle f(t), x_n\rangle - \langle f(t'), x_n\rangle| \leq \eta$ para cada $t' \in V$. Por tanto,

$$\begin{aligned}|\langle f(t),x\rangle - \langle f(t'),x\rangle| &\leq |\langle f(t),x_n\rangle - \langle f(t'),x_n\rangle| + |\langle f(t),x-x_n\rangle - \langle f(t'),x-x_n\rangle| \\ &\leq \eta + \eta\cdot \sup_{s\in F_m}\|f(s)\| = (1+\sup_{s\in F_m}\|f(s)\|)\cdot\eta \quad \text{para cada } t' \in K.\end{aligned}$$

Se sigue que $\langle f, x\rangle$ es continua, como se quería demostrar.

Como $\mu(A_m \setminus F_m) < \varepsilon/2^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos $\mu(K \setminus \bigcup_{m=1}^\infty F_m) \leq \varepsilon$ y podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\mu(K \setminus \bigcup_{m=1}^M F_m) \leq \varepsilon$. El conjunto $F := \bigcup_{m=1}^M F_m$ es compacto y la restricción $f|_F$ es w^*-continua, porque cada $f|_{F_m}$ es w^*-continua y $F_i \cap F_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$. Esto completa la demostración. □

Proposición 2.4.16. *Supongamos que X es separable. Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff y $f : K \longrightarrow X^*$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es universalmente escalarmente medible y la familia Z_{f,B_X} es uniformemente integrable respecto de cada medida de Radon en K;

(ii) f es universalmente integrable Birkhoff.

Demostración. Sólo nos queda demostrar la implicación *(i)⇒(ii)*. En virtud del Corolario 2.3.15, basta ver que, fijada una medida de Radon μ en K, la familia Z_{f,B_X} tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ; equivalentemente, vamos a comprobar que *para cada $\varepsilon > 0$ existe un $F \subset K$ compacto con $\mu(K \setminus F) \leq \varepsilon$ tal que $Z_{f|_F,B_X}$ tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ_F*. Distinguimos dos casos.

Caso particular.- f es acotada. Dado $\varepsilon > 0$, el Lema 2.4.15 nos dice que existe un compacto $F \subset K$ con $\mu(K \setminus F) \leq \varepsilon$ tal que $Z_{f|_F,B_X}$ es un subconjunto (acotado) de $C(F)$. Por hipótesis, para cada medida de Radon ϑ en F, la familia $\overline{Z_{f|_F,B_X}}^{\mathfrak{T}_p(F)} = Z_{f|_F}$ está formada por funciones ϑ-medibles. Así, concluimos que $Z_{f|_F,B_X}$ tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ (Observación 2.4.11).

Caso general.- Como en la demostración del Lema 2.4.15, podemos encontrar una sucesión disjunta (A_m) en Borel(K) tal que la restricción $f|_{A_m}$ es acotada para todo $m \in \mathbb{N}$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un compacto $K_m \subset A_m$ tal que $\mu(A_m \setminus K_m) < \varepsilon/2^m$. Como $\mu(K \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m) < \varepsilon$, existe un $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\mu(K \setminus \bigcup_{m=1}^{M} K_m) \leq \varepsilon$. Consideramos el compacto $F := \bigcup_{m=1}^{M} K_m$. Aplicando el *Caso particular* a la función acotada $f|_F$, se deduce que la familia $Z_{f|_F,B_X}$ tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ_F. La prueba ha finalizado. □

Corolario 2.4.17 ([Rode]). *Supongamos que X es separable. Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff y $f : K \longrightarrow X^*$ una función acotada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f es universalmente escalarmente medible;

(ii) f es universalmente integrable Birkhoff.

2.4.2. Caracterización de la WRNP mediante la integral de Birkhoff

Comenzamos el apartado mostrando que ℓ_∞ no tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým. Los argumentos empleados en la prueba de este resultado (debido a Ryll-Nardzewski, véase [Mus79]) se remontan a Sierpinski [Sie39] y serán utilizados de nuevo para extender la conclusión a todos los duales de espacios de Banach con subespacios isomorfos a ℓ^1 (Teorema 2.4.19).

Proposición 2.4.18 (Ryll-Nardzewski). *ℓ_∞ no tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým.*

Demostración. Trabajamos en el espacio de probabilidad completo $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{L}_1, \lambda_1)$. Consideramos la función "identidad" $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \ell_\infty$. En primer lugar, veamos que *f es integrable Gel'fand*. En efecto, como f es acotada, basta comprobar que $\langle f, x\rangle$ es medible para cada $x \in \ell^1$.

Fijamos $x = (a_n) \in \ell^1$ y observamos que $\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi_n$, donde $\pi_n : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la n-ésima coordenada. Como cada π_n es medible, lo mismo ocurre con $\langle f, x\rangle$. Por tanto, f es integrable Gel'fand (Definición 1.8.15) y, por el Lema 1.8.16, existe una medida finitamente aditiva $\nu = \gamma_f : \mathscr{L}_1 \longrightarrow \ell_\infty$ tal que

$$\nu(E)(x) = \int_E \langle f, x\rangle \, d\lambda_1 \quad \text{para cada } E \in \mathscr{L}_1 \text{ y cada } x \in \ell^1. \tag{2.21}$$

Nótese que, para cada $E \in \mathscr{L}_1$, se tiene

$$|\nu(E)(e_n)| = \left| \int_E \langle f, e_n\rangle \, d\lambda_1 \right| = \left| \int_E \pi_n \, d\lambda_1 \right| \leq \lambda_1(E) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y así $\|\nu(E)\|_\infty \leq \lambda_1(E)$. En particular, ν es contablemente aditiva, λ_1-continua y de variación acotada.

A continuación probamos que f *no es escalarmente medible*. Identificamos $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mediante la biyección $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada por $\psi((a_n)) := \{n \in \mathbb{N} : \ a_n = 1\}$. Fijamos cualquier ultrafiltro no principal $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Es conocido que $\psi^{-1}(\mathscr{U}) \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ no es medible (véase la Sección 1.2). Definimos $x^{**} \in \ell_\infty^*$ mediante

$$x^{**}((c_n)) := \lim_{n \to \mathscr{U}} c_n \quad \text{para todo } (c_n) \in \ell_\infty.$$

Dado $(z_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o bien $\psi((z_n)) \in \mathscr{U}$, o bien $\psi((1 - z_n)) \in \mathscr{U}$ (porque $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro). En el primer caso se tiene $\lim_{n\to\mathscr{U}} z_n = 1$, mientras que en el segundo $\lim_{n\to\mathscr{U}} z_n = 0$. Por tanto, $x^{**} \circ f = \chi_{\mathscr{U}}$ no es medible y, en consecuencia, f no es escalarmente medible.

Finalmente, vamos a demostrar que ν *no es la integral indefinida de una función integrable Pettis*. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una función integrable Pettis $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \ell_\infty$ tal que $\nu = \nu_g$. Dado $n \in \mathbb{N}$, la igualdad (2.21) nos dice que

$$\int_E \langle g, e_n\rangle \, d\lambda_1 = \int_E \langle f, e_n\rangle \, d\lambda_1 \quad \text{para cada } E \in \mathscr{L}_1,$$

luego $\langle g, e_n\rangle = \langle f, e_n\rangle$ λ_1-a.e. Teniendo en cuenta que $\|x^*\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle x^*, e_n\rangle|$ para cada $x^* \in \ell_\infty$, se deduce que $g = f$ λ_1-a.e. y, por tanto, f es escalarmente medible, una contradicción. □

La primera parte del siguiente teorema se debe a Haydon [Hay76], mientras que la segunda fue demostrada por Musial y Ryll-Nardzewski en [MRN78] utilizando el hecho de que, *dados un subespacio cerrado $Y \subset X$ y una medida contablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow Y^*$ con variación acotada, siempre existe una medida contablemente aditiva con variación acotada $\nu' : \Sigma \longrightarrow X^*$ tal que $r \circ \nu' = \nu$, donde $r : X^* \longrightarrow Y^*$ denota el operador "restricción"*, véase [MRN78, Theorem 1]. Nosotros hemos optado por seguir los pasos de Matsuda [Mat83] y proporcionar una prueba más directa de *(ii)*.

Teorema 2.4.19. *Supongamos que X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1. Entonces:*

(i) la aplicación identidad $i : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ no es universalmente escalarmente medible;

(ii) X^* no tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým.

Demostración. Utilizamos las notaciones de la prueba de la Proposición 2.4.18. Sean $Y \subset X$ un subespacio isomorfo a ℓ^1 y $\phi_1 : \ell^1 \longrightarrow Y$ un isomorfismo. Consideramos la inclusión $i : Z \longrightarrow X$ y la composición $\phi := i \circ \phi_1$. Como el operador adjunto $\phi^* : X^* \longrightarrow \ell_\infty$ es suprayectivo, existe un $\delta > 0$ tal que $\delta B_{\ell_\infty} \subset \phi^*(B_{X^*})$ (por el Teorema de la Aplicación Abierta). Evidentemente, reemplazando el isomorfismo inicial ϕ_1 por $\delta^{-1}\phi_1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_{\ell_\infty} \subset \phi^*(B_{X^*})$.

En $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ coinciden la topología usual y la inducida como subespacio de (B_{ℓ_∞}, w^*). Teniendo en cuenta que ϕ^* es w^*-w^*-continuo, deducimos que $K := (\phi^*)^{-1}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \cap B_{X^*}$ es w^*-compacto. Consideramos la suprayección continua $\varphi := \phi^*|_K : K \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Como λ_1 es una medida de Radon en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, existe una medida de Radon $\mu_1 : \Sigma_1 \longrightarrow [0,1]$ en K tal que $\varphi^{-1}(E) \in \Sigma_1$ y $\lambda_1(E) = \mu_1(\varphi^{-1}(E))$ para cada $E \in \mathscr{L}_1$ (Proposición 1.3.4). Ahora podemos encontrar una medida de Radon μ_2 en (B_{X^*}, w^*) tal que $\mu_2(F) = \mu_1(F \cap K)$ para cada $F \in \mathrm{Borel}(B_{X^*}, w^*)$.

En primer lugar, vamos a demostrar que *i no es escalarmente medible respecto de μ_2*. En efecto, como la función "identidad" $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \ell_\infty$ no es escalarmente medible (véase la prueba de la Proposición 2.4.18), podemos encontrar un $\xi \in \ell_\infty^*$ tal que $\xi|_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ no es λ_1-medible. El hecho de que μ_1 es perfecta (por ser una medida de Radon) nos permite concluir que la composición $\xi \circ \varphi$ no es μ_1-medible, gracias a la Proposición 1.2.1. Por tanto, $\xi \circ \phi^*|_{B_{X^*}}$ no es μ_2-medible. Esto completa la demostración de *(i)*.

La prueba de *(ii)* es como sigue. Nótese que $i|_K$ es acotada y que la composición $\langle i|_K, x\rangle = x|_K$ es medible Borel para cada $x \in B_X$. Por tanto, $i|_K$ es integrable Gel'fand respecto de μ_1 y el Lema 1.8.16 nos dice que existe una medida finitamente aditiva $\nu_1 = \gamma_{i|_K} : \Sigma_1 \longrightarrow X^*$ tal que

$$\nu_1(A)(x) = \int_A \langle x^*, x\rangle \, d\mu_1(x^*) \quad \text{para cada } A \in \Sigma_1 \text{ y cada } x \in X. \tag{2.22}$$

Consideramos la medida finitamente aditiva $\nu' : \mathscr{L}_1 \longrightarrow X^*$ dada por $\nu'(E) := \nu_1(\varphi^{-1}(E))$. Es fácil ver, a partir de (2.22), que $\|\nu'(E)\| \leq \lambda_1(E)$ para todo $E \in \mathscr{L}_1$. Por tanto, ν' es contablemente aditiva, λ_1-continua y tiene variación acotada. Vamos a demostrar que *ν' no es la integral indefinida de una función integrable Pettis de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en X^**. En efecto, para cada $y \in \ell^1$ y cada $E \in \mathscr{L}_1$, podemos aplicar (2.22) y un cambio de variable ordinario para deducir

$$\begin{aligned}\langle \phi^*(\nu'(E)), y\rangle = \langle \nu_1(\varphi^{-1}(E)), \phi(y)\rangle &= \int_{\varphi^{-1}(E)} \langle x^*, \phi(y)\rangle \, d\mu_1(x^*) \\ &= \int_{\varphi^{-1}(E)} \langle \phi^*(x^*), y\rangle \, d\mu_1(x^*) = \int_E \langle f, y\rangle \, d\lambda_1 = \langle \nu(E), y\rangle,\end{aligned}$$

donde $\nu : \mathscr{L}_1 \longrightarrow \ell_\infty$ es la medida contablemente aditiva construida en la demostración de la Proposición 2.4.18. Sabemos que $\nu = \phi^* \circ \nu'$ no es la integral indefinida de una función integrable

Pettis de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en ℓ_∞. Por tanto, ν' tampoco es la integral indefinida de una función integrable Pettis, como se quería demostrar. $\square$

Para demostrar el recíproco de cada una de las partes del Teorema 2.4.19 necesitamos los dos resultados auxiliares que incluimos a continuación; podemos encontrarlos en [Din67, §11, Section 6] (véase también [Dul89, Proposition 6.2]) y [Dul89, Lemma 5.9], respectivamente.

Proposición 2.4.20 (Dinculeanu). *Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X^*$ una medida contablemente aditiva para la que existe una constante $M > 0$ tal que $|\nu|(E) \leq M\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$. Entonces, fijado un lifting τ en Σ, existe una función $f : \Omega \longrightarrow X^*$ con las siguientes propiedades:*

(i) $\|f(t)\| \leq M$ *para cada* $t \in \Omega$;

(ii) para cada $x \in X$, la composición $\langle f,x\rangle$ es medible, coincide con $\rho_\tau(\langle f,x\rangle)$ y verifica

$$\nu(E)(x) = \int_E \langle f,x\rangle \, d\mu \quad \textit{para cada } E \in \Sigma.$$

Demostración. Fijamos $x \in X$. La composición $\langle \nu,x\rangle$ es una medida contablemente aditiva que satisface $|\langle \nu,x\rangle|(E) \leq M\|x\|\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$. Por el teorema clásico de Radon-Nikodým, véase e.g. [Fre01, 232F], existe $h_x \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que

$$\nu(E)(x) = \int_E h_x \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \Sigma. \tag{2.23}$$

En particular, $\int_E |h_x| \, d\mu = |\langle \nu,x\rangle|(E) \leq M\|x\|\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$ y, por tanto, $|h_x| \leq M\|x\|$ μ-a.e. Se sigue que $h_x \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ y que $|\rho_\tau(h_x)(t)| \leq M\|x\|$ para cada $t \in \Omega$ (véase la *Afirmación* en la prueba del Lema 1.10.6).

Dado $t \in \Omega$, podemos definir un funcional lineal $f(t) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(t)(x) := \rho_\tau(h_x)(t)$. Nótese que $\sup_{x \in B_X} |f(t)(x)| = \sup_{x \in B_X} |\rho_\tau(h_x)(t)| \leq M$, luego $f(t) \in X^*$ y $\|f(t)\| \leq M$.

Para acabar, veamos que la función $f : \Omega \longrightarrow X^*$ satisface *(ii)*. En efecto, para cada $x \in X$, tenemos la igualdad $\langle f,x\rangle = \rho_\tau(h_x) = h_x$ μ-a.e. Así, $\langle f,x\rangle$ es medible y verifica $\rho_\tau(\langle f,x\rangle) = \rho_\tau(h_x) = \langle f,x\rangle$. Además, en virtud de (2.23), se cumple $\int_E \langle f,x\rangle \, d\mu = \nu(E)(x)$ para cada $E \in \Sigma$. Esto completa la demostración. $\square$

Lema 2.4.21. *Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida contablemente aditiva, μ-continua y con variación σ-finita. Entonces existe una sucesión disjunta (A_n) en Σ con $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n > 0$ tal que $|\nu|(E) \leq M_n\mu(E)$ para todo $E \in \Sigma_{E_n}$.*

Demostración. Evidentemente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que ν tiene variación acotada. Como además ν es contablemente aditiva, su variación $|\nu|$ es una medida contablemente aditiva, véase e.g. [DU77, Proposition 9, p. 3]. Dado que $|\nu|(E) = 0$ cuando $\mu(E) = 0$, el clásico teorema de Radon-Nikodým, véase e.g. [Fre01, 232F], asegura la existencia de una función medible $h : \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ cumpliendo $|\nu|(E) = \int_\Omega h \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma$. Definimos $A_n = \{t \in \Omega : \; n-1 \leq h(t) < n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que (A_n) satisface las propiedades requeridas. $\square$

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para demostrar el principal resultado de esta sección. Vamos a seguir las ideas empleadas por Musial [Mus83, Mus84] (alternativamente, véase [Mus91, Theorem 12.1] ó [Mus02, Theorem 9.7]) en su demostración de que los duales de espacios de Banach sin subespacios isomorfos a ℓ^1 siempre tienen la WRNP.

Teorema 2.4.22 ([CR05]). *Supongamos que X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1, y sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X^*$ una medida contablemente aditiva, μ-continua y con variación σ-finita. Entonces existe una función integrable Birkhoff $f : \Omega \longrightarrow X^*$ tal que $\nu = \nu_f$.*

Demostración. Distinguimos dos casos.

Caso particular.- Existe una constante $M > 0$ tal que $|\nu|(E) \leq M\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$. Fijamos un lifting τ en Σ. Por la Proposición 2.4.20, existe una función $f : \Omega \longrightarrow X^*$ con las siguientes propiedades:

(i) $\|f(t)\| \leq M$ para cada $t \in \Omega$;

(ii) para cada $x \in X$, la composición $\langle f,x\rangle$ es medible, coincide con $\rho_\tau(\langle f,x\rangle)$ y se tiene la igualdad $\nu(E)(x) = \int_E \langle f,x\rangle \, d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.

Obsérvese que $Z_{f,B_X} = \{\langle f,x\rangle : x \in B_X\} \subset \ell_\infty(\Omega)$ *no contiene ℓ^1-sucesiones*. En efecto, si esto no es así, entonces existen un $\delta > 0$ y una sucesión (x_n) en B_X tales que

$$\delta \cdot \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|\Big) \leq \Big\|\sum_{i=1}^n a_i \langle f,x_i\rangle\Big\|_\infty = \Big\|\langle f, \sum_{i=1}^n a_i x_i\rangle\Big\|_\infty \leq M\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. Por tanto, (x_n) es una ℓ^1-sucesión en X y, en consecuencia, X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 (Lema 2.4.3), lo que contradice la hipótesis.

En vista de (i) y (ii), Z_{f,B_X} es una familia uniformemente acotada de funciones medibles que satisface $\rho_\tau(Z_{f,B_X}) = Z_{f,B_X}$. Además, no contiene ℓ^1-sucesiones, luego podemos aplicar el Corolario 2.4.13 para deducir que Z_{f,B_X} tiene la propiedad de Bourgain. Por tanto, f es integrable Birkhoff (Corolario 2.3.3). Finalmente, para cada $E \in \Sigma$, tanto $\nu(E)$ como $\nu_f(E)$ pertenecen a X^* y satisfacen

$$\nu(E)(x) = \int_E \langle f,x\rangle \, d\mu = \nu_f(E)(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Esto completa la prueba del *Caso particular*.

Caso general.- Por el Lema 2.4.21, existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ de manera que, para cada n, existe una constante $M_n > 0$ tal que $|\nu|(E) \leq M_n\mu(E)$ para todo $E \in \Sigma_{A_n}$. El *Caso particular* asegura la existencia de funciones integrables Birkhoff $f_n : A_n \longrightarrow X^*$ tales que $\nu(E) = (B)\int_E f|_{A_n} \, d\mu_E$ para todo $E \in \Sigma_{A_n}$. Definimos $f : \Omega \longrightarrow X$ mediante $f(t) := f_n(t)$ para cada $t \in A_n$ y cada n.

Por un lado, f es integrable Birkhoff. En efecto, esto se sigue del Lema 2.1.14, puesto que las restricciones $f|_{A_n} = f_n$ son integrables Birkhoff y, para cualquier partición contable Γ de Ω en Σ más fina que (A_n), la serie

$$\sum_{E\in\Gamma} (B)\int_E f|_E \, d\mu_E = \sum_{E\in\Gamma} \nu(E)$$

es incondicionalmente convergente. Por otra parte, el hecho de que ν_f es contablemente aditiva asegura

$$\nu(E) = \sum_n \nu(E \cap A_n) = \sum_n \nu_f(E \cap A_n) = \nu_f(E) \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

Esto finaliza la demostración. □

Corolario 2.4.23. *Supongamos que X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1. Entonces toda función integrable Pettis $g : \Omega \longrightarrow X^*$ es escalarmente equivalente a una función integrable Birkhoff $f : \Omega \longrightarrow X^*$.*

Demostración. Como ν_g es contablemente aditiva, μ-continua y tiene variación σ-finita (Teorema 1.8.7 y Corolario 1.8.11), podemos aplicar el Teorema 2.4.22 para deducir la existencia de una función integrable Birkhoff $f : \Omega \longrightarrow X^*$ tal que $\nu_f = \nu_g$. Por tanto, fijado $x^{**} \in X^{**}$, se tiene la igualdad

$$\int_E x^{**} \circ f \, d\mu = x^{**}(\nu_f(E)) = x^{**}(\nu_g(E)) = \int_E x^{**} \circ g \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \Sigma,$$

luego $x^{**} \circ f = x^{**} \circ g$ μ-a.e. Se sigue que f y g son escalarmente equivalentes. □

Como ya sabemos, integrabilidad Birkhoff e integrabilidad Pettis son equivalentes para funciones con valores en espacios de Banach separables (Corolario 2.1.17). En el caso de espacios de Banach duales, disponemos de la siguiente extensión de dicho resultado.

Corolario 2.4.24. *Supongamos que X es separable y no tiene subespacios isomorfos a ℓ^1. Entonces una función $f : \Omega \longrightarrow X^*$ es integrable Birkhoff si y sólo si es integrable Pettis.*

Demostración. Como X es separable, lo mismo ocurre con $(B_{X^{**}}, w^*)$. Por tanto, cualquier función escalarmente nula $h : \Omega \longrightarrow X^*$ se anula en casi todo punto. El resultado se sigue ahora del Corolario 2.4.23. □

Recordemos que existen espacios de Banach separables sin subespacios isomorfos a ℓ^1 cuyo dual no es separable; por ejemplo, el *James tree space JT*, véase e.g. [Dul89, Chapter VIII].

Un resultado de Haydon [Hay76] afirma que X *no contiene subespacios isomorfos a* ℓ^1 *si y sólo si la aplicación identidad $i : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ es universalmente integrable Pettis (resp. universalmente escalarmente medible)*. Ahora podemos mejorar la condición necesaria.

Corolario 2.4.25. *Supongamos que X no tiene subespacios isomorfos a ℓ^1. Entonces la aplicación identidad $i : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ es universalmente integrable Birkhoff.*

Demostración. La familia $Z_{i,B_X} = \{x|_{B_{X^*}} : x \in B_X\} \subset C(B_{X^*}, w^*)$ es uniformemente acotada y no contiene ℓ^1-sucesiones (porque X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1). Por tanto, podemos aplicar el Corolario 2.4.12 para deducir que Z_{i,B_X} tiene la propiedad de Bourgain (equivalentemente, i es integrable Birkhoff; Corolario 2.3.3) respecto de cada medida de Radon en (B_{X^*}, w^*), como se quería demostrar. □

Corolario 2.4.26. *Supongamos que X no tiene subespacios isomorfos a ℓ^1. Sean μ una medida de Radon en (B_{X^*}, w^*) y $A \subset B_{X^{**}}$. Entonces para cada $x^{**} \in \overline{A}^{w^*}$ existe una sucesión (x_n^{**}) en A tal que*

$$\lim_n x_n^{**}|_{B_{X^*}} = x^{**}|_{B_{X^*}} \quad \mu\text{-a.e.}$$

Demostración. Como acabamos de ver, la familia Z_{i,B_X} tiene la propiedad de Bourgain respecto de μ. Por tanto, lo mismo ocurre con $\overline{Z_{i,B_X}}^{\mathfrak{T}_p} = Z_i = \{x^{**}|_{B_{X^*}} : x^{**} \in B_{X^{**}}\}$. El resultado se sigue ahora del Teorema 2.2.3. □

Es conocido que, al igual que ocurre con la RNP, la propiedad débil de Radon-Nikodým se puede caracterizar en términos de "representabilidad" de operadores, véase e.g. [Dul89, Lemma 5.9]. En la Proposición 2.4.29 proporcionamos una prueba de este hecho, cuyo punto de partida es la siguiente observación elemental.

Lema 2.4.27. *(i) Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida contablemente aditiva para la que existe una constante $M > 0$ tal que $|\nu|(E) \leq M\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$. Entonces existe un único operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ tal que $T(\chi_E) = \nu(E)$ para cada $E \in \Sigma$.*

(ii) Sea $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ un operador. Entonces la función $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ definida por la fórmula $\nu(E) := T(\chi_E)$ es una medida contablemente aditiva que cumple $|\nu|(E) \leq \|T\|\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$.

Demostración. La prueba de *(ii)* es inmediata. Para demostrar *(i)*, consideramos el subespacio $S \subset L^1(\mu)$ formado por todas las (clases de equivalencia de) funciones reales simples. Como ν es μ-continua, podemos definir una aplicación lineal $T_1 : S \longrightarrow X$ tal que $T_1(\chi_E) = \nu(E)$ para cada $E \in \Sigma$. Obsérvese que, dados $E_1, \ldots, E_p \in \Sigma$ disjuntos dos a dos y $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\Big\|T\Big(\sum_{i=1}^p a_i\chi_{E_i}\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^p a_i\nu(E_i)\Big\| \leq \sum_{i=1}^p |a_i||\nu|(E_i) \leq M\Big(\sum_{i=1}^p |a_i|\mu(E_i)\Big) = M\Big\|\sum_{i=1}^p a_i\chi_{E_i}\Big\|_1.$$

Por tanto, $T_1 : S \longrightarrow X$ es continua. Como S es denso en $L^1(\mu)$, existe una única aplicación lineal continua $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ que extiende a T_1. Esto completa la demostración. □

Recordamos que una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es *escalarmente acotada* si existe una constante $M > 0$ tal que, para cada $x^* \in B_{X^*}$, se tiene $|x^* \circ f| \leq M$ μ-a.e.

Definición 2.4.28. *Decimos que un operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ es representable Pettis (resp. Birkhoff) si existe una función $f : \Omega \longrightarrow X$ escalarmente acotada e integrable Pettis (resp. Birkhoff) tal que*

$$\langle x^*, T(g)\rangle = \int_\Omega g \cdot \langle x^*, f\rangle \, d\mu \quad \text{para cada } x^* \in X^* \text{ y cada } g \in L^1(\mu).$$

Proposición 2.4.29. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X tiene la propiedad débil de Radon-Nikodým respecto de μ;

(ii) todo operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$ es representable Pettis.

Demostración. *(i)⇒(ii)* Fijamos un operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X$. La función $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ definida por $\nu(E) := T(\chi_E)$ es una medida contablemente aditiva que satisface $|\nu|(E) \leq \|T\|\mu(E)$ para cada $E \in \Sigma$ (Lema 2.4.27 *(ii)*). Como X tiene la μ-WRNP, existe una función integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que

$$\langle x^*, T(\chi_E)\rangle = \langle x^*, \nu(E)\rangle = \int_E \langle x^*, f\rangle \, d\mu = \int_\Omega \chi_E \cdot \langle x^*, f\rangle \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \Sigma \text{ y cada } x^* \in X^*. \tag{2.24}$$

Fijamos $x^* \in B_{X^*}$. La igualdad anterior asegura que

$$\int_E |\langle x^*, f\rangle| \, d\mu = |x^* \circ \nu|(E) \leq |\nu|(E) \leq \|T\|\mu(E) \quad \text{para cada } E \in \Sigma,$$

luego $|x^* \circ f| \leq \|T\|$ μ-a.e. Consideramos el elemento $R_{x^*} \in L^1(\mu)^*$ definido mediante la fórmula $R_{x^*}(g) := \int_\Omega g \cdot \langle x^*, f\rangle \, d\mu$. La igualdad (2.24) muestra que R_{x^*} coincide con $x^* \circ T$ sobre el subespacio denso de $L^1(\mu)$ formado por todas las (clases de equivalencia de) funciones reales simples. Por tanto, $R_{x^*} = x^* \circ T$. Esto demuestra que T es representable Pettis.

Recíprocamente, veamos *(ii)⇒(i)*. Fijamos una medida contablemente aditiva y μ-continua $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ con variación σ-finita. Por el Lema 2.4.21, existe una sucesión disjunta (A_n) en Σ con $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n > 0$ tal que $|\nu_n|(E) \leq M_n\mu(E)$ para todo $E \in \Sigma$, donde ν_n es la medida contablemente aditiva definida por $\nu_n(E) := \nu(E \cap A_n)$.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y consideramos el único operador $T_n : L^1(\mu) \longrightarrow X$ tal que $T_n(\chi_E) = \nu_n(E)$ para todo $E \in \Sigma$ (Lema 2.4.27 *(ii)*). Por hipótesis, existe una función escalarmente acotada e integrable Pettis $f_n : \Omega \longrightarrow X$ cumpliendo

$$(x^* \circ \nu)(E \cap A_n) = (x^* \circ \nu_n)(E) = \langle x^*, T_n(\chi_E)\rangle = \int_E x^* \circ f_n \, d\mu \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

Definimos $f : \Omega \longrightarrow X$ mediante $f := \sum_{n=1}^\infty f_n\chi_{A_n}$. Dado $x^* \in B_{X^*}$, es claro que $x^* \circ f$ es medible y satisface

$$\int_\Omega |x^* \circ f| \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} |x^* \circ f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty |x^* \circ \nu|(A_n) = |x^* \circ \nu|(\Omega) < +\infty,$$

luego $x^* \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Además,

$$\int_E x^* \circ f \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E\cap A_n} x^* \circ f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty (x^* \circ \nu)(E \cap A_n) = x^*(\nu(E)) \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

Por tanto, f es integrable Pettis y $\nu_f = \nu$. La prueba ha finalizado. □

Finalizamos el apartado traduciendo el Teorema 2.4.22 en términos de la representabilidad *Birkhoff* de operadores $T : L^1(\mu) \longrightarrow X^*$.

Corolario 2.4.30 ([CR05]). *Supongamos que X no tiene subespacios isomorfos a ℓ^1. Entonces todo operador $T : L^1(\mu) \longrightarrow X^*$ es representable Birkhoff.*

Demostración. Basta imitar la prueba de la implicación *(i)⇒(ii)* de la Proposición 2.4.29, utilizando ahora el *Caso particular* aislado en la demostración del Teorema 2.4.22. Nótese que, de hecho, la función f así obtenida es *acotada*. □

Cabe mencionar que Saab probó en [Saa88, Proposition 9] (utilizando ideas de [RS85]) que X^* tiene la WRNP si y sólo si para cualquier operador $T : L^1[0,1] \longrightarrow X^*$ existe una función acotada $f : [0,1] \longrightarrow X^{***}$ tal que Z_f tiene la propiedad de Bourgain y se cumple la igualdad $\langle x^{**}, T(g)\rangle = \int_\Omega g\langle x^{**}, f\rangle \, d\mu$ para cada $x^{**} \in X^{**}$ y cada $g \in L^1(\mu)$.

2.5. Funciones integrables Pettis que no son integrables Birkhoff: el teorema de la convergencia dominada

Como ya mencionamos en el Apartado 2.1.2, Pettis [Pet38] probó que su noción de integrabilidad coincide con la de Birkhoff para funciones con valores en espacios de Banach *separables* (Corolario 2.1.17), dejando abierto el caso general. Poco después, Phillips [Phi40] dio un ejemplo de una función integrable Pettis, con valores en $\ell_\infty(\mathfrak{c})$, que no es integrable Birkhoff. Curiosamente, esta función fue utilizada de nuevo por Riddle y Saab [RS85] para mostrar que, dada una función acotada integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X^*$, la familia $\{\langle x, f\rangle : x \in B_X\}$ no tiene, en general, la propiedad de Bourgain.

En esta sección estudiamos la existencia de funciones integrables Pettis que no son integrables Birkhoff dentro de la clase de los espacios de Banach *débilmente Lindelöf determinados (WLD)*. La existencia de bases de Markushevich en tales espacios (Sección 1.4) es fundamental para alcanzar nuestros objetivos. Esencialmente, mostramos que la coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis caracteriza la separabilidad dentro de esta clase de espacios (Teoremas 2.5.1 y 2.5.2). Además, un caso particular de nuestras construcciones proporciona un contraejemplo al análogo del *teorema de la convergencia dominada* para la integral de Birkhoff (Ejemplo 2.5.4). Esta característica "negativa" de la integral de Birkhoff no la comparten las integrales de Bochner y Pettis, para las que dicho resultado sí es válido (para las topologías de la norma y débil, respectivamente), véase e.g. [DU77, Theorem 3, p. 45] y [Mus91, Theorem 8.1].

Teorema 2.5.1 ([Rod05]). *Si X es WLD y no es separable, entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y una función acotada integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.*

Demostración. Por los Teoremas 1.4.4 y 1.4.3, existe una base de Markushevich en X, digamos $\{(y_i, y_i^*)\}_{i\in I}$, tal que $\sup_{i\in I} \|y_i\| \cdot \|y_i^*\| < +\infty$. Definimos $x_i = \|y_i^*\| \cdot y_i \in X$ y $x_i^* = \|y_i^*\|^{-1} \cdot y_i^* \in X^*$ para cada $i \in I$. Entonces $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ es una base de Markushevich en X tal que $x_i^* \in B_{X^*}$ para cada $i \in I$ y $\sup_{i\in I} \|x_i\| < +\infty$.

Como $X = \overline{\operatorname{span}}\{x_i : i \in I\}$ no es separable, el conjunto I no es contable. Definimos $\Omega := I$ y consideramos la σ-algebra Σ en Ω formada por todos los conjuntos $A \subset \Omega$ para los que A ó $\Omega \setminus A$ es contable, con la medida de probabilidad completa μ dada por $\mu(A) = 0$ si A es contable, $\mu(A) = 1$ si $\Omega \setminus A$ es contable. Definimos $f : \Omega \longrightarrow X$ como $f(i) = x_i$ para cada $i \in \Omega$. Obviamente, f es acotada. Además, como X es WLD, para cada $x^* \in X^*$ el conjunto $\{i \in I : x^*(x_i) \neq 0\}$ es contable (Teorema 1.4.4). Por tanto, f es escalarmente nula, luego integrable Pettis.

Por otro lado, f no es integrable Birkhoff. En efecto, si lo fuera, entonces existiría una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que

$$\Big\|\sum_n \mu(A_n) f(t_n) - \sum_n \mu(A_n) f(t_n')\Big\| \leq \frac{1}{2} \tag{2.25}$$

para cualesquiera elecciones $t_n, t_n' \in B_n$. Pero, como Ω es un átomo de μ, todos los B_n's excepto uno (digamos B_N) tienen medida 0. La desigualdad (2.25) se puede leer ahora como

$$\frac{1}{2} \geq \sup_{i,j \in B_N} \big\|f(i) - f(j)\big\| = \sup_{i,j \in B_N} \big\|x_i - x_j\big\| \geq \sup_{i,j \in B_N} x_i^*(x_i - x_j) = \sup_{i,j \in B_N} (1 - \delta_{i,j}),$$

lo que contradice el hecho de que B_N tiene dos elementos distintos (de hecho, B_N no es numerable). Por tanto, f no es integrable Birkhoff, como se quería demostrar. □

Nuestra prueba original del siguiente resultado se inspiraba en el ejemplo dado por Kadets y Tseytlin [KT00] de una función integrable Pettis que no es integrable Birkhoff. Aquí presentamos una construcción diferente basada en las ideas del Ejemplo 2.3.20.

Teorema 2.5.2 ([Rod05]). *Si X es WLD y $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) \geq \mathfrak{c}$, entonces existe una función acotada integrable Pettis $f : [0,1] \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.*

Demostración. Como en la prueba del Teorema 2.5.1, el espacio X tiene una base de Markushevich $\{(x_i, x_i^*)\}_{i \in I}$ tal que $x_i^* \in B_{X^*}$ para cada $i \in I$ y $\sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty$. Como $X = \overline{\mathrm{span}}\{x_i : i \in I\}$ y $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) \geq \mathfrak{c}$, la cardinalidad de I es mayor o igual que $\mathfrak{c}$ y podemos fijar una aplicación inyectiva $\varphi : \mathfrak{c} \longrightarrow I$.

Consideramos la familia $\{\mathscr{E}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de todas las colecciones finitas (no vacías) de elementos de $\mathrm{Borel}([0,1])$ con medida de Lebesgue positiva. Por el Lema 2.3.19, existe una familia $(J_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ de subconjuntos finitos de $[0,1]$, disjuntos dos a dos, tales que $J_\alpha \cap E \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ y cada $E \in \mathscr{E}_\alpha$. Definimos la función $f : [0,1] \longrightarrow X$ mediante

$$f(t) = \begin{cases} x_{\varphi(\alpha)} & \text{si } t \in J_\alpha,\ \alpha < \mathfrak{c}, \\ 0 & \text{si } t \notin \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} J_\alpha. \end{cases} \tag{2.26}$$

A continuación comprobamos que la función acotada f satisface las propiedades requeridas.

Para ver que *f es integrable Pettis*, fijamos un $x^* \in X^*$. Por el Teorema 1.4.4, el conjunto $\{i \in I :\ x^*(x_i) \neq 0\}$ es contable. Como φ es inyectiva y los J_α's son finitos, resulta que el conjunto $\{t \in [0,1] :\ (x^* \circ f)(t) \neq 0\}$ también es contable. Por tanto, f es escalarmente nula y, en particular, integrable Pettis.

Por otra parte, *f no es integrable Birkhoff*. En efecto, tenemos $x^*_{\varphi(\alpha)} \circ f = \chi_{J_\alpha} \in Z_f$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Como la familia $\{\chi_{J_\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain (véase la prueba del Ejemplo 2.3.20), se sigue de la Proposición 2.3.1 que f no es integrable Birkhoff. Esto completa la demostración. □

La función f construida en la prueba del Teorema 2.5.2 es incluso *universalmente integrable Pettis*, como consecuencia del siguiente

Lema 2.5.3. *Sea $(T,\mathfrak{T},\Sigma,\mu)$ un espacio de medida topológico tal que $(T,\mathfrak{T})$ es Hausdorff. Sea $f:T\longrightarrow X$ una función acotada tal que, para cada $x^*\in X^*$, el conjunto $\{t\in T:(x^*\circ f)(t)\neq 0\}$ es contable. Entonces f es integrable Pettis.*

Demostración. El conjunto $A:=\{t\in T:\mu(\{t\})>0\}$ es contable y pertenece a $\mathrm{Borel}(T,\mathfrak{T})\subset\Sigma$. Como la restricción $f|_A$ es acotada y sólo toma una cantidad contable de valores, se sigue que es integrable Bochner (Proposición 1.8.3) y, por tanto, integrable Pettis respecto de μ_A. Por otra parte, para cada $x^*\in X^*$, la composición $x^*\circ f|_{\Omega\setminus A}$ se anula en todo $\Omega\setminus A$ salvo en un subconjunto contable. Esto implica que $f|_{\Omega\setminus A}$ es escalarmente nula y, así, integrable Pettis respecto de $\mu_{\Omega\setminus A}$. Por tanto, f es integrable Pettis respecto de μ, como se quería demostrar. □

A continuación mostramos un ejemplo que deja claro que, para la integral de Birkhoff, el análogo del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue no es cierto en general.

Ejemplo 2.5.4 ([Rod05]). *Existe una sucesión uniformemente acotada de funciones integrables Birkhoff $f_n:[0,1]\longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ que converge puntualmente a una función $f:[0,1]\longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ que no es integrable Birkhoff.*

Demostración. Sea $f:[0,1]\longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ la función asociada mediante la fórmula (2.26) a la base de Markushevich usual $\{(e_\alpha,e^*_\alpha)\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ en $c_0(\mathfrak{c})$. La prueba del Teorema 2.5.2 revela que f no es integrable Birkhoff. Escribimos $J_\alpha=\{t_{\alpha,1},\dots,t_{\alpha,n(\alpha)}\}$ para cada $\alpha<\mathfrak{c}$. Dado $n\in\mathbb{N}$, definimos

$$D_n:=\{t_{\alpha,n}:n(\alpha)\geq n\},\quad E_n:=\bigcup_{k=1}^{n}D_k,\quad h_n:=f\chi_{D_n},\quad f_n:=f\chi_{E_n}=\sum_{k=1}^{n}h_k.$$

Entonces (f_n) es una sucesión uniformemente acotada que converge puntualmente a f. Para demostrar que cada f_n es integrable Birkhoff basta comprobar que cada h_n es integrable Birkhoff. Para ello, fijamos $n\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon>0$. Tomamos cualquier partición finita $\{C_1,\dots,C_m\}$ de $[0,1]$ formada por conjuntos medibles Lebesgue tales que $\max_{1\leq k\leq m}\lambda(C_k)\leq\varepsilon$. Obsérvese que, para cualesquiera elecciones $t_k\in C_k$, se tiene

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m}\lambda(C_k)h_n(t_k)\Big\|_\infty\leq\max_{1\leq k\leq m}\lambda(C_k)\leq\varepsilon,$$

puesto que $h_n|_{D_n}=f|_{D_n}$ es inyectiva. Por tanto, h_n es integrable Birkhoff. □

Observación 2.5.5. Es claro que las funciones f_n construidas en la demostración del Ejemplo 2.5.4 son incluso integrables Riemann.

Bajo el Axioma M, la hipótesis “$\mathrm{dens}(X,\|\cdot\|)\geq\mathfrak{c}$” del Teorema 2.5.2 no se puede debilitar. Para verlo necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.5.6 ([Rodb]). *Supongamos que* $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \kappa(\mu)$ *y que* (X, w) *es compacto en medida. Entonces toda función escalarmente medible* $f : \Omega \longrightarrow X$ *es fuertemente medible.*

Demostración. Como (X, w) es compacto en medida y f es escalarmente medible, existe una función fuertemente medible $g : \Omega \longrightarrow X$ que es escalarmente equivalente a f (Corolario 1.7.12). Definimos la función $h = f - g$ y fijamos un conjunto w^*-denso $C \subset B_{X^*}$ con $\#(C) < \kappa(\mu)$. Como h es escalarmente nula y $\|h(t)\| = \sup\{|(x^* \circ h)(t)| : \ x^* \in C\}$ para cada $t \in \Omega$, deducimos que h se anula μ-a.e. Por tanto, f es fuertemente medible. $\square$

Corolario 2.5.7. *(Axioma M) Supongamos que* $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \mathfrak{c}$ *y que* (X, w) *es compacto en medida. Entonces toda función escalarmente medible* $f : [0,1] \longrightarrow X$ *es fuertemente medible.*

Corolario 2.5.8 ([Rodb]). *(Axioma M) Supongamos que X es WLD. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) < \mathfrak{c}$;
(ii) toda función escalarmente medible $f : [0,1] \longrightarrow X$ *es fuertemente medible;*
(iii) toda función integrable Pettis $f : [0,1] \longrightarrow X$ *es integrable Birkhoff;*
(iv) toda función acotada integrable Pettis $f : [0,1] \longrightarrow X$ *es integrable Birkhoff.*

Demostración. X es compacto en medida para su topología débil y se tienen las igualdades

$$\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) = \mathrm{weight}(B_{X^*}, w^*) = \mathrm{dens}(X, \|\cdot\|)$$

(véase la Sección 1.4). $\square$

Finalizamos el apartado estudiando la existencia de funciones escalarmente medibles f, con valores en espacios de Banach WLD, cuya "norma" $\|f\|$ no es medible (compárese con el Corolario 2.3.26).

Proposición 2.5.9 ([Rodb]). *Supongamos que X es WLD y que* $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) \geq \mathfrak{c}$. *Entonces para cada* $\phi \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ *existe una función escalarmente nula* $f : [0,1] \longrightarrow X$ *tal que* $\|f\| = |\phi|$.

Demostración. Como X es WLD, tiene una base de Markushevich $\{(x_i, x_i^*)\}_{i \in I}$ (Teorema 1.4.4). Normalizando, podemos suponer que $\|x_i\| = 1$ para cada $i \in I$. Dado que $\#(I) \geq \mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) \geq \mathfrak{c}$, existe una aplicación inyectiva $\varphi : [0,1] \longrightarrow I$. Definimos una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ mediante $f(t) := \phi(t) x_{\varphi(t)}$ para cada $t \in [0,1]$. Es claro que $\|f\| = |\phi|$ y que f es escalarmente nula (gracias a la última afirmación del Teorema 1.4.4). La prueba ha finalizado. $\square$

Corolario 2.5.10. *(Axioma M) Supongamos que X es WLD. Entonces las condiciones (i)–(iv) del Corolario 2.5.8 son equivalentes a:*

(v) para toda función escalarmente medible $f : [0,1] \longrightarrow X$, *la función* $\|f\|$ *es medible.*

Capítulo 3

Las integrales de Birkhoff y McShane respecto de medidas vectoriales

A lo largo de este capítulo, X e Y son espacios de Banach y (Ω,Σ) es un espacio medible.

Los primeros intentos de establecer una teoría de *integración de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales* se remontan a los orígenes de los espacios de Banach, véase [Hil53]. En esta línea, el método de Bartle [Bar56], posteriormente generalizado por Dobrakov [Dob70a], es quizás el más utilizado. La noción de integrabilidad de Bartle-Dobrakov considera exclusivamente funciones "fuertemente medibles", es decir, funciones que podemos aproximar en "casi todo punto" por una sucesión de funciones simples. Para construir la integral, en esta teoría se reemplaza el producto por escalares $\mathbb{R}\times X \longrightarrow X$ por la aplicación bilineal continua canónica $\mathscr{L}(X,Y)\times X \longrightarrow Y$, de manera que la integral de una función simple $f=\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_{A_i}$ respecto de una medida vectorial $\mu:\Sigma\longrightarrow\mathscr{L}(X,Y)$ se define como el vector $\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)(x_i)\in Y$.

En este capítulo analizamos dos métodos de integración de funciones vectoriales, no necesariamente fuertemente medibles, respecto de medidas vectoriales. Por un lado, estudiamos la *S^*-integral* de Dobrakov [Dob88], que, inspirada en los trabajos de Kolmogorov [Kol30, Tik91] sobre la teoría de la integración, resulta ser la extensión natural de la integral de Birkhoff a este contexto. Por otro lado, consideramos la correspondiente generalización de la llamada *integral de McShane* [McS69, Fre95]. La mayor parte de los resultados originales que incluimos en este capítulo están tomados de nuestros artículos [Rodc, Rodd].

3.1. Preliminares

Esta sección está dedicada fundamentalmente a introducir la noción de *semivariación contextual* de una medida con valores en $\mathscr{L}(X,Y)$ (Apartado 3.1.1), que generaliza el concepto de semivariación de una medida vectorial y ha sido empleada como herramienta auxiliar dentro de las teorías de integración de Bartle y Dobrakov (Apartado 3.1.2).

3.1.1. Semivariación contextual de una medida vectorial

Definición 3.1.1. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva. La semivariación contextual de μ es la función $\hat{\mu} : \Sigma \longrightarrow [0,+\infty]$ definida por*

$$\hat{\mu}(E) = \sup \Big\| \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)(x_i) \Big\|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas $(E_i)_{i=1}^n$ de E en Σ y todas las colecciones finitas $(x_i)_{i=1}^n$ en B_X.

La siguiente proposición resume algunas propiedades elementales de la semivariación contextual que utilizaremos frecuentemente durante este capítulo.

Proposición 3.1.2. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva. Entonces:*

(i) $\|\mu\|(E) \leq \hat{\mu}(E) \leq |\mu|(E)$ *para cada* $E \in \Sigma$*;*
(ii) $\hat{\mu}(E) \leq \hat{\mu}(F)$ *para cada* $E,F \in \Sigma$ *con* $E \subset F$*;*
(iii) $\hat{\mu}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \hat{\mu}(A_n)$ *para cada sucesión* (A_n) *en* Σ*.*

Demostración. Para ver *(i)* fijamos $E \in \Sigma$. De las propias definiciones se sigue directamente la desigualdad $\hat{\mu}(E) \leq |\mu|(E)$. Tomamos ahora una partición finita $E_1,\ldots,E_n$ de E en Σ y $a_i \in [-1,1]$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \Big\| = \sup_{x \in B_X} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)(x) \Big\| = \sup_{x \in B_X} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)(a_i x) \Big\| \leq \hat{\mu}(E).$$

Por tanto, $\|\mu\|(E) \leq \hat{\mu}(E)$ (aplicamos la Proposición 1.6.4 *(ii)*), como se quería demostrar.

La propiedad *(ii)* es inmediata. Finalmente, consideramos una sucesión (A_n) en Σ. En vista de *(ii)*, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$. Tomamos una partición finita $E_1,\ldots,E_k$ de $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ en Σ y una colección $x_1,\ldots,x_k \in B_X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i \cap A_n)(x_i) \Big\| \leq \hat{\mu}(A_n).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i)(x_i) \Big\| &= \Big\| \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_n) \Big)(x_i) \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} \mu(E_i \cap A_n)(x_i) \Big) \Big\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i \cap A_n)(x_i) \Big\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n).\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

A continuación mostramos algunos casos particulares de especial interés.

Ejemplo 3.1.3. *Sea ν una medida en Σ no negativa y finita. Definimos $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,X)$ mediante $\mu(E)(x) = \nu(E)x$. Entonces μ es una medida contablemente aditiva y $\hat{\mu}(E) = \nu(E)$ para cada $E \in \Sigma$.*

Ejemplo 3.1.4. *Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow Y$ una medida contablemente aditiva. Definimos $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R},Y)$ mediante $\mu(E)(a) = a\nu(E)$. Entonces μ es una medida contablemente aditiva y $\hat{\mu}(E) = \|\nu\|(E)$ para cada $E \in \Sigma$.*

Demostración. Esto es una reformulación de la Proposición 1.6.4 *(ii)*. □

Los dos ejemplos anteriores quedan englobados dentro del siguiente. Recordamos que el *producto tensorial inyectivo* de X e Y, denotado por $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$, es la completación del producto tensorial algebraico $X \otimes Y$ equipado con la única norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ tal que

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\Big\|_\varepsilon = \sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ y^*\in B_{Y^*}}} \Big|\sum_{i=1}^n x^*(x_i)\cdot y^*(y_i)\Big|$$

para cada $x_1,\dots,x_n \in X$ y cada $y_1,\dots,y_n \in Y$ (véase e.g. [DU77, Chapter VIII]). Evidentemente, se tiene la desigualdad $\|x\otimes y\|_\varepsilon \le \|x\|\|y\|$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Ejemplo 3.1.5. *Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow Y$ una medida contablemente aditiva. Definimos una función μ en Σ con valores en $\mathscr{L}(X, X\hat{\otimes}_\varepsilon Y)$ mediante $\mu(E)(x) = x \otimes \nu(E)$. Entonces μ es una medida contablemente aditiva y $\hat{\mu}(E) = \|\nu\|(E)$ para cada $E \in \Sigma$.*

Demostración. Tomamos una sucesión disjunta (A_k) en Σ. Entonces

$$\Big\|\sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big)\Big\| = \sup_{x\in B_X}\Big\|x\otimes\nu\Big(\bigcup_{k=n+1}^\infty A_k\Big)\Big\|_\varepsilon \le \Big\|\nu\Big(\bigcup_{k=n+1}^\infty A_k\Big)\Big\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim_n \|\sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)\| = 0$. Esto demuestra que μ es una medida contablemente aditiva.

Fijamos $E \in \Sigma$ y una partición finita $(E_i)_{i=1}^n$ de E en Σ. Dados $x_1,\dots,x_n \in B_X$, tenemos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^n \mu(E_i)(x_i)\Big\|_\varepsilon = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i\otimes\nu(E_i)\Big\|_\varepsilon &= \sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ y^*\in B_{Y^*}}}\Big|\sum_{i=1}^n x^*(x_i)\cdot y^*(\nu(E_i))\Big| \\ &\le \sup_{y^*\in B_{Y^*}}\sum_{i=1}^n |(y^*\circ\nu)(E_i)| \le \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*\circ\nu|(E) = \|\nu\|(E).\end{aligned}$$

Así, $\hat{\mu}(E) \le \|\nu\|(E)$. Por otro lado, fijamos $x \in B_X$ y $x^* \in B_{X^*}$ tales que $x^*(x) = 1$. Para cualesquiera $a_1,\dots,a_n \in [-1,1]$, se tiene

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\nu(E_i)\Big\| &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}}\Big|\sum_{i=1}^n x^*(a_i x)\cdot y^*(\nu(E_i))\Big| \\ &\le \Big\|\sum_{i=1}^n (a_i x)\otimes\nu(E_i)\Big\|_\varepsilon = \Big\|\sum_{i=1}^n \mu(E_i)(a_i x)\Big\|_\varepsilon \le \hat{\mu}(E).\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\nu\|(E) = \hat{\mu}(E)$, como se quería demostrar. □

Dado cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, siempre podemos encontrar una medida contablemente aditiva con valores en él que no tiene variación acotada (Ejemplo 1.6.10). Teniendo esto en cuenta, el siguiente ejemplo (véase [Dob70a, Example 5, p. 517]) muestra que, a diferencia de lo que ocurre con la semivariación "ordinaria", la semivariación contextual de una medida contablemente aditiva puede tomar el valor $+\infty$.

Ejemplo 3.1.6. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ una medida contablemente aditiva. Entonces*

$$\hat{\mu}(E) = |\mu|(E) \quad \textit{para cada } E \in \Sigma.$$

Demostración. Fijamos $E \in \Sigma$. Ya sabemos que $\hat{\mu}(E) \leq |\mu|(E)$ (Proposición 3.1.2 *(i)*). Por otra parte, dada una partición finita $E_1, \ldots, E_n$ de E en Σ, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $1 \leq i \leq n$ podemos encontrar un $x_i \in B_X$ tal que $\|\mu(E_i)\| \leq \mu(E_i)(x_i) + \varepsilon/n$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)(x_i) + \varepsilon \leq \hat{\mu}(E) + \varepsilon.$$

Se sigue que $|\mu|(E) \leq \hat{\mu}(E)$. Esto completa la demostración. □

Para desarrollar satisfactoriamente las teorías de integración consideradas en este capítulo, es conveniente exigir un control adicional sobre la semivariación contextual de las medidas vectoriales. En este sentido, nos vamos a restringir al caso en que la semivariación contextual satisface la propiedad que aislamos a continuación, véase [Dob70a, p. 515] y [Dob71, p. 17].

Definición 3.1.7. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva. Se dice que $\hat{\mu}$ es continua si, para cada sucesión decreciente $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ en Σ con $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, se tiene* $\lim_n \hat{\mu}(E_n) = 0$.

Como la variación de una medida vectorial contablemente aditiva es siempre una medida no negativa, véase e.g. [DU77, Proposition 9, p. 3], podemos aplicar la Proposición 3.1.2 *(i)* para deducir el siguiente:

Corolario 3.1.8. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva con variación acotada. Entonces $\hat{\mu}$ es continua.*

Por otro lado, el teorema de Bartle, Dunford y Schwarz sobre existencia de medidas de control (Teorema 1.6.7) garantiza que, *en los casos particulares aislados en los Ejemplos 3.1.4 y 3.1.5, la semivariación contextual es continua*.

La siguiente caracterización (véase [Dob71, Lemma 2]) será una herramienta fundamental durante todo este capítulo. En particular, nos dice que una medida contablemente aditiva μ con valores en $\mathscr{L}(X,Y)$ tiene la *propiedad-** (siguiendo la terminología de [Bar56, Definition 2]) respecto de la aplicación bilineal canónica $X \times \mathscr{L}(X,Y) \longrightarrow Y$ si y sólo si $\hat{\mu}$ es continua.

Lema 3.1.9 (Dobrakov). *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\hat{\mu}$ *es continua;*

(ii) *existe una medida ϑ en Σ no negativa y finita tal que*
- $\vartheta E \leq \hat{\mu}(E)$ *para cada* $E \in \Sigma$*;*
- $\lim_{\vartheta(A)\to 0} \hat{\mu}(A) = 0$.

En tal caso, decimos que ϑ es una medida de control de $\hat{\mu}$.

Demostración. La prueba de *(ii)⇒(i)* es inmediata y sólo utiliza que $\lim_{\vartheta(A)\to 0} \hat{\mu}(A) = 0$.

Veamos *(i)⇒(ii)*. Como μ es contablemente aditiva, el Teorema 1.6.7 garantiza la existencia de una medida ϑ en Σ no negativa y finita tal que μ es ϑ-continua y $\vartheta(E) \leq \|\mu\|(E)$ para cada $E \in \Sigma$. En particular, $\vartheta(E) \leq \hat{\mu}(E)$ para cada $E \in \Sigma$ (por la Proposición 3.1.2 *(i)*).

Por otra parte, fijamos una sucesión (B_m) en Σ tal que $\vartheta(B_m) \leq 1/2^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Definimos $F_n = \bigcup_{m\geq n} B_m \in \Sigma$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como el conjunto $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma$ cumple $\vartheta(F) = 0$, tenemos $\hat{\mu}(F) = 0$. Nótese que $(F_n \setminus F)$ es una sucesión decreciente con intersección vacía, y la continuidad de $\hat{\mu}$ asegura que $0 \leq \lim_n \hat{\mu}(F_n) \leq \hat{\mu}(F) + \lim_n \hat{\mu}(F_n \setminus F) = 0$, luego $\lim_m \hat{\mu}(B_m) = 0$. Este argumento demuestra que $\lim_{\vartheta(A)\to 0} \hat{\mu}(A) = 0$. □

Como aplicación podemos deducir el siguiente resultado, véase [Bar56, p. 346] y [Dob70b].

Corolario 3.1.10. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva. Si $\hat{\mu}$ es continua, entonces $\hat{\mu}(\Omega) < +\infty$.*

Demostración. Fijamos una medida ϑ en Σ no negativa y finita tal que $\lim_{\vartheta(E)\to 0} \hat{\mu}(E) = 0$ (aplicamos el Lema 3.1.9). En particular, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $\hat{\mu}(E) \leq 1$ para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) \leq \delta$. Fijamos una familia contable (quizás vacía) (A_n) de átomos de ϑ de manera que $B = \Omega \setminus \bigcup_n A_n \in \Sigma$ no contiene átomos de ϑ. Así, podemos encontrar una colección finita $B_1, \ldots, B_k$ de elementos de Σ tales que $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B$ y $\vartheta(B_i) \leq \delta$ para cada $1 \leq i \leq k$, véase e.g. [Fre01, 215D]. Por otra parte, para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande el conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \Sigma$ cumple $\vartheta(\Omega \setminus (B \cup A)) \leq \delta$. Como $\hat{\mu}(A_n) = \|\mu(A_n)\|$ para cada $1 \leq n \leq N$, deducimos

$$\hat{\mu}(\Omega) \leq \hat{\mu}(\Omega \setminus (B \cup A)) + \sum_{n=1}^{N} \hat{\mu}(A_n) + \sum_{i=1}^{k} \hat{\mu}(B_i) \leq 1 + \sum_{n=1}^{N} \|\mu(A_n)\| + k < +\infty,$$

como se quería demostrar. □

El recíproco del Corolario 3.1.10 no es válido en general. A continuación mostramos un ejemplo tomado de [Dob70a, Example 7, p. 517].

Ejemplo 3.1.11 (Dobrakov). *Existe una medida contablemente aditiva $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathscr{L}(\ell^1, c_0)$ tal que*

(i) $\hat{\mu}(\Omega) < +\infty$*;*

(ii) $\hat{\mu}$ *no es continua.*

Demostración. Consideramos una partición $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ tal que $\#(I_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $y^k = (1/n)e_n \in c_0$ para cada $k \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Fijamos $(x_k) \in \ell^1$. Como (y^k) es una sucesión acotada en c_0, la serie $\sum_k x_k y^k$ es incondicionalmente convergente. Además, para cualquier conjunto finito (no vacío) $S \subset \mathbb{N}$ se tiene

$$\Big\|\sum_{k\in S} x_k y^k\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\sum_{k\in S\cap I_n} x_k\Big)e_n\Big\|_\infty = \sup\Big\{\frac{1}{n}\Big|\sum_{k\in S\cap I_n} x_k\Big| :\ n\in\mathbb{N}\Big\}$$
$$\leq \sup\Big\{\frac{1}{n}\Big(\sum_{k\in S\cap I_n} |x_k|\Big) :\ n\in\mathbb{N}\Big\} \leq \sup\Big\{\frac{1}{n} :\ S\cap I_n \neq \emptyset\Big\}\cdot \|(x_k)\|_1,$$

luego

$$\Big\|\sum_{k\in E} x_k y^k\Big\|_\infty \leq \sup\Big\{\frac{1}{n} :\ E\cap I_n \neq \emptyset\Big\}\cdot \|(x_k)\|_1 \tag{3.1}$$

para cada conjunto (no vacío) $E \subset \mathbb{N}$.

Por tanto, podemos definir una medida finitamente aditiva $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathscr{L}(\ell^1, c_0)$ mediante la fórmula $\mu(E)((x_k)) = \sum_{k\in E} x_k y^k$. Para ver que μ es *contablemente aditiva*, fijamos una sucesión decreciente (E_k) en $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ tal que $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$. Vamos a demostrar que $\lim_k \mu(E_k) = 0$. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$, definimos $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} :\ E_k \cap I_n \neq \emptyset\}$ (suponemos sin pérdida de generalidad que $E_k \neq \emptyset$). Entonces $n_k \leq n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$, tenemos $\sup\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = +\infty$ y

$$\lim_k \sup\Big\{\frac{1}{n} :\ E_k \cap I_n \neq \emptyset\Big\} = \lim_k \frac{1}{n_k} = 0.$$

La desigualdad (3.1) permite concluir que $\lim_k \mu(E_k) = 0$, como se quería demostrar.

Afirmamos que $\hat{\mu}(\mathbb{N}) \leq 1$. En efecto, fijamos conjuntos (no vacíos) $E_1, \ldots, E_m \subset \mathbb{N}$ disjuntos dos a dos. Dados $(x_k^1), \ldots, (x_k^m) \in B_{\ell^1}$, como para cada $k \in \mathbb{N}$ existe a lo más un $1 \leq i \leq m$ tal que $k \in E_i$, se tiene

$$\Big\|\sum_{i=1}^{m} \mu(E_i)((x_k^i))\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ k\in E_i}}^{m} x_k^i\Big)y^k\Big\|_\infty \leq \sup\Big\{\frac{1}{n}\Big(\sum_{k\in I_n}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ k\in E_i}}^{m} |x_k^i|\Big)\Big) :\ n\in\mathbb{N}\Big\} \leq 1.$$

Esto demuestra que $\hat{\mu}(\mathbb{N}) \leq 1$.

Finalmente, definimos $E_n = \bigcup_{m\geq n} I_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, (E_n) es decreciente y $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la igualdad $\sum_{k\in I_n} \mu(\{k\})(e_k) = \sum_{k\in I_n} y^k = e_n$; por tanto, $\hat{\mu}(E_n) = 1$. Así, $\hat{\mu}$ no es continua. La prueba ha finalizado. $\square$

La aparición de c_0 en el ejemplo anterior no es casual: Dobrakov [Dob70a, *-Theorem] demostró que *si Y no contiene subespacios isomorfos a c_0 y $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ es una medida contablemente aditiva, entonces $\hat{\mu}$ es continua si (y sólo si) $\hat{\mu}(\Omega) < +\infty$*. La prueba utiliza la caracterización de Bessaga y Pelczynski [BP58] (véase e.g. [DU77, Corollary 5]) de los espacios de Banach Y sin subespacios isomorfos a c_0 como aquéllos para los que una serie $\sum_n y_n$ es incondicionalmente convergente si y sólo si $\sum_n |y^*(y_n)| < +\infty$ para cada $y^* \in Y^*$.

Definición 3.1.12. *Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ una medida contablemente aditiva. Decimos que $\hat{\mu}$ es completa si, para cada $E \in \Sigma$ con $\hat{\mu}(E) = 0$, cualquier subconjunto de E pertenece a Σ.*

Dada una medida contablemente aditiva $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ con semivariación contextual continua, es claro que $\hat{\mu}$ es completa si y sólo si [alguna, toda] medida de control de $\hat{\mu}$ es completa (Lema 3.1.9). Fijamos una medida de control de $\hat{\mu}$, digamos ϑ. Sea $(\Omega, \Sigma_1, \vartheta_1)$ la completación de $(\Omega, \Sigma, \vartheta)$. Un argumento estándar permite extender (de manera única) μ a una medida contablemente aditiva $\mu_1 : \Sigma_1 \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ tal que ϑ_1 es una medida de control de $\widehat{\mu_1}$. Además, tenemos $\widehat{\mu_1}|_\Sigma = \hat{\mu}$. Evidentemente, $\widehat{\mu_1}$ es completa.

Durante el resto de este capítulo, $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ es una medida contablemente aditiva tal que $\hat{\mu}$ es continua y completa, y fijamos una medida de control ϑ de $\hat{\mu}$.

Nótese que, para cada $E \in \Sigma$, la restricción de μ a Σ_E, denotada por μ_E, es contablemente aditiva y tiene semivariación contextual continua y completa. De hecho, ϑ_E es una medida de control de $\widehat{\mu_E}$.

3.1.2. La integral de Bartle-Dobrakov

La noción de integral de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales introducida por Bartle [Bar56] fue generalizada por Dobrakov [Dob70a] al caso de medidas, definidas en δ-anillos, que son contablemente aditivas para la topología de la convergencia puntual en $\mathscr{L}(X,Y)$. En este trabajo nos restringimos a la situación original considerada por Bartle, en la que las medidas están definidas en σ-álgebras y son contablemente aditivas para la topología de la norma.

Definición 3.1.13. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función simple, $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$, donde $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ y $x_1, \dots, x_n \in X$. Dado $E \in \Sigma$, la integral de f sobre E es el elemento de Y definido por*

$$\int_E f\, d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap E)(x_i).$$

El teorema de Vitali, Hahn y Saks 1.6.9 permite reformular ligeramente la definición original de la integral de Dobrakov en los siguientes términos, véase [Dob70a, Theorem 7].

Definición 3.1.14. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice integrable Dobrakov respecto de μ si existe una sucesión de funciones simples $f_n : \Omega \longrightarrow X$ que converge a f $\hat{\mu}$-a.e. tal que, para cada $E \in \Sigma$, existe $\lim_n \int_E f_n\, d\mu$. En tal caso, el límite $(D)\int_\Omega f\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu$ es independiente de la sucesión (f_n) y se llama integral de Dobrakov de f respecto de μ.*

Observación 3.1.15. En el marco de este capítulo, las diferencias entre la **-integral bilineal de Bartle* [Bar56] y la integral de Dobrakov se reducen simplemente a cuestiones de lenguaje. En efecto, dados tres espacios de Banach X, Y y Z, una aplicación bilineal continua $\phi : X \times Z \longrightarrow Y$ y una medida contablemente aditiva $\theta : \Sigma \longrightarrow Z$, podemos considerar la medida contablemente aditiva $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ definida por $\mu(E)(x) = \phi(x, \theta(E))$. Entonces θ tiene la *propiedad-** respecto de ϕ si y sólo si $\hat{\mu}$ es continua (Lema 3.1.9). En tal caso, una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es **-integrable Bartle* respecto de θ y ϕ si y sólo si f es integrable Dobrakov respecto de μ (las respectivas integrales coinciden), véase [Bar56, Theorem 9].

Es inmediato comprobar que la familia $D(\mu)$ de todas las funciones de Ω en X que son integrables Dobrakov respecto de μ es un subespacio vectorial de X^{Ω}, y que la aplicación "integral" $f \mapsto (D)\int_{\Omega} f\, d\mu$ es lineal. Nótese que para cada $f \in D(\mu)$ y cada $A \in \Sigma$, la restricción $f|_A$ es integrable Dobrakov respecto de μ_A. Más todavía, la función $I_f : \Sigma \longrightarrow Y$ dada por $I_f(A) := (D)\int_A f|_A\, d\mu_A$ es una medida contablemente aditiva y ϑ-continua, como consecuencia inmediata del teorema de Vitali, Hahn y Saks 1.6.9.

Algunos de los resultados de este capítulo dependen de las siguientes propiedades conocidas de la integral de Dobrakov, véase [Dob70a, Theorems 5, 16] o [Bar56, Theorems 3, 4, 10].

Proposición 3.1.16 (Bartle, Dobrakov). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función acotada y fuertemente medible respecto de $\hat{\mu}$. Entonces $f \in D(\mu)$ y*

$$\left\|(D)\int_{\Omega} f\, d\mu\right\| \leq \hat{\mu}(\Omega) \cdot \sup_{t\in\Omega} \|f(t)\|.$$

Proposición 3.1.17 (Bartle, Dobrakov). *Sean (f_n) una sucesión en $D(\mu)$ y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tales que*

- $\lim_n f_n = f$ *$\hat{\mu}$-a.e.;*
- *existe* $\lim_n I_{f_n}(E)$ *para cada $E \in \Sigma$.*

Entonces $f \in D(\mu)$ y $I_f(E) = \lim_n I_{f_n}(E)$ uniformemente en $E \in \Sigma$.

En las condiciones del Ejemplo 3.1.4, una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es *integrable en el sentido de Bartle, Dunford y Schwartz* [BDS55] respecto de ν, por definición, si y sólo si es integrable Dobrakov respecto de μ. Los libros [DS88, IV.10], [KK76] y los artículos [Lew70, Lew72] y [Cur92, Cur94, Cur95] son referencias relevantes sobre la integral de Bartle-Dunford-Schwartz.

Por otro lado, en la situación considerada en el Ejemplo 3.1.3, una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Dobrakov respecto de μ si y sólo si es fuertemente medible e integrable Pettis respecto de ν (Pettis [Pet38], véase el Corolario 3.2.10).

Para más información sobre las integrales de Bartle y Dobrakov, remitimos al lector a los artículos [Dob70a], [Dob71], [DP04] y [FGV99], el "survey" [Pan95] y las referencias que allí se proporcionan. Otros trabajos recientes sobre integración de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales son [JO98, JR03, PdLB98, Ste01].

3.2. La S^*-integral

En esta sección estudiamos la *S^*-integral* de Dobrakov [Dob88], que es la generalización natural de la *integral de Birkhoff* al caso de funciones y medidas vectoriales. En el Apartado 3.2.2 establecemos su relación con la integral de Bartle-Dobrakov: resulta que una función es integrable Dobrakov si y sólo si es fuertemente medible y S^*-integrable. Finalmente, el Apartado 3.2.3 está dedicado a discutir la aproximación por funciones simples y la compacidad relativa en norma del rango de la integral indefinida de una función S^*-integrable.

3.2.1. Definición y propiedades elementales

A lo largo de este capítulo vamos a utilizar el símbolo $S(f,\Gamma,T)$ para denotar la serie formal $\sum_n \mu(A_n)(f(t_n))$, donde $f:\Omega \longrightarrow X$ es una función, $\Gamma=(A_n)$ es una familia contable formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos y $T=(t_n)$ es una elección en Γ.

Definición 3.2.1 ([Dob88]). *Una función $f:\Omega \longrightarrow X$ se dice S^*-integrable respecto de μ si existe $y\in Y$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon>0$ existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que, para cada partición contable Γ' de Ω en Σ más fina que Γ y cada elección T' en Γ', la serie $S(f,\Gamma',T')$ es incondicionalmente convergente y $\|S(f,\Gamma',T')-y\|\leq\varepsilon$. El vector $y\in Y$ (necesariamente único) se llama S^*-integral de f respecto de μ y se denota por $(S^*)\int_\Omega f\,d\mu$.*

Cabe señalar que en [DM85] se considera una variante de la S^*-integral, llamada *S-integral*, que sólo involucra particiones finitas.

Es claro que el conjunto $S^*(\mu)$ de todas las funciones de Ω en X que son S^*-integrables respecto de μ es un subespacio vectorial de X^Ω, y que la aplicación $f\mapsto (S^*)\int_\Omega f\,d\mu$ es lineal. Por otra parte, en vista de la Proposición 2.1.4, la S^*-integral coincide con la integral de Birkhoff en el caso de medidas no negativas y finitas:

Corolario 3.2.2. *En las condiciones del Ejemplo 3.1.3, una función $f:\Omega\longrightarrow X$ es integrable Birkhoff respecto de ν si y sólo si es S^*-integrable respecto de μ. En tal caso, las respectivas integrales coinciden.*

A continuación incluimos una serie de resultados auxiliares que extienden al caso de medidas vectoriales algunas de las propiedades elementales de la integral de Birkhoff.

Lema 3.2.3. *Sean $f\in S^*(\mu)$ y $E\in\Sigma$. Entonces la restricción $f|_E$ es S^*-integrable respecto de μ_E. Emplearemos la notación $\imath_f(E)=(S^*)\int_E f|_E\,d\mu_E$.*

Demostración. Basta imitar la prueba del Lema 2.1.7. □

Como aplicación inmediata obtenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.4. *Sean $f\in S^*(\mu)$ y $E\in\Sigma$. Entonces $f\chi_E\in S^*(\mu)$ y $(S^*)\int_\Omega f\chi_E\,d\mu=\imath_f(E)$.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon>0$. Como $f|_E$ es S^*-integrable respecto de μ_E (Lema 3.2.3), existe una partición contable Γ_0^E de E en Σ_E tal que $\|S(f,\Gamma',T')-\imath_f(E)\|\leq\varepsilon$ para cada partición contable Γ' de E en Σ_E más fina que Γ_0^E y cada elección T' en Γ', siendo la serie $S(f,\Gamma',T')$ incondicionalmente convergente. Definimos $\Gamma_0=\Gamma_0^E\cup\{\Omega\setminus E\}$.

Tomamos una partición contable $\Gamma=(A_n)$ de Ω en Σ más fina que Γ_0 y una elección $T=(t_n)$ en Γ. Como $\Gamma'=\{A_n:A_n\subset E\}$ es una partición de E en Σ_E más fina que Γ_0^E y $T'=\{t_n:A_n\subset E\}$ es una elección en Γ', la serie $S(f\chi_E,\Gamma,T)=S(f|_E,\Gamma',T')$ es incondicionalmente convergente y $\|S(f\chi_E,\Gamma,T)-\imath_f(E)\|\leq\varepsilon$. Por tanto, $f\chi_E\in S^*(\mu)$ y $(S^*)\int_\Omega f\chi_E\,d\mu=\imath_f(E)$. □

Dada $f\in S^*(\mu)$, es sencillo ver que la función $\imath_f:\Sigma\longrightarrow Y$ es una medida finitamente aditiva. De hecho, $\imath_f$ *es contablemente aditiva*, como se afirma en [Dob88, Lemma 1 (1)]. Para verlo necesitamos la siguiente generalización del Lema 2.1.8.

Lema 3.2.5 ([Rodc]). *Sea $f \in S^*(\mu)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_0 de Ω en Σ con la siguiente propiedad: para cada familia contable Γ formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0, y cada elección T en Γ, la serie $S(f,\Gamma,T)$ es incondicionalmente convergente y*

$$\|S(f,\Gamma,T) - \imath_f(\cup\Gamma)\| \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Demostración. Sea Γ_0 una partición contable de Ω en Σ de manera que, para cada partición contable $\tilde{\Gamma}$ de Ω en Σ más fina que Γ_0 y cada elección $\tilde{T}$ en $\tilde{\Gamma}$, la serie $S(f,\tilde{\Gamma},\tilde{T})$ es incondicionalmente convergente y $\|S(f,\tilde{\Gamma},\tilde{T}) - \imath_f(\Omega)\| \leq \varepsilon$.

Fijamos una familia contable $\Gamma = (A_n)$ formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0, y tomamos una elección $T = (t_n)$ en Γ. Definimos $A = \bigcup_n A_n$,

$$\Gamma' = \{E \setminus A : \ E \in \Gamma_0, \ E \not\subset A\},$$

y fijamos una elección arbitraria T' en Γ'.

Como $\Gamma \cup \Gamma'$ es una partición contable de Ω en Σ más fina que Γ_0, la serie $S(f,\Gamma\cup\Gamma',T\cup T')$ es incondicionalmente convergente y, por tanto, lo mismo ocurre con la subserie $S(f,\Gamma,T)$.

Para demostrar (3.2), fijamos una sucesión (Γ'_k) de particiones contables de $\Omega \setminus A$ en $\Sigma_{\Omega\setminus A}$, más finas que Γ', y elecciones T'_k en Γ'_k, tales que

$$\lim_k S(f,\Gamma'_k,T'_k) = \imath_f(\Omega\setminus A). \tag{3.3}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\Gamma_k = \Gamma \cup \Gamma'_k$, que es una partición contable de Ω en Σ más fina que Γ_0, y $T_k = T \cup T'_k$. Entonces la serie $S(f,\Gamma_k,T_k)$ es incondicionalmente convergente y

$$\begin{aligned} \|S(f,\Gamma,T) - \imath_f(A)\| &\leq \|S(f,\Gamma_k,T_k) - \imath_f(\Omega)\| + \|S(f,\Gamma'_k,T'_k) - \imath_f(\Omega\setminus A)\| \\ &\leq \varepsilon + \|S(f,\Gamma'_k,T'_k) - \imath_f(\Omega\setminus A)\| \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La desigualdad (3.2) se sigue ahora de (3.3). Esto completa la demostración. □

Proposición 3.2.6. *Sea $f \in S^*(\mu)$. Entonces $\imath_f$ es una medida contablemente aditiva y ϑ-continua.*

Demostración. Evidentemente, $\imath_f(E) = 0$ para cada $E \in \Sigma$ con $\vartheta(E) = 0$. Como $\imath_f$ es finitamente aditiva, para ver que es contablemente aditiva basta demostrar que $\lim_n \imath_f(\bigcup_{m\geq n} E_m) = 0$ para toda sucesión disjunta (E_n) en Σ.

Fijamos $\varepsilon > 0$. Por el Lema 3.2.5, existe una partición contable Γ_0 de Ω en Σ de manera que, para cada familia contable Γ de elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0, y cada elección T en Γ, la serie $S(f,\Gamma,T)$ converge incondicionalmente y

$$\|S(f,\Gamma,T) - \imath_f(\cup\Gamma)\| \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\Gamma_n = \{A \cap E_n : \ A \in \Gamma_0, \ A \cap E_n \neq \emptyset\}$, fijamos una elección T_n en Γ_n y consideramos $\hat{\Gamma}_n = \bigcup_{m\geq n} \Gamma_m$ y $\hat{T}_n = \bigcup_{m\geq n} T_m$. Como Γ_n y $\hat{\Gamma}_n$ son más finas que Γ_0, las series $S(f,\Gamma_n,T_n)$ y $S(f,\hat{\Gamma}_n,\hat{T}_n)$ son incondicionalmente convergentes.

En particular, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} S(f,\Gamma_n,T_n)$ converge y podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\| \sum_{m\geq n} S(f,\Gamma_m,T_m) \Big\| \leq \varepsilon \quad \text{para cada } n \geq N. \tag{3.5}$$

Por otra parte, para cualquier $n \geq N$ la desigualdad (3.4) asegura que

$$\Big\| \sum_{m\geq n} S(f,\Gamma_m,T_m) - \iota_f\Big(\bigcup_{m\geq n} E_m\Big) \Big\| = \Big\| S(f,\hat{\Gamma}_n,\hat{T}_n) - \iota_f\Big(\bigcup_{m\geq n} E_m\Big) \Big\| \leq \varepsilon.$$

En vista de (3.5), deducimos $\|\iota_f(\bigcup_{m\geq n} E_m)\| \leq 2\varepsilon$ para cada $n \geq N$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $\lim_n \iota_f(\bigcup_{m\geq n} E_m) = 0$. $\square$

3.2.2. Relación con la integral de Bartle-Dobrakov

En [Dob88] se demuestra que toda función integrable Dobrakov es S^*-integrable, y que el recíproco es válido para funciones fuertemente medibles (Teorema 3.2.9). En general, la inclusión $D(\mu) \subset S^*(\mu)$ es estricta (basta tener en cuenta la existencia de funciones integrables Birkhoff que no son fuertemente medibles), aunque se da la igualdad cuando se consideran funciones reales y medidas vectoriales (Corolario 3.2.11).

Para establecer estas relaciones necesitamos los dos siguientes resultados auxiliares. La prueba del Lema 3.2.8 es similar a la de su análogo para la integral de Birkhoff (Lema 2.1.14).

Lema 3.2.7. *Sean (E_n) una sucesión disjunta en Σ y (x_n) una sucesión acotada en X. Entonces la serie $\sum_n \mu(E_n)(x_n)$ es incondicionalmente convergente y*

$$\Big\| \sum_n \mu(E_n)(x_n) \Big\| \leq \hat{\mu}\Big(\bigcup_n E_n\Big) \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Demostración. Para cada conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ se tiene

$$\Big\| \sum_{n\in F} \mu(E_n)(x_n) \Big\| \leq \hat{\mu}\Big(\bigcup_{n\in F} E_n\Big) \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|.$$

El resultado se sigue ahora de la desigualdad anterior y la continuidad de $\hat{\mu}$. $\square$

Lema 3.2.8 ([Rodd]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$f \in S^*(\mu)$;*

(ii) *existe una partición contable $\Gamma_0 = (A_n)$ de Ω en Σ con las siguientes propiedades:*

- *$f|_{A_n} \in S^*(\mu_{A_n})$ para cada n;*
- *para cada partición contable Γ de Ω en Σ más fina que Γ_0, la serie*

$$\sum_{E\in\Gamma} (S^*) \int_E f|_E \, d\mu_E$$

es incondicionalmente convergente.

Demostración. *(i)⇒(ii)* es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.2.6.

Recíprocamente, supongamos que se verifica *(ii)*. Vamos a demostrar que $f \in S^*(\mu)$ y

$$(S^*)\int_\Omega f\,d\mu = \sum_n (S^*)\int_{A_n} f|_{A_n}\,d\mu_{A_n} =: y \in Y.$$

Fijamos $\varepsilon > 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, el Lema 3.2.5 aplicado a $f|_{A_n}$ asegura que existe una partición contable Γ_1^n de A_n en Σ_{A_n} de manera que, para cada familia contable Γ' de elementos de Σ_{A_n} disjuntos dos a dos, más fina que Γ_1^n, y cada elección T' in Γ', se tiene

$$\left\| S(f,\Gamma',T') - (S^*)\int_{\cup\Gamma} f|_{\cup\Gamma}\,d\mu_{\cup\Gamma} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \tag{3.6}$$

siendo la serie $S(f,\Gamma',T')$ incondicionalmente convergente.

Nótese que $\Gamma_1 = \bigcup_n \Gamma_1^n$ es una partición contable de Ω en Σ más fina que Γ_0. *Afirmamos que si Γ es cualquier partición contable de Ω en Σ más fina que Γ_1 y T es cualquier elección en Γ, entonces la serie $S(f,\Gamma,T)$ converge incondicionalmente y $\|S(f,\Gamma,T) - y\| \leq \varepsilon$.* En efecto, sea $\Gamma = (A_{n,k})$ una tal partición donde, para cada n, la familia $\Gamma^n = (A_{n,k})_k$ es una partición contable de A_n en Σ_{A_n} más fina que Γ_1^n. Fijamos cualquier elección $T = (t_{n,k})$ en Γ y definimos $T^n = (t_{n,k})_k$ para cada n. Para ver que la serie $S(f,\Gamma,T)$ converge incondicionalmente basta aplicar el Lema 1.5.6, teniendo en cuenta que

- la serie $S(f,\Gamma^n,T^n)$ es incondicionalmente convergente para cada n;
- la serie $\sum_{n,k}(S^*)\int_{A_{n,k}} f|_{A_{n,k}}\,d\mu_{A_{n,k}}$ es incondicionalmente convergente;
- para cada conjunto finito $Q \subset \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar (3.6) para obtener

$$\left\| \sum_{k\in Q} \mu(A_{n,k})(f(t_{n,k})) - \sum_{k\in Q} (S^*)\int_{A_{n,k}} f|_{A_{n,k}}\,d\mu_{A_{n,k}} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Por otra parte, la desigualdad (3.6) permite concluir

$$\|S(f,\Gamma,T) - y\| \leq \sum_n \left\| S(f,\Gamma^n,T^n) - (S^*)\int_{A_n} f|_{A_n}\,d\mu_{A_n} \right\| \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Esto completa la demostración. □

Ahora ya podemos abordar el teorema principal de este apartado, [Dob88, Theorem 1].

Teorema 3.2.9 (Dobrakov). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f \in D(\mu)$;

(ii) *f es fuertemente medible respecto de $\hat{\mu}$ y $f \in S^*(\mu)$.*

En tal caso, $(D)\int_\Omega f\,d\mu = (S^*)\int_\Omega f\,d\mu$.

Demostración. La prueba de *(i)*$\Rightarrow$*(ii)* se divide de manera natural en tres etapas.

Paso 1.- Supongamos que $f=\sum_n x_n \chi_{A_n}$*, donde* (A_n) *es una partición contable de* Ω *en* Σ *y* (x_n) *es una sucesión en* X. Evidentemente, $f|_{A_n} \in S^*(\mu_{A_n})$ para cada n. Dada cualquier partición contable Γ de Ω en Σ más fina que (A_n), la serie

$$\sum_{E\in\Gamma}(S^*)\int_E f|_E \, d\mu_E = \sum_{E\in\Gamma} I_f(E)$$

es incondicionalmente convergente con suma $(D)\int_\Omega f\, d\mu$ (porque I_f es contablemente aditiva). Por tanto, el Lema 3.2.8 (y su demostración) nos permite concluir que f es S^*-integrable respecto de μ y $(S^*)\int_\Omega f\, d\mu = (D)\int_\Omega f\, d\mu$.

Paso 2.- Supongamos que f *es acotada*. La familia $\mathscr{S}$ formada por todos los pares (Γ,T), donde Γ es una partición contable de Ω en Σ y T es una elección en Γ, adquiere estructura de conjunto dirigido con la relación

$$(\Gamma,T)\preceq(\Gamma',T') \ \Leftrightarrow\ \Gamma' \text{ es más fina que } \Gamma.$$

Nótese que la serie $S(f,\Gamma,T)$ es incondicionalmente convergente para cada $(\Gamma,T)\in\mathscr{S}$, por el Lema 3.2.7. Es claro además que $f\in S^*(\mu)$ si y sólo si la red $\{S(f,\Gamma,T)\}_{(\Gamma,T)\in\mathscr{S}}$ converge, i.e. satisface la condición de Cauchy.

Fijamos $\varepsilon>0$. Como f es fuertemente medible respecto de ϑ, podemos encontrar una partición contable $\Gamma=(A_k)$ de Ω en Σ tal que $\operatorname{osc}(f|_{A_k})\le\varepsilon$ cuando $\vartheta(A_k)>0$ (Lema 1.7.4). Fijamos dos particiones contables $\Gamma'=(B_n)$ y $\Gamma''=(C_m)$ de Ω en Σ más finas que Γ, y tomamos dos elecciones cualesquiera $T'=(t'_n)$ y $T''=(t''_m)$ en Γ' y Γ'', respectivamente. Para cada $k\in\mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{B_n\subset A_k}\mu(B_n)(f(t'_n)) = \sum_{B_n\cup C_m\subset A_k}\mu(B_n\cap C_m)(f(t'_n))$$

$$\text{y}\qquad \sum_{C_m\subset A_k}\mu(C_m)(f(t''_m)) = \sum_{B_n\cup C_m\subset A_k}\mu(B_n\cap C_m)(f(t''_m)),$$

siendo las series incondicionalmente convergentes (Lema 3.2.7). Por tanto,

$$\|S(f,\Gamma',T')-S(f,\Gamma'',T'')\| = \left\|\sum_{\vartheta(A_k)>0}\ \sum_{B_n\cup C_m\subset A_k}\mu(B_n\cap C_m)(f(t'_n)-f(t''_m))\right\| \le \hat{\mu}(\Omega)\cdot 2\varepsilon,$$

(de nuevo, gracias al Lema 3.2.7). Esto demuestra que $f\in S^*(\mu)$.

Paso 3.- Fijamos $\varepsilon>0$. La medibilidad fuerte de f respecto de ϑ garantiza la existencia de una partición contable (A_n) de Ω en Σ y una sucesión (x_n) en X tales que la función $g=\sum_n x_n\chi_{A_n}$ satisface $\|f-g\|\le\varepsilon$ ϑ-a.e. Como $f-g$ es fuertemente medible, la Proposición 3.1.16 asegura que $f-g\in D(\mu)$ y $\|(D)\int_\Omega (f-g)\, d\mu\|\le\hat{\mu}(\Omega)\varepsilon$. Por tanto, $g=f-(f-g)\in D(\mu)$. En vista del *Paso 1*, deducimos que $g\in S^*(\mu)$, con $(S^*)\int_\Omega g\, d\mu = (D)\int_\Omega g\, d\mu$. Por otro lado, podemos aplicar el *Paso 2* para concluir que $f-g\in S^*(\mu)$. Además, se cumple $\|(S^*)\int_\Omega (f-g)\, d\mu\|\le\hat{\mu}(\Omega)\varepsilon$ (por el Lema 3.2.7). Finalmente, nótese que $f=(f-g)+g\in S^*(\mu)$ y

$$\left\|(S^*)\int_\Omega f\, d\mu-(D)\int_\Omega f\, d\mu\right\| \le \left\|(S^*)\int_\Omega (f-g)\, d\mu\right\| + \left\|(D)\int_\Omega (f-g)\, d\mu\right\| \le \hat{\mu}(\Omega)\cdot 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $(S^*)\int_\Omega f\, d\mu = (D)\int_\Omega f\, d\mu$. Esto completa la demostración de *(i)⇒(ii)*.

Veamos la prueba de *(ii)⇒(i)*. De nuevo, podemos encontrar una sucesión disjunta (A_n) en Ω y una sucesión (x_n) en X tales que la función $g = \sum_n x_n \chi_{A_n}$ satisface $\|f - g\| \leq 1$ ϑ-a.e. Combinando la Proposición 3.1.16 con la implicación *(i)⇒(ii)*, deducimos que $f - g \in D(\mu) \subset S^*(\mu)$ y, por tanto, $g \in S^*(\mu)$. *Se afirma que* $g \in D(\mu)$. En efecto, definimos la función simple $g_n = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{A_k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente, la sucesión (g_n) converge a g puntualmente. Por otra parte, para cada $E \in \Sigma$ la serie $\sum_{n=1}^\infty \mu(E \cap A_n)(x_n) = \sum_{n=1}^\infty \iota_g(E \cap A_n)$ es convergente (Proposición 3.2.6), es decir, existe $\lim_n \int_E g_n\, d\mu$. Se sigue que $g \in D(\mu)$ y, por tanto, $f = (f - g) + g \in D(\mu)$. □

Combinando el Teorema 3.2.9 con el Corolario 2.1.16 obtenemos el siguiente resultado clásico, véase [Pet38, Theorem 5.1].

Corolario 3.2.10 (Pettis). *En las condiciones del Ejemplo 3.1.3, una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Dobrakov respecto de μ si y sólo si es fuertemente medible e integrable Pettis respecto de ν. En tal caso, las respectivas integrales coinciden.*

Corolario 3.2.11. *En las condiciones del Ejemplo 3.1.4, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Bartle-Dunford-Schwartz respecto de ν si y sólo si es S^*-integrable respecto de μ. En tal caso, las respectivas integrales coinciden.*

Demostración. En virtud del Teorema 3.2.9, sólo tenemos que demostrar que *toda $f \in S^*(\mu)$ es Σ-medible*. En efecto, un resultado bien conocido de Rybakov [Ryb70], véase e.g. [DU77, Theorem 2, p. 268], asegura que podemos encontrar una medida de control de ν de la forma $\vartheta = |y_0^* \circ \nu|$ para cierto $y_0^* \in B_{Y^*}$. Ahora, por el teorema de descomposición de Hahn, véase e.g. [Fre01, 231E], existe un $H \in \Sigma$ tal que

$$(y_0^* \circ \nu)(A) \geq 0 \text{ para cada } A \in \Sigma_H \quad \text{e} \quad (y_0^* \circ \nu)(B) \leq 0 \text{ para cada } B \in \Sigma_{\Omega \setminus H}.$$

Es claro que las restricciones $f|_H$ y $f|_{\Omega \setminus H}$ son integrables Birkhoff (i.e. Lebesgue) respecto de las medidas no negativas, finitas y completas $\vartheta_H = y_0^* \circ \nu_H$ y $\vartheta_{\Omega \setminus H} = -y_0^* \circ \nu_{\Omega \setminus H}$, respectivamente. En particular, f es Σ-medible y la prueba ha finalizado. □

3.2.3. Aproximación por funciones simples

Como ya sabemos, toda función integrable Birkhoff es el límite, en la seminorma de Pettis, de una sucesión de funciones simples (Corolario 2.3.8 y Teorema 1.8.13). A continuación extendemos dicho resultado al contexto más general de este capítulo, utilizando ideas que no involucran la propiedad de Bourgain y son más cercanas a las empleadas originalmente por Birkhoff [Bir35]. Para ello necesitamos el siguiente lema, que también nos será útil más adelante.

Lema 3.2.12 ([Rodc]). *Supongamos que Ω es un átomo de $\hat{\mu}$. Si $f \in S^*(\mu)$, entonces existe un $E \in \Sigma$ con $\hat{\mu}(\Omega \setminus E) = 0$ tal que $\iota_f(\Omega) = \mu(\Omega)(f(t))$ para cada $t \in E$.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una partición contable Γ_m de Ω en Σ tal que

$$\|S(f,\Gamma_m,T) - \imath_f(\Omega)\| \leq \frac{1}{m}$$

para toda elección T en Γ_m. Como Ω es un átomo de $\hat{\mu}$, existe un $E_m \in \Gamma_m$ tal que $\hat{\mu}(\Omega \setminus E_m) = 0$, y la desigualdad anterior nos dice que $\sup_{t\in E_m} \|\mu(\Omega)(f(t)) - \imath_f(\Omega)\| \leq 1/m$. Por tanto, el conjunto $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ satisface las propiedades requeridas. $\square$

Teorema 3.2.13 ([Rodd]). *Sea $f \in S^*(\mu)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función simple $g : \Omega \longrightarrow X$ tal que*

$$\sup_{E\in\Sigma} \|\imath_f(E) - \imath_g(E)\| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Comenzamos probando el siguiente:

Caso particular.- Supongamos que $\hat{\mu}$ no tiene átomos. Por el Lema 3.2.5, existe una partición contable $\Gamma_0 = (A_n)$ de Ω en Σ tal que

$$\|S(f,\Gamma,T) - \imath_f(\cup\Gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.7}$$

para cada familia contable Γ de elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0, y cada elección T en Γ, siendo la serie $S(f,\Gamma,T)$ incondicionalmente convergente. Como $\imath_f$ es ϑ-continua (Proposición 3.2.6), podemos tomar un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|\imath_f(B)\| \leq \varepsilon/2$ para cada $B \in \Sigma$ contenido en $\bigcup_{n>N} A_n$.

Fijamos $t_n \in A_n$ para cada $1 \leq n \leq N$ y definimos $g = \sum_{n=1}^{N} f(t_n)\chi_{A_n}$. Se afirma que

$$\sup_{E\in\Sigma} \left\|\imath_f(E) - \imath_g(E)\right\| \leq \varepsilon. \tag{3.8}$$

Para comprobar esta desigualdad, fijamos $E \in \Sigma$ y $\eta > 0$. Como ϑ no tiene átomos, resulta que $\vartheta^*(\{t_n\}) = 0$ para todo $1 \leq n \leq N$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\imath_f$ es ϑ-continua, para cada $1 \leq n \leq N$ podemos elegir $E_n \in \Sigma_{A_n}$ con $t_n \in E_n$ de manera que

$$\max_{1\leq n\leq N} \|f(t_n)\| \cdot \hat{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{N} (E_n \setminus E)\Big) \leq \eta \quad \text{y} \quad \Big\|\imath_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N} (E_n \setminus E)\Big)\Big\| \leq \eta. \tag{3.9}$$

Como $\Gamma = \{(E \cap A_n) \cup E_n : 1 \leq n \leq N\}$ está formada por elementos de Σ disjuntos dos a dos y es más fina que Γ_0, la desigualdad (3.7) asegura que

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \mu((E\cap A_n)\cup E_n)(f(t_n)) - \imath_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N}((E\cap A_n)\cup E_n)\Big)\Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilizando (3.9) deducimos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\mu(E\cap A_n)(f(t_n))-\imath_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N}(E\cap A_n)\Big)\Big\|&\\ \leq \Big\|\sum_{n=1}^{N}\mu((E\cap A_n)\cup E_n)(f(t_n))-\imath_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N}((E\cap A_n)\cup E_n)\Big)\Big\|&\\ +\Big\|\sum_{n=1}^{N}\mu(E_n\setminus E)(f(t_n))\Big\|+\Big\|\imath_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N}(E_n\setminus E)\Big)\Big\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+2\eta.&\end{aligned}$$

En vista de la igualdad $\imath_g(E)=\sum_{n=1}^{N}\mu(E\cap A_n)(f(t_n))$, la elección de N implica

$$\big\|\imath_g(E)-\imath_f(E)\big\|\leq\Big\|\imath_g(E)-\imath_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N}(E\cap A_n)\Big)\Big\|+\Big\|\imath_f\Big(\bigcup_{n>N}(E\cap A_n)\Big)\Big\|\leq\varepsilon+2\eta.$$

Como $E\in\Sigma$ y $\eta>0$ son arbitrarios, la desigualdad (3.8) queda demostrada.

Caso general.- Fijamos una colección contable (quizás vacía) (B_n) de átomos de ϑ disjuntos dos a dos tal que, si escribimos $A=\Omega\setminus\bigcup_n B_n$, entonces ϑ_A no tiene átomos.

Como $f|_A\in S^*(\mu_A)$, el *Caso particular* nos asegura que existe una función simple $h:A\longrightarrow X$ tal que

$$\sup_{E\in\Sigma_A}\big\|\imath_f(E)-\imath_h(E)\big\|\leq\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Usando de nuevo la ϑ-continuidad de $\imath_f$, podemos encontrar un $N\in\mathbb{N}$ tal que $\|\imath_f(B)\|\leq\varepsilon/2$ para cada $B\in\Sigma$ contenido en $\bigcup_{n>N}B_n$. Por otro lado, en virtud del Lema 3.2.12 (aplicado a cada $f|_{B_n}$), para cada $1\leq n\leq N$ existe un $t_n\in B_n$ tal que

$$\imath_f(E)=\mu(E)(f(t_n))\quad\text{para todo } E\in\Sigma_{B_n}. \tag{3.11}$$

Consideramos la función simple $g:\Omega\longrightarrow X$ definida por

$$g(t)=\begin{cases}h(t) & \text{si } t\in A;\\ f(t_n) & \text{si } t\in B_n \text{ para algún } 1\leq n\leq N;\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Se afirma que $\sup_{E\in\Sigma}\|\imath_f(E)-\imath_g(E)\|\leq\varepsilon$. En efecto, dado $E\in\Sigma$, tenemos

$$\begin{aligned}\big\|\imath_f(E)-\imath_g(E)\big\|\leq\big\|\imath_f(E\cap A)-\imath_h(E\cap A)\big\|&\\ +\Big\|\sum_{n=1}^{N}\big(\imath_f(E\cap B_n)-\imath_g(E\cap B_n)\big)\Big\|+\Big\|\imath_f\Big(\bigcup_{n>N}(E\cap B_n)\Big)\Big\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,&\end{aligned}$$

gracias a (3.10), (3.11) y la elección de N. Esto completa la demostración. □

Corolario 3.2.14 ([Rodd]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) para cada $x \in X$, el conjunto $\{\mu(E)(x) : E \in \Sigma\}$ es relativamente compacto en norma;
(ii) para cada $f \in S^*(\mu)$, el conjunto $\{\imath_f(E) : E \in \Sigma\}$ es relativamente compacto en norma.

Demostración. *(ii)⇒(i)* es consecuencia de que $\{\imath_{x\chi_\Omega}(E) : E \in \Sigma\} = \{\mu(E)(x) : E \in \Sigma\}$ para cada $x \in X$. Recíprocamente, veamos *(i)⇒(ii)*. Fijamos $f \in S^*(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 3.2.13, existe una función simple $g = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ tal que

$$\sup_{E \in \Sigma} \left\| \imath_f(E) - \imath_g(E) \right\| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Como $\overline{\{\mu(E)(x_i) : E \in \Sigma\}}^{\|\cdot\|}$ es compacto en norma para cada $1 \leq i \leq n$ y

$$\{\imath_g(E) : E \in \Sigma\} \subset \sum_{i=1}^n \overline{\{\mu(E)(x_i) : E \in \Sigma\}}^{\|\cdot\|},$$

existen $E_1, \dots, E_k \in \Sigma$ tales que $\inf_{1 \leq i \leq k} \left\| \imath_g(E) - \imath_g(E_i) \right\| < \varepsilon$ para todo $E \in \Sigma$. Esta desigualdad y (3.12) garantizan que $\inf_{1 \leq i \leq k} \left\| \imath_f(E) - \imath_f(E_i) \right\| < 3\varepsilon$ para todo $E \in \Sigma$. Por tanto, $\{\imath_f(E) : E \in \Sigma\}$ es totalmente acotado, es decir, relativamente compacto en norma, como se quería demostrar. □

3.3. La integral de McShane respecto de medidas vectoriales

La integral de Riemann de una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se obtiene como el límite de sumas de la forma $\sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) f(t_i)$ cuando $\max_{1 \leq i \leq n} (b_i - b_{i-1}) \to 0$, donde $0 = b_0 \leq t_1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_{n-1} \leq t_n \leq b_n = 1$. Kurzweil [Kur57] y Henstock [Hen63] modificaron este proceso de límite para obtener una noción de integral, usualmente llamada *integral de Riemann generalizada*, que extiende a la de Lebesgue, véase e.g. [Gor94]. A grandes rasgos, la idea para definirla se basa en requerir que la integral se aproxime bien mediante las "sumas de Riemann" asociadas a todas las particiones tales que $b_i - b_{i-1} \leq \Delta(t_i)$ para cada i, donde Δ es una cierta función positiva definida en $[0,1]$ (para la integral de Riemann se consideran sólo Δ's constantes). La *integral de McShane* [McS69, McS83] se obtiene a partir de la integral de Riemann generalizada eliminando la restricción "$t_i \in [b_{i-1}, b_i]$" y considerando aquellas particiones tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \Delta(t_i), t_i + \Delta(t_i)]$ para cada i. Curiosamente, esta variante permite recuperar la integral de Lebesgue:

Teorema (McShane). *Una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue si y sólo si existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $\Delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \Delta(t_i), t_i + \Delta(t_i)]$ para todo i. En tal caso, $\alpha = \int_0^1 f(t)\, dt$.

La integral de McShane se puede definir de manera natural para funciones en $[0,1]$ con valores en un espacio de Banach. Dicha generalización fue estudiada inicialmente por Gordon [Gor90], Fremlin y Mendoza [FM94]. Más adelante, Fremlin [Fre95] extendió esta noción de integral para abarcar funciones definidas en cualquier espacio de medida topológico *quasi-Radon* $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$.

Para introducir la integral de McShane en este marco abstracto necesitamos algo de notación. Un *calibre* en $(T,\mathfrak{T})$ es una función $\delta : T \longrightarrow \mathfrak{T}$ tal que $t \in \delta(t)$ para cada $t \in T$. Una *partición de McShane* de T es una colección $\{(E_i,t_i) : i \in \mathbb{N}\}$, donde (E_i) es una sucesión disjunta en $\mathscr{S}$ con $\theta(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$ y $t_i \in T$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Decimos que dicha partición está *subordinada* a δ si $E_i \subset \delta(t_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. La siguiente observación (véase [Fre95, 1B(d)]) es fundamental.

Lema 3.3.1. *Sea δ un calibre en $(T,\mathfrak{T})$. Entonces existe una partición de McShane de T subordinada a δ.*

Demostración. Sea $\mathscr{G}$ la familia de todos los abiertos $G \subset T$ para los que existe un $t \in T$ tal que $G \subset \delta(t)$. Como θ es τ-aditiva, tenemos $\inf\{\theta(T \setminus \cup\mathscr{G}_0) : \ \mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G}, \ \mathscr{G}_0 \text{ finita}\} = 0$. Por tanto, existen $G_1, G_2, \ldots \in \mathscr{G}$ tales que $\theta(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i) = 0$. Tomamos puntos $t_1, t_2, \ldots \in T$ de manera que $G_i \subset \delta(t_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y definimos $E_1 = G_1$ y $E_i = G_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j$ para cada $i \geq 2$. Es claro que la colección $\{(E_i,t_i) : i \in \mathbb{N}\}$ es una partición de McShane de T subordinada a δ. $\square$

Definición 3.3.2 ([Fre95]). *Sea $f : T \longrightarrow X$ una función. Se dice que f es integrable McShane, con integral de McShane $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ en $(T,\mathfrak{T})$ tal que*

$$\limsup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \theta(E_i) f(t_i) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición de McShane $\{(E_i,t_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de T subordinada a δ.

Es conocido que, para una función $f : T \longrightarrow X$, se tiene

$$f \text{ integrable Birkhoff} \ \Rightarrow \ f \text{ integrable McShane} \ \Rightarrow \ f \text{ integrable Pettis},$$

y las correspondientes integrales coinciden, véase [Freb, Proposition 4] y [Fre95, 1Q]. Ninguno de los recíprocos es cierto en general, véase [Freb, Example 8] y [FM94, 3C]. En virtud del Corolario 2.1.17, las tres nociones de integrabilidad coinciden cuando X es *separable*. Sin embargo, para ciertas clases de espacios de Banach *no separables* algunas equivalencias son válidas. Los siguientes resultados pueden encontrarse en [Freb, Theorem 10] y [DPP03], respectivamente.

Teorema 3.3.3 (Fremlin). *Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces una función $f : T \longrightarrow X$ es integrable Birkhoff si y sólo si es integrable McShane.*

Teorema 3.3.4 (Di Piazza-Preiss). *Si $X = c_0(\Gamma)$ (donde $\Gamma \neq \emptyset$ es cualquier conjunto) ó X es super-reflexivo, entonces una función $f : T \longrightarrow X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.*

Combinando los Teoremas 3.3.4 y 2.5.2 podemos deducir el siguiente

Corolario 3.3.5 ([Rod05]). *Si $X = c_0(\mathfrak{c})$ ó X es super-reflexivo con* $\mathrm{dens}(X, \|\cdot\|) \geq \mathfrak{c}$, *entonces existe una función acotada integrable McShane $f : [0,1] \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.*

El objetivo de esta sección es analizar la *integral de McShane de funciones vectoriales respecto de medidas vectoriales*. En el Apartado 3.3.1 introducimos esta noción y establecemos algunas de sus propiedades básicas, como el *lema de Henstock-Saks*. Nuestra definición de la integral sólo involucra sumas finitas y está inspirada en la formulación equivalente que aparece en [Frea], [Frec] y [Fre03, Chapter 48] (véase también [BDPM00]).

El Apartado 3.3.2 está dedicado a comparar la integral de McShane con la S^*-integral. Resulta que, en contextos donde la integral de McShane se puede definir, *toda función S^*-integrable es integrable McShane*. Extendemos así el resultado de Fremlin comentado anteriormente que afirma que cualquier función integrable Birkhoff, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon, es integrable McShane. Este caso particular y nuestra caracterización de la propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios duales nos permiten resolver parcialmente un problema propuesto por Fremlin en [Fre94, Fre95].

Finalmente, en el Apartado 3.3.3 mostramos que toda función integrable McShane se puede aproximar arbitrariamente por funciones simples cuando se considera la seminorma dada por la semivariación total de la integral indefinida. Nuestras técnicas proporcionan una demostración corta y elemental de un resultado de Fremlin [Fre95] que asegura que *la integral indefinida de Pettis de cualquier función integrable McShane, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon, tiene rango relativamente compacto en norma*.

3.3.1. Definición y propiedades elementales

A lo largo de esta sección τ es una topología en Ω con $\tau \subset \Sigma$ y suponemos que $\hat{\mu}$ satisface las siguientes propiedades:

(α) para cada $E \in \Sigma$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $G \in \tau$, $G \supset E$, tal que $\hat{\mu}(G \setminus E) \leq \varepsilon$;
(β) para cada familia (no vacía) $\mathscr{G} \subset \tau$ dirigida superiormente, se tiene

$$\inf\{\hat{\mu}(\cup\mathscr{G} \setminus G) : \ G \in \mathscr{G}\} = 0.$$

Equivalentemente, $(\Omega, \tau, \Sigma, \vartheta)$ es un espacio de medida topológico quasi-Radon.

Existen ejemplos naturales de espacios topológicos y medidas vectoriales verificando las anteriores propiedades. A continuación mencionamos un par de ellos.

Ejemplo 3.3.6. Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Decimos que una medida contablemente aditiva $\nu : \mathrm{Borel}(K) \longrightarrow Y$ es *regular*, [DU77, p. 157], si para cada $E \in \mathrm{Borel}(K)$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $C \subset E$ tal que $\|\nu\|(E \setminus C) \leq \varepsilon$. Tales medidas aparecen en la representación de los operadores débilmente compactos de $C(K)$ en Y a través de la integral de Bartle-Dunford-Schwartz, véase [DU77, Chapter VI]. Dada una tal ν, podemos definir una medida contablemente aditiva $\mu : \mathrm{Borel}(K) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}, Y)$ mediante $\mu(E)(a) = a\nu(E)$. Entonces $\hat{\mu}$ es continua y satisface las propiedades (α) y (β) (téngase en cuenta que la completación de cualquier medida de control de ν es de Radon).

Ejemplo 3.3.7. Sea T un espacio topológico analítico Hausdorff. Entonces cualquier medida contablemente aditiva $\mu : \mathrm{Borel}(T) \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ con semivariación contextual continua cumple las propiedades (α) y (β), ya que la completación de cualquier medida de control de $\hat{\mu}$ es de Radon.

En lo sucesivo vamos a utilizar sin mención explícita el hecho de que las propiedades (α) y (β) son hereditarias: para cada $A \in \Sigma$, la función $\widehat{\mu_A}$ satisface (α) y (β) respecto de Σ_A y la topología inducida τ_A (téngase en cuenta que $(A, \tau_A, \Sigma_A, \vartheta_A)$ es quasi-Radon).

Definición 3.3.8. *Una partición parcial de McShane de Ω es una colección finita*

$$\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : \ 1 \leq i \leq p\},$$

donde $E_1, \dots, E_p$ son elementos de Σ disjuntos dos a dos y $s_i \in \Omega$ para cada $1 \leq i \leq p$. Utilizaremos la notación $W_{\mathscr{P}} := \bigcup_{i=1}^{p} E_i$. Dado un calibre δ en (Ω, τ), decimos que $\mathscr{P}$ está subordinada a δ si $E_i \subset \delta(s_i)$ para cada $1 \leq i \leq p$.

Denotamos por Π el conjunto de todas las particiones parciales de McShane de Ω. Dados un calibre δ en (Ω, τ) y $\eta > 0$, el Lema 3.3.1 (aplicado a la medida de quasi-Radon ϑ) nos garantiza que el conjunto

$$\Pi_{\delta,\eta} = \{\mathscr{P} \in \Pi : \ \mathscr{P} \text{ está subordinada a } \delta, \ \hat{\mu}(\Omega \setminus W_{\mathscr{P}}) \leq \eta\}$$

no es vacío. Nótese que si δ_1 y δ_2 son dos calibres en (Ω, τ), entonces la función $t \mapsto \delta_1(t) \cap \delta_2(t)$ es otro calibre en (Ω, τ). Por tanto, la familia $\mathscr{B} = \{\Pi_{\delta,\eta} : \ \delta \text{ es un calibre en } (\Omega, \tau), \ \eta > 0\}$ es una base de filtro en Π. Denotamos por $\mathscr{F}$ el filtro en Π generado por $\mathscr{B}$.

Dada una función $f : \Omega \longrightarrow X$ y $\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\} \in \Pi$, escribimos

$$f(\mathscr{P}) := \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f(s_i)) \in Y.$$

Definición 3.3.9 ([Rodc]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es integrable McShane respecto de μ si existe $\lim_{\mathscr{P} \to \mathscr{F}} f(\mathscr{P}) = y \in Y$ (en norma). El vector y se llama integral de McShane de f respecto de μ y se denota por $(M) \int_\Omega f \, d\mu$.*

Es decir, f es integrable McShane respecto de μ si y sólo si existe un $y \in Y$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existen $\eta > 0$ y un calibre δ en (Ω, τ) tales que

$$\|f(\mathscr{P}) - y\| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } \mathscr{P} \in \Pi_{\delta,\eta}.$$

Claramente, el conjunto de todas las funciones de Ω en X que son integrables McShane respecto de μ, denotado por $M(\mu)$, es un subespacio vectorial de X^Ω, y la aplicación $f \mapsto (M) \int_\Omega f \, d\mu$ es lineal.

La siguiente proposición muestra que la integral de McShane de funciones definidas en espacios de medida topológicos quasi-Radon, en el sentido de [Fre95], es un caso particular de la noción que acabamos de introducir. El lector puede encontrar en [Frec, Proposition 3] una prueba totalmente autocontenida que sólo utiliza las definiciones de ambas integrales.

Proposición 3.3.10 (Fremlin). *Sea $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ un espacio de medida topológico quasi-Radon. Definimos $\mu:\mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{L}(X,X)$ mediante $\mu(E)(x)=\vartheta(E)x$. Sea $f:T\longrightarrow X$ una función. Entonces f es integrable McShane respecto de μ si y sólo si es integrable McShane respecto de θ en el sentido de la Definición 3.3.2. En tal caso, las respectivas integrales coinciden.*

Demostración. La prueba del *sólo si* es inmediata. Recíprocamente, supongamos que f es integrable McShane respecto de θ en el sentido de la Definición 3.3.2. Fijamos $\varepsilon>0$. Por el *lema de Henstock-Saks*, véase [Fre95, 2B], existe un calibre δ en $(T,\mathfrak{T})$ tal que

$$\|f(\mathscr{P})-\nu_f(W_{\mathscr{P}})\|\leq\varepsilon$$

para cada partición parcial de McShane $\mathscr{P}$ de T subordinada a δ. Por otro lado, como la medida contablemente aditiva ν_f es θ-continua, existe un $\eta>0$ de manera que $\|\nu_f(E)\|\leq\varepsilon$ para cada $E\in\mathscr{S}$ con $\theta(E)=\hat{\mu}(E)\leq\eta$. Ahora, para cualquier partición parcial de McShane $\mathscr{P}$ de T subordinada a δ con $\hat{\mu}(T\setminus W_{\mathscr{P}})\leq\eta$, se tiene

$$\|f(\mathscr{P})-\nu_f(T)\|\leq\|f(\mathscr{P})-\nu_f(W_{\mathscr{P}})\|+\|\nu_f(T\setminus W_{\mathscr{P}})\|\leq 2\varepsilon.$$

Esto demuestra que f es integrable McShane respecto de μ, con $(M)\int_T f\,d\mu=\nu_f(T)$. □

El resto del apartado se dedica a establecer una serie de propiedades básicas de la integral de McShane (tomadas de [Rodc]) que emplearemos frecuentemente.

En primer lugar, vamos a analizar la integrabilidad de las restricciones y el comportamiento de la "integral indefinida". Dados un calibre δ en (Ω,τ) y $E\in\Sigma$, escribimos δ_E para denotar el calibre en (E,τ_E) definido por $t\mapsto\delta(t)\cap E$.

Lema 3.3.11. *Sean $f\in M(\mu)$ y $A\in\Sigma$. Entonces la restricción $f|_A$ es integrable McShane respecto de μ_A. Emplearemos la notación $\zeta_f(A)=(M)\int_A f|_A\,d\mu_A$.*

Demostración. Basta demostrar que para cada $\varepsilon>0$ existen un calibre δ_A en (A,τ_A) y $\eta>0$ de manera que $\|f(\mathscr{P}_1)-f(\mathscr{P}_2)\|\leq\varepsilon$ para cualesquiera dos particiones parciales de McShane $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ de A subordinadas a δ_A con $\hat{\mu}(A\setminus W_{\mathscr{P}_i})\leq\eta$ para $i=1,2$.

Como $f\in M(\mu)$, podemos encontrar un calibre δ en (Ω,τ) y un $\eta>0$ tales que

$$\|f(\mathscr{P})-f(\mathscr{P}')\|\leq\varepsilon\quad\text{para cada } \mathscr{P},\mathscr{P}'\in\Pi_{\delta,2\eta}. \tag{3.13}$$

Por otro lado, fijamos una partición parcial de McShane $\mathscr{P}_0$ de $\Omega\setminus A$ subordinada a $\delta_{\Omega\setminus A}$ tal que $\hat{\mu}(\Omega\setminus(A\cup W_{\mathscr{P}_0}))\leq\eta$.

Tomamos dos particiones parciales de McShane $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ de A subordinadas a δ_A tales que $\hat{\mu}(A\setminus W_{\mathscr{P}_i})\leq\eta$ para $i=1,2$. Entonces $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_0$ y $\mathscr{P}'=\mathscr{P}_2\cup\mathscr{P}_0$ pertenecen a $\Pi_{\delta,2\eta}$ y la desigualdad (3.13) nos asegura que $\|f(\mathscr{P}_1)-f(\mathscr{P}_2)\|=\|f(\mathscr{P})-f(\mathscr{P}')\|\leq\varepsilon$. Esto completa la demostración. □

Proposición 3.3.12. *Sea $f\in M(\mu)$. Entonces la función $\zeta_f:\Sigma\longrightarrow Y$ es una medida contablemente aditiva y ϑ-continua.*

Demostración. Es fácil comprobar que ζ_f es una medida finitamente aditiva tal que $\zeta_f(E) = 0$ para cada $E \in \Sigma$ con $\vartheta(E) = 0$. Para ver que ζ_f es contablemente aditiva, fijamos $\varepsilon > 0$. Como $f \in M(\mu)$, existen un calibre δ en (Ω, τ) y un $\eta > 0$ tales que

$$\|f(\mathscr{P}) - \zeta_f(\Omega)\| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } \mathscr{P} \in \Pi_{\delta,\eta}.$$

Fijamos $E \in \Sigma$ con $\hat{\mu}(E) \leq \eta/2$. *Se afirma que* $\|\zeta_f(E)\| \leq 3\varepsilon$. En efecto, tomamos una partición parcial de McShane $\mathscr{P}_1$ de $\Omega \setminus E$ subordinada a $\delta_{\Omega\setminus E}$ tal que $\hat{\mu}(\Omega \setminus (E \cup W_{\mathscr{P}_1})) \leq \eta/2$, y fijamos otra partición parcial de McShane $\mathscr{P}_2$ de E subordinada a δ_E verificando

$$\|f(\mathscr{P}_2) - \zeta_f(E)\| \leq \varepsilon.$$

Como $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ pertenecen a $\Pi_{\delta,\eta}$, tenemos

$$\|\zeta_f(E)\| \leq \|\zeta_f(E) - f(\mathscr{P}_2)\| + \|f(\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2) - \zeta_f(\Omega)\| + \|f(\mathscr{P}_1) - \zeta_f(\Omega)\| \leq 3\varepsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{\hat{\mu}(A)\to 0} \zeta_f(A) = 0$. Finalmente, la continuidad de $\hat{\mu}$ garantiza que la medida finitamente aditiva ζ_f es, de hecho, contablemente aditiva. □

Disponemos también de la siguiente versión del llamado *lema de Henstock-Saks*.

Lema 3.3.13. *Sea $f \in M(\mu)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ en (Ω, τ) tal que*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f(s_i)) - \zeta_f\Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)\Big\| \leq \varepsilon$$

para cada partición parcial de McShane $\{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\}$ de Ω subordinada a δ.

Demostración. Fijamos un calibre δ en (Ω, τ) y $\eta > 0$ tales que

$$\|f(\mathscr{P}') - \zeta_f(\Omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para cada } \mathscr{P}' \in \Pi_{\delta,\eta}.$$

Tomamos cualquier partición parcial de McShane $\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\}$ de Ω subordinada a δ. Como $f|_{\Omega\setminus W_{\mathscr{P}}} \in M(\mu_{\Omega\setminus W_{\mathscr{P}}})$, podemos encontrar una partición parcial de McShane $\mathscr{P}_0$ de $\Omega \setminus W_{\mathscr{P}}$ subordinada a $\delta_{\Omega\setminus W_{\mathscr{P}}}$ tal que $\hat{\mu}(\Omega \setminus (W_{\mathscr{P}} \cup W_{\mathscr{P}_0})) \leq \eta$ y $\|f(\mathscr{P}_0) - \zeta_f(\Omega \setminus W_{\mathscr{P}})\| \leq \varepsilon/2$. Nótese que $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}_0 \in \Pi_{\delta,\eta}$, luego

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f(s_i)) - \zeta_f\Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)\Big\| \\
&\qquad \leq \|f(\mathscr{P} \cup \mathscr{P}_0) - \zeta_f(\Omega)\| + \|f(\mathscr{P}_0) - \zeta_f(\Omega \setminus W_{\mathscr{P}})\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

La prueba de la siguiente proposición imita un razonamiento empleado en [Fre95, 2E].

Proposición 3.3.14. *Sean $f : \Omega \longrightarrow X$ una función y $A \in \Sigma$ tales que $f|_A$ es integrable McShane respecto de μ_A. Entonces $f\chi_A \in M(\mu)$ y $(M)\int_\Omega f\chi_A \, d\mu = (M)\int_A f|_A \, d\mu_A$.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un abierto $G_m \supset A$ tal que

$$\hat{\mu}(G_m \setminus A) \leq \frac{\varepsilon}{2^m \cdot m}. \tag{3.14}$$

Como $f|_A$ es integrable McShane respecto de μ_A, el Lema 3.3.13 garantiza la existencia de un calibre δ' en (A, τ_A) tal que

$$\|f(\mathscr{P}') - \zeta_{f|_A}(W_{\mathscr{P}'})\| \leq \varepsilon \tag{3.15}$$

para cada partición parcial de McShane $\mathscr{P}'$ de A subordinada a δ'. Por otro lado, como $\zeta_{f|_A}$ es ϑ_A-continua (Proposición 3.3.12), existe $\eta > 0$ tal que

$$\|\zeta_{f|_A}(E)\| \leq \varepsilon \quad \text{para cualquier } E \in \Sigma_A \text{ con } \hat{\mu}(E) \leq \eta. \tag{3.16}$$

Fijamos un conjunto cerrado $K \subset A$ tal que $\hat{\mu}(A \setminus K) \leq \eta/2$. Tomamos un calibre δ en (Ω, τ) verificando

- $\delta(t) \cap A = \delta'(t)$ y $\delta(t) \subset G_m$ si $t \in A$ y $m - 1 \leq \|f(t)\| < m$;
- $\delta(t) = \Omega \setminus K$ si $t \in \Omega \setminus A$.

Se afirma que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f\chi_A(s_i)) - (M)\int_A f|_A \, d\mu_A\Big\| \leq 3\varepsilon \tag{3.17}$$

para cada $\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\} \in \Pi_{\delta, \eta/2}$. En efecto, la colección $\{(E_i \cap A, s_i) : s_i \in A\}$ es una partición parcial de McShane de A subordinada a δ', luego

$$\Big\|\sum_{s_i \in A} \mu(E_i \cap A)(f(s_i)) - \zeta_{f|_A}\Big(\bigcup_{s_i \in A}(E_i \cap A)\Big)\Big\| \leq \varepsilon, \tag{3.18}$$

por (3.15). La elección de δ asegura que $A \cap (\bigcup_{s_i \notin A} E_i) \subset A \setminus K$ y, por tanto, tenemos

$$\hat{\mu}\Big(A \setminus \bigcup_{s_i \in A} E_i\Big) \leq \hat{\mu}\Big(A \cap \Big(\bigcup_{s_i \notin A} E_i\Big)\Big) + \hat{\mu}(\Omega \setminus W_{\mathscr{P}}) \leq \hat{\mu}(A \setminus K) + \hat{\mu}(\Omega \setminus W_{\mathscr{P}}) \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Podemos aplicar ahora (3.16) para deducir que $\|\zeta_{f|_A}(A \setminus \bigcup_{s_i \in A} E_i)\| \leq \varepsilon$. Esta desigualdad y (3.18) implican

$$\Big\|\sum_{s_i \in A} \mu(E_i \cap A)(f(s_i)) - \zeta_{f|_A}(A)\Big\| \leq 2\varepsilon. \tag{3.19}$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, definimos $I_m = \{1 \leq i \leq p : \ s_i \in A, \ m - 1 \leq \|f(s_i)\| < m\}$ y observamos que la elección de δ garantiza que $\bigcup_{i \in I_m} E_i \subset G_m$. Aplicando (3.14) se deduce la desigualdad

$$\Big\|\sum_{s_i \in A} \mu(E_i \setminus A)(f(s_i))\Big\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \Big\|\sum_{i \in I_m} \mu(E_i \setminus A)(f(s_i))\Big\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\mu}(G_m \setminus A) \cdot m \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon,$$

que combinada con (3.19) nos permite obtener

$$\Big\|\sum_{i=1}^{p}\mu(E_i)(f\chi_A(s_i))-\zeta_{f|_A}(A)\Big\|=\Big\|\sum_{s_i\in A}\mu(E_i)(f(s_i))-\zeta_{f|_A}(A)\Big\|\leq 3\varepsilon.$$

Esto demuestra (3.17) y finaliza la prueba de la proposición. $\square$

Corolario 3.3.15. *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función simple, $f=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}$, donde $A_1,\dots,A_n\in\Sigma$ y $x_1,\dots,x_n\in X$. Entonces $f\in M(\mu)$ y $(M)\int_\Omega f\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)(x_i)$.*

Demostración. Basta considerar el caso $f=x\chi_A$, que se sigue inmediatamente de la Proposición 3.3.14 y el hecho de que las funciones constantes son integrables McShane. $\square$

Corolario 3.3.16. *Sean $f,g:\Omega\longrightarrow X$ dos funciones que coinciden $\hat{\mu}$-a.e. Entonces $f\in M(\mu)$ si y sólo si $g\in M(\mu)$. En tal caso, $(M)\int_\Omega f\,d\mu=(M)\int_\Omega g\,d\mu$.*

Demostración. Definimos $h=f-g$ y fijamos $A\in\Sigma$ con $\hat{\mu}(\Omega\setminus A)=0$ tal que $h(t)=0$ para cada $t\in A$. Como $h|_{\Omega\setminus A}$ es integrable McShane respecto de $\mu_{\Omega\setminus A}$, con integral 0, la Proposición 3.3.14 nos asegura que $h\chi_{\Omega\setminus A}=h\in M(\mu)$ y $(M)\int_\Omega h\,d\mu=0$. $\square$

3.3.2. Relación con la S^*-integral y la integral de Bartle-Dobrakov

Comenzamos directamente con el principal teorema de este apartado.

Teorema 3.3.17 ([Rodc]). *Sea $f\in S^*(\mu)$. Entonces $f\in M(\mu)$ y $(S^*)\int_\Omega f\,d\mu=(M)\int_\Omega f\,d\mu$.*

La prueba se divide en cuatro casos.

Caso 1. Supongamos que Ω es un átomo de $\hat{\mu}$.

Por el Lema 3.2.12, existe un $E\in\Sigma$ con $\hat{\mu}(\Omega\setminus E)=0$ tal que $\imath_f(\Omega)=\mu(\Omega)(f(t))$ para cada $t\in E$. Por tanto, $f(\mathscr{P})=\imath_f(\Omega)$ para cada partición parcial de McShane $\mathscr{P}$ de E tal que $\hat{\mu}(E\setminus W_{\mathscr{P}})<\hat{\mu}(E)$ (téngase en cuenta que E es un átomo de $\hat{\mu}$). Se sigue que $f|_E$ es integrable McShane respecto de μ_E, con integral $\imath_f(\Omega)$. Ahora podemos aplicar la Proposición 3.3.14 para deducir que $f\chi_E\in M(\mu)$ y $(M)\int_\Omega f\chi_E\,d\mu=\imath_f(\Omega)$. Como f y $f\chi_E$ coinciden $\hat{\mu}$-a.e., se sigue que f es integrable McShane respecto de μ y $(M)\int_\Omega f\,d\mu=\imath_f(\Omega)$ (Corolario 3.3.16). $\square$

Caso 2. Supongamos que existe una partición contable (A_n) de Ω formada por átomos de $\hat{\mu}$.

Dados $E\in\Sigma$ y $n\in\mathbb{N}$, la restricción $f|_{A_n\cap E}$ es S^*-integrable respecto de $\mu_{A_n\cap E}$. Se afirma que $f|_{A_n\cap E}\in M(\mu_{A_n\cap E})$, con integral de McShane $\imath_f(A_n\cap E)$. En efecto, esto es obvio cuando $\hat{\mu}(A_n\cap E)=0$; si, por el contrario, $A_n\cap E$ es un átomo de $\hat{\mu}$, la afirmación se sigue del *Caso 1*. De la Proposición 3.3.14 se deduce que $f\chi_{A_n\cap E}\in M(\mu)$ y

$$(M)\int_\Omega f\chi_{A_n\cap E}\,d\mu=(M)\int_{A_n\cap E}f|_{A_n\cap E}\,d\mu_{A_n\cap E}=\imath_f(A_n\cap E).$$

En particular, $f\chi_{A_n} \in M(\mu)$ y

$$\zeta_{f\chi_{A_n}}(E) = \zeta_{f\chi_{A_n}}(A_n \cap E) = (M)\int_{A_n\cap E} f|_{A_n\cap E}\, d\mu_{A_n\cap E} = \iota_f(A_n \cap E) \tag{3.20}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $E \in \Sigma$.

Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un calibre δ_n en (Ω, τ) tal que

$$\| f\chi_{A_n}(\mathscr{P}') - \zeta_{f\chi_{A_n}}(W_{\mathscr{P}'})\| \le \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{3.21}$$

para cada partición parcial de McShane $\mathscr{P}'$ de Ω subordinada a δ_n (Lema 3.3.13). Por otra parte, como ι_f es contablemente aditiva (Proposición 3.2.6), existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\|\sum_{n\in F} \iota_f(A_n)\Big\| \le \varepsilon \tag{3.22}$$

para cualquier conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ con $F \cap \{1,\dots,N_0\} = \emptyset$. Teniendo en cuenta que cada A_n es un átomo de $\hat{\mu}$, para cada $1 \le n \le N_0$ podemos encontrar un cerrado $F_n \subset A_n$ tal que $\hat{\mu}(A_n \setminus F_n) = 0$.

Definimos un calibre δ en (Ω, τ) mediante la fórmula

$$\delta(t) := \delta_n(t) \setminus \bigcup_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N_0} F_m \quad \text{si } t \in A_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

y fijamos $0 < \eta < \min\{\hat{\mu}(A_n) : 1 \le n \le N_0\}$. Se afirma que

$$\| f(\mathscr{P}) - \iota_f(\Omega)\| \le 2\varepsilon \quad \text{para cada } \mathscr{P} \in \Pi_{\delta,\eta}. \tag{3.23}$$

Tomamos cualquier $\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : 1 \le i \le p\} \in \Pi_{\delta,\eta}$. Dado $1 \le n \le N_0$, la definición de δ asegura que

$$A_n \setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i \subset (A_n \setminus F_n) \cup \Big(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big),$$

luego $\hat{\mu}(A_n \setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i) \le \eta < \hat{\mu}(A_n)$ y, por tanto, $\hat{\mu}(A_n \setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i) = 0$ (ya que A_n es un átomo de $\hat{\mu}$). Así, $\iota_f(A_n \setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i) = 0$ para cada $1 \le n \le N_0$. Por otro lado, para cada $n > N_0$ tenemos $\iota_f(A_n \setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i) \in \{0, \iota_f(A_n)\}$. Utilizando (3.22) podemos deducir que

$$\Big\|\sum_n \iota_f\Big(A_n \setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i\Big)\Big\| \le \varepsilon. \tag{3.24}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\{(E_i, s_i) : s_i \in A_n\}$ es una partición parcial de McShane de Ω subordinada a δ_n, luego

$$\Big\|\sum_{s_i\in A_n} \mu(E_i)(f\chi_{A_n}(s_i)) - \iota_f\Big(\Big(\bigcup_{s_i\in A_n} E_i\Big) \cap A_n\Big)\Big\| \le \frac{\varepsilon}{2^n},$$

por (3.21) y (3.20). Combinando esta desigualdad con (3.24) obtenemos

$$\|f(\mathscr{P})-\imath_f(\Omega)\| = \Big\|\sum_n \sum_{s_i\in A_n} \mu(E_i)(f\chi_{A_n}(s_i)) - \sum_n \imath_f(A_n)\Big\|$$
$$\leq \sum_n \Big\|\sum_{s_i\in A_n}\mu(E_i)(f\chi_{A_n}(s_i)) - \imath_f\Big(\Big(\bigcup_{s_i\in A_n} E_i\Big)\cap A_n\Big)\Big\| + \Big\|\sum_n \imath_f\Big(A_n\setminus \bigcup_{s_i\in A_n} E_i\Big)\Big\| \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n}+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Esto demuestra (3.23). Como $\varepsilon>0$ es arbitrario, $f\in M(\mu)$ y $(M)\int_\Omega f\,d\mu = \imath_f(\Omega)$. □

Caso 3. Supongamos que $\hat{\mu}$ no tiene átomos.

Entonces, para cada $t\in\Omega$, tenemos $\vartheta^*(\{t\})=0$ y, por tanto, $\{t\}\in\Sigma$ y $\hat{\mu}(\{t\})=0$ (gracias a la completitud de ϑ).

Fijamos $\varepsilon>0$. Por el Lema 3.2.5 existe una partición contable $\Gamma_0=(A_n)$ de Ω en Σ tal que

$$\|S(f,\Gamma,T)-\imath_f(\cup\Gamma)\|\leq\varepsilon \tag{3.25}$$

para cada colección finita Γ de elementos de Σ disjuntos dos a dos, más fina que Γ_0, y cualquier elección T en Γ. Como $\imath_f$ es ϑ-continua (Proposición 3.2.6), podemos tomar un $\eta>0$ tal que

$$\|\imath_f(E)\|\leq\varepsilon \quad \text{para cada } E\in\Sigma \text{ con } \hat{\mu}(E)\leq\eta. \tag{3.26}$$

Fijamos $N_0\in\mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que

$$\hat{\mu}\Big(\bigcup_{n>N_0} A_n\Big)\leq\frac{\eta}{3}. \tag{3.27}$$

Por otro lado, para cada $n,m\in\mathbb{N}$ tomamos un conjunto cerrado $K_n\subset A_n$ y un abierto $G_{n,m}\supset A_n$ tales que

$$\hat{\mu}(A_n\setminus K_n)\leq\frac{\eta}{2^n\cdot 3} \tag{3.28}$$

y

$$\hat{\mu}(G_{n,m}\setminus A_n)\leq\frac{\varepsilon}{2^{n+m}\cdot m}. \tag{3.29}$$

Consideramos el calibre δ en (Ω,τ) definido por

$$\delta(t) := G_{n,m}\setminus\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{N_0} K_i \quad \text{si } t\in A_n \text{ y } m-1\leq\|f(t)\|<m, \quad n,m\in\mathbb{N}.$$

Vamos a demostrar que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{p}\mu(E_i)(f(s_i))-\imath_f(\Omega)\Big\|\leq 3\varepsilon \tag{3.30}$$

para cada $\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\} \in \Pi_{\delta,\eta/3}$. En efecto, nótese que podemos suponer que $s_i \neq s_j$ para $i \neq j$. Fijamos un $N \geq N_0$ tal que $s_1, \ldots, s_p \in \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ y definimos $F = \Omega \setminus \{s_i : 1 \leq i \leq p\}$. Para cada $1 \leq n \leq N$, escribimos $I_n = \{1 \leq i \leq p : s_i \in A_n\}$ y consideramos

$$E_{i,n} := (E_i \cap A_n \cap F) \cup \{s_i\}$$

para todo $i \in I_n$. Como $\Gamma = \{E_{i,n} :\ 1 \leq n \leq N,\ i \in I_n\}$ es una colección de elementos de Σ disjuntos dos a dos más fina que Γ_0, la desigualdad (3.25) asegura que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \sum_{i \in I_n} \big(\mu(E_{i,n})(f(s_i)) - \iota_f(E_{i,n})\big) \Big\| \leq \varepsilon. \tag{3.31}$$

Como $\vartheta(\{t\}) = 0$ para todo $t \in \Omega$, tenemos $\vartheta((E_i \cap A_n) \triangle E_{i,n}) = 0$ para cada $1 \leq n \leq N$ y cada $i \in I_n$, luego

$$\iota_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{i \in I_n} E_{i,n}\Big) = \iota_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{i \in I_n} (E_i \cap A_n)\Big).$$

Esta igualdad, el hecho de que $\mu(E_{i,n}) = \mu(E_i \cap A_n)$ (para cada $1 \leq n \leq N$ y cada $i \in I_n$) y (3.31) implican

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \sum_{i \in I_n} \mu(E_i \cap A_n)(f(s_i)) - \iota_f\Big(\bigcup_{n=1}^{N} \Big(P_n \cap A_n\Big)\Big) \Big\| \leq \varepsilon, \tag{3.32}$$

donde escribimos $P_n := \bigcup_{i \in I_n} E_i$ para todo $1 \leq n \leq N$.

Se afirma que

$$A_n \setminus P_n \subset (A_n \setminus K_n) \cup \Big(\bigcup_{s > N_0} A_s\Big) \cup \Big(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big) \quad \text{para cada } 1 \leq n \leq N. \tag{3.33}$$

En efecto, basta comprobar que $(A_n \setminus P_n) \cap (\bigcup_{i=1}^{p} E_i) \subset A_n \setminus K_n$ para cada $1 \leq n \leq N_0$. Para verlo, tomamos $1 \leq i \leq p$ y suponemos que $(A_n \setminus P_n) \cap E_i \neq \emptyset$. Entonces existe algún $k \neq n$ tal que $s_i \in A_k$ y, por tanto, tenemos

$$E_i \cap K_n \subset \delta(s_i) \cap K_n \subset \Big(\Omega \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N_0} K_i\Big) \cap K_n = \emptyset,$$

luego $(A_n \setminus P_n) \cap E_i \subset A_n \setminus K_n$. Esto completa la prueba de (3.33).

Como consecuencia de (3.33) obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\mu}\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus P_n)\Big) \cup \Big(\bigcup_{n > N} A_n\Big)\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \hat{\mu}(A_n \setminus K_n) \\ + \hat{\mu}\Big(\bigcup_{s > N_0} A_s\Big) + \hat{\mu}\Big(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\eta}{2^n \cdot 3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} \leq \eta,\end{aligned}$$

por (3.28), (3.27) (recordemos que $N \geq N_0$) y el hecho de que $\mathscr{P} \in \Pi_{\delta,\eta/3}$. En vista de (3.26), deducimos la desigualdad

$$\Big\|\iota_f\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{N}(A_n \setminus P_n)\Big) \cup \Big(\bigcup_{n>N} A_n\Big)\Big)\Big\| \leq \varepsilon,$$

que combinada con (3.32) permite concluir

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{i\in I_n}\mu(E_i \cap A_n)(f(s_i)) - \iota_f(\Omega)\Big\| \leq 2\varepsilon. \tag{3.34}$$

De la definición de δ se sigue que $E_i \setminus A_n \subset G_{n,m} \setminus A_n$ cuando $i \in I_n$ y $m-1 \leq \|f(s_i)\| < m$. Utilizando (3.29) se obtiene

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{i\in I_n}\mu(E_i \setminus A_n)(f(s_i))\Big\| &\leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\|\sum_{\substack{i\in I_n \\ m-1\leq\|f(s_i)\|<m}}\mu(E_i \setminus A_n)(f(s_i))\Big\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{\mu}(G_{n,m} \setminus A_n)\cdot m \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+m}} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Esta desigualdad y (3.34) garantizan que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{p}\mu(E_i)(f(s_i)) - \iota_f(\Omega)\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{i\in I_n}\mu(E_i)(f(s_i)) - \iota_f(\Omega)\Big\| \leq 3\varepsilon.$$

Esto completa la demostración de (3.30) y finaliza la prueba del *Caso 3*. □

Caso general.

Existe una familia contable (quizás vacía) (A_n) de átomos de ϑ disjuntos dos a dos tal que $\vartheta_{\Omega\setminus A}$ no tiene átomos, donde $A := \bigcup_n A_n$.

Como $f|_A$ (resp. $f|_{\Omega\setminus A}$) es S^*-integrable respecto de μ_A (resp. $\mu_{\Omega\setminus A}$), el *Caso 2* (resp. *Caso 3*) nos asegura que $f|_A$ (resp. $f|_{\Omega\setminus A}$) es integrable McShane respecto de μ_A (resp. $\mu_{\Omega\setminus A}$) y

$$(M)\int_A f|_A \, d\mu_A = \iota_f(A) \quad \Big(\text{resp. } (M)\int_{\Omega\setminus A} f|_{\Omega\setminus A} \, d\mu_{\Omega\setminus A} = \iota_f(\Omega \setminus A)\Big).$$

En virtud de la Proposición 3.3.14, $f\chi_A \in M(\mu)$ (resp. $f\chi_{\Omega\setminus A} \in M(\mu)$) y $(M)\int_\Omega f\chi_A \, d\mu = \iota_f(A)$ (resp. $(M)\int_\Omega f\chi_{\Omega\setminus A} \, d\mu = \iota_f(\Omega \setminus A)$). Por tanto, $f = f\chi_A + f\chi_{\Omega\setminus A}$ es integrable McShane respecto de μ y $(M)\int_\Omega f \, d\mu = \iota_f(A) + \iota_f(\Omega \setminus A) = \iota_f(\Omega)$, como se quería demostrar. □

El recíproco del Teorema 3.3.17 no es cierto en general: como ya hemos mencionado al comienzo de la sección, existen funciones integrables McShane definidas en $[0,1]$ que no son integrables Birkhoff (Corolario 3.3.5). No obstante, la situación se simplifica en el caso de funciones fuertemente medibles.

Corolario 3.3.18 ([Rodc]). *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f\in D(\mu)$;

(ii) f *es fuertemente medible respecto de* $\hat{\mu}$ *y* $f\in S^*(\mu)$;

(iii) f *es fuertemente medible respecto de* $\hat{\mu}$ *y* $f\in M(\mu)$.

En tal caso, $(D)\int_\Omega f\,d\mu=(S^*)\int_\Omega f\,d\mu=(M)\int_\Omega f\,d\mu$.

Demostración. *(i)⇔(ii)⇒(iii)* y la igualdad de las integrales son consecuencia inmediata de los Teoremas 3.2.9 y 3.3.17. Por otra parte, *(iii)⇒(i)* se puede demostrar siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la prueba de *(ii)⇒(i)* en el Teorema 3.2.9. □

Corolario 3.3.19. *En las condiciones del Ejemplo 3.1.4, una función* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *es integrable Bartle-Dunford-Schwartz respecto de* ν *si y sólo si es integrable McShane respecto de* μ*. En tal caso, las respectivas integrales coinciden.*

Demostración. Basta imitar la prueba del Corolario 3.2.11. □

Vamos a finalizar el apartado proporcionando una aplicación conjunta de nuestra caracterización, en términos de la integral de Birkhoff, de la propiedad débil de Radon-Nikodým en duales y el siguiente caso particular del Teorema 3.3.17 (véase [Freb, Proposition 4]).

Corolario 3.3.20 (Fremlin). *Sean* $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ *un espacio de medida topológico quasi-Radon y* $f:T\longrightarrow X$ *una función. Si* f *es integrable Birkhoff, entonces* f *es integrable McShane y las respectivas integrales coinciden.*

Fremlin planteó en [Fre94] y [Fre95, 4G(c)] el siguiente problema:

> *Supongamos que* $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ *es un espacio de medida topológico quasi-Radon, que* Z *es un espacio de Banach y que* $\nu:\mathscr{S}\longrightarrow Z$ *es una función. ¿Bajo qué condiciones será* ν *la integral indefinida de una función integrable McShane de* T *en* Z*?*

Combinando los Teoremas 2.4.19 y 2.4.22 con el Corolario 3.3.20, podemos obtener la siguiente respuesta parcial a dicha pregunta.

Corolario 3.3.21. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *no contiene subespacios isomorfos a* ℓ^1;

(ii) para cualquier espacio de medida topológico quasi-Radon $(T,\mathfrak{T},\mathscr{S},\theta)$ *y cada medida contablemente aditiva y* θ*-continua* $\nu:\mathscr{S}\longrightarrow X^*$ *con variación* σ*-finita, existe una función integrable McShane* $f:T\longrightarrow X^*$ *tal que* $\nu=\nu_f$.

3.3.3. Aproximación por funciones simples

Fremlin demuestra en [Fre95, 3E] que *el rango de la integral indefinida de Pettis de cualquier función integrable McShane, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon, es relativamente compacto en norma*. Equivalentemente, una tal función es el límite, en la seminorma de Pettis, de una sucesión de funciones simples (Teorema 1.8.13). A continuación mostramos que dicha aproximación por funciones simples también es posible para cualquier función integrable McShane respecto de una medida vectorial. Cabe destacar que nuestra demostración no involucra las técnicas de familias estables empleadas en [Fre95] (véase los comentarios que siguen al Corolario 3.3.23).

Teorema 3.3.22 ([Rodd]). *Sea $f \in M(\mu)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función simple $g : \Omega \longrightarrow X$ tal que*

$$\sup_{E\in\Sigma} \|\zeta_f(E) - \zeta_g(E)\| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Por el Lema 3.3.13, existe un calibre δ en (Ω, τ) tal que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{q} \mu(F_i)(f(t_i)) - \zeta_f\Big(\bigcup_{i=1}^{q} F_i\Big)\Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.35}$$

para cada partición parcial de McShane $\mathscr{P} = \{(F_i,t_i) : 1 \leq i \leq q\}$ de Ω subordinada a δ. Como ζ_f es ϑ-continua (Proposición 3.3.12), podemos tomar un $\eta > 0$ tal que

$$\|\zeta_f(B)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para cada } B \in \Sigma \text{ con } \hat{\mu}(B) \leq \eta. \tag{3.36}$$

Fijamos una partición parcial de McShane $\{(E_i,s_i) : 1 \leq i \leq p\}$ de Ω subordinada a δ tal que $\hat{\mu}(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i) \leq \eta$. Definimos la función simple $g := \sum_{i=1}^{p} f(s_i)\chi_{E_i}$. Se afirma que

$$\sup_{E\in\Sigma} \big\|\zeta_f(E) - \zeta_g(E)\big\| \leq \varepsilon. \tag{3.37}$$

En efecto, dado $E \in \Sigma$, la colección $\{(E_i \cap E, s_i) :\ 1 \leq i \leq p\}$ es una partición parcial de McShane de Ω subordinada a δ y (3.35) nos dice que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i \cap E)(f(s_i)) - \zeta_f\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)\Big)\Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esta desigualdad y (3.36) aseguran que

$$\begin{aligned}\|\zeta_g(E) - \zeta_f(E)\| &= \Big\|\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i \cap E)(f(s_i)) - \zeta_f(E)\Big\| \\ &\leq \Big\|\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i \cap E)(f(s_i)) - \zeta_f\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)\Big)\Big\| + \Big\|\zeta_f\Big(E \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)\Big)\Big\| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

La prueba ha finalizado. □

La demostración del Corolario 3.2.14 puede imitarse para deducir el siguiente

Corolario 3.3.23 ([Rodd]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *para cada* $x \in X$*, el conjunto* $\{\mu(E)(x) : E \in \Sigma\}$ *es relativamente compacto en norma;*
(ii) *para cada* $f \in M(\mu)$*, el conjunto* $\{\zeta_f(E) : E \in \Sigma\}$ *es relativamente compacto en norma.*

En [Fre95, 3C] se demuestra que, *para una función integrable McShane* $f : T \longrightarrow X$*, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon* $(T, \mathfrak{T}, \mathscr{S}, \theta)$*, cualquier subconjunto contable de* $Z_f = \{x^* \circ f : x^* \in B_{X^*}\}$ *es estable* (y, a partir de aquí, se deduce que $\nu_f(\mathscr{S})$ es relativamente compacto en norma). Como consecuencia del Teorema 3.3.3, en el resultado anterior podemos reemplazar "estabilidad" por "propiedad de Bourgain".

Corolario 3.3.24. *Sea* $(T, \mathfrak{T}, \mathscr{S}, \theta)$ *un espacio de medida topológico quasi-Radon. Consideramos una función integrable McShane* $f : T \longrightarrow X$*. Entonces cualquier subconjunto contable de* Z_f *tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Fijamos una sucesión (x_n^*) en B_{X^*} y definimos un operador $L : X \longrightarrow \ell_\infty$ mediante

$$L(x) = (x_1^*(x), \dots, x_n^*(x), \dots) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Como la composición $L \circ f : T \longrightarrow \ell_\infty$ es integrable McShane y $(B_{\ell_\infty^*}, w^*)$ es separable, podemos aplicar el Teorema 3.3.3 para concluir que $L \circ f$ es integrable Birkhoff. Por tanto, la familia

$$\{x_n^* \circ f : \ n \in \mathbb{N}\} \subset Z_{L \circ f}$$

tiene la propiedad de Bourgain (Proposición 2.3.1), como se quería demostrar. □

En el Capítulo 5 (Corolario 5.3.19) proporcionaremos otra mejora (parcial) de [Fre95, 3C].

3.4. Espacios ultrabornológicos de funciones integrables

Dados un espacio de Banach Z y un espacio de medida finita y completo $(T, \mathscr{S}, \theta)$, podemos considerar el espacio $\mathscr{P}(\theta, Z)$ de todas las funciones integrables Pettis de T en Z, equipado con la seminorma de Pettis $\|\cdot\|_P$. Identificando funciones escalarmente equivalentes obtenemos un espacio normado $P(\theta, Z)$ que, en general, *no es completo*, como ya se puso de manifiesto en [Bir35] y [Pet38]. De hecho, Thomas [Tho76], Janicka y Kalton [JK77] (en el caso particular $T = [0,1]$) mostraron que $P(\theta, Z)$ *no es completo si* Z *es de dimensión infinita y* θ *no tiene átomos*. Por tanto, los subespacios de $P(\theta, Z)$ formados por todas las (clases de equivalencia de) funciones integrables Birkhoff o McShane (cuando esta integral se puede definir) no son completos en general.

La ausencia de completitud no impide, sin embargo, que podamos aplicar los teoremas de "acotación uniforme" o "gráfica cerrada" a aplicaciones lineales definidas en $P(\theta, Z)$, ya que este espacio es *tonelado* (Drewnowski, Florencio y Paúl [DFP92]) y los dos anteriores principios fundamentales son válidos para aplicaciones lineales de un espacio normado tonelado en un espacio de Banach. Díaz, Fernández, Florencio y Paúl [DFFP95] probaron que, de hecho, $P(\theta, Z)$ pertenece a una amplia clase de espacios *ultrabornológicos* de funciones medibles y, por tanto, podemos aplicar el teorema de la gráfica cerrada a aplicaciones lineales definidas en $P(\theta,Z)$ con valores en cualquier espacio localmente convexo Hausdorff de De Wilde.

Los resultados de [DFFP95] se basan en un principio general que afirma que un espacio normado dotado de un tipo especial de álgebra de Boole de proyecciones continuas es ultrabornológico (véase el Apartado 3.4.1). En esta sección vamos a aplicar dicho criterio para determinar cuándo son ultrabornológicos los espacios de (clases de equivalencia de) funciones vectoriales integrables (Dobrakov, S^* y McShane) respecto de una medida vectorial, equipados con la norma dada por la semivariación total de la integral indefinida.

3.4.1. Preliminares

Comenzamos este apartado con una breve introducción a los espacios localmente convexos tonelados y ultrabornológicos. Nuestras referencias básicas son [Jar81] y [CB87].

Se dice que un subconjunto A de un espacio vectorial V *absorbe* a un conjunto $B \subset V$ si existe un $\rho > 0$ tal que $B \subset \rho A$. Decimos que A es *absorbente* si absorbe a $\{v\}$ para todo $v \in V$.

Definición 3.4.1. *Sea V un espacio localmente convexo Hausdorff. Se dice que V es tonelado si cada subconjunto cerrado, absolutamente convexo y absorbente de V es un entorno de* 0.

Es bien conocido que un espacio localmente convexo Hausdorff V es tonelado si y sólo si, para cualquier espacio localmente convexo Hausdorff W, *toda familia puntualmente acotada de aplicaciones lineales continuas de V en W es equicontinua*, véase e.g. [Jar81, 11.1.1] o [CB87, Proposition 4.1.3]. Por otra parte, para estos espacios se dispone además de la siguiente versión del "teorema de la gráfica cerrada", véase e.g. [Jar81, 11.1.8] o [CB87, Theorem 4.1.10].

Teorema 3.4.2 (Pták, Mahowald). *Sea V un espacio localmente convexo Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) V es tonelado;

(ii) para cualquier espacio de Banach W, una aplicación lineal $T : V \longrightarrow W$ es continua si y sólo si $\{(v,T(v)) : v \in V\}$ es cerrado en $V \times W$.

Definición 3.4.3. *Sea V un espacio localmente convexo Hausdorff.*

(i) Un conjunto $D \subset V$ es un disco de Banach si es absolutamente convexo, acotado y $\mathrm{span}(D)$ *es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_D$ dada por* $\|v\|_D = \inf\{\rho > 0 : \ v \in \rho D\}$.

(ii) Se dice que V es ultrabornológico si cada subconjunto absolutamente convexo de V que absorbe todos los discos de Banach es un entorno de 0.

Todo espacio ultrabornológico es tonelado, véase e.g. [Jar81, 13.1] o [CB87, 6.1]. Por ejemplo, los *espacios de Fréchet* (i.e. metrizables y completos) son ultrabornológicos. El interés fundamental de esta noción reside en que, para un espacio localmente convexo Hausdorff ultrabornológico V, la implicación *(i)⇒(ii)* del Teorema 3.4.2 es válida incluso si se consideran aplicaciones lineales con valores en espacios localmente convexos Hausdorff W con *red estricta*, llamados *espacios de De Wilde*, véase [Jar81, 13.3.4]. No vamos a dar aquí la definición de los espacios de De Wilde, simplemente indicamos que a esta amplia clase pertenecen los espacios de Fréchet, los espacios de funciones "de prueba" $\mathscr{D}(A)$ en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y los espacios de distribuciones $\mathscr{D}'(A)$. Para información detallada sobre este tema remitimos al lector a [Jar81, DW78].

Como ya se ha comentado, el criterio de [DFFP95] para determinar si un espacio es ultrabornológico juega un papel fundamental en esta sección. Para recordarlo (en el contexto de espacios metrizables, Proposición 3.4.5) necesitamos introducir el siguiente concepto.

Definición 3.4.4. *Sean $(T, \mathscr{S}, \theta)$ un espacio de medida finita y V un espacio localmente convexo Hausdorff. Una familia $\{P_A : A \in \mathscr{S}\}$ de proyecciones continuas en V se llama $(T, \mathscr{S}, \theta)$-álgebra de Boole si satisface las siguientes propiedades:*

(i) P_T *es la identidad en* V*;*
(ii) $P_{A \cap B} = P_A \circ P_B$ *para cada* $A, B \in \mathscr{S}$*;*
(iii) $P_{A \cup B} = P_A + P_B$ *para cada* $A, B \in \mathscr{S}$ *disjuntos;*
(iv) $P_A = 0$ *para cada* $A \in \mathscr{S}$ *con* $\theta(A) = 0$.

Proposición 3.4.5 ([DFFP95]). *Sean $(T, \mathscr{S}, \theta)$ un espacio de medida finita y V un espacio localmente convexo metrizable. Supongamos que existe una $(T, \mathscr{S}, \theta)$-álgebra de Boole de proyecciones equicontinuas en V, digamos $\{P_A : A \in \mathscr{S}\}$, con las siguientes propiedades:*

(i) para cada sucesión decreciente (B_n) en $\mathscr{S}$ con $\theta(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$, cada sucesión acotada (v_n) en V tal que $P_{B_n}(v_n) = v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y cada $(\beta_n) \in \ell^1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n v_n$ converge;
(ii) $P_A(V)$ es ultrabornológico para cada átomo A de θ.

Entonces V es ultrabornológico.

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior obtenemos el resultado aislado en el Corolario 3.4.7, que vamos a aplicar a los espacios de funciones integrables Dobrakov, S^* y McShane (con la seminorma dada por la semivariación total de la integral indefinida). Más adelante veremos que todos estos espacios están incluidos en la siguiente clase.

Definición 3.4.6 ([Rodd]). *Decimos que un espacio seminormado $(F, \|\cdot\|)$ pertenece a la clase $\mathfrak{I}_\mu$ si cumple las siguientes propiedades:*

(i) F es un subespacio vectorial de X^Ω;
(ii) $f\chi_A \in F$ para cada $f \in F$ y cada $A \in \Sigma$;
(iii) para cada $f \in F$ existe una medida contablemente aditiva $V_f^F : \Sigma \longrightarrow Y$ tal que

- $V_{f\chi_A}^F(\Omega) = V_f^F(A)$ *para cada* $A \in \Sigma$*;*
- $V_f^F(E) = 0$ *para cada* $E \in \Sigma$ *con* $\hat{\mu}(E) = 0$*;*
- $\|f\| = \|V_f^F\|(\Omega)$*;*

(iv) $V_{\alpha f+g}^F = \alpha V_f^F + V_g^F$ para cada $f, g \in F$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dado un espacio seminormado $(F, \|\cdot\|)$ en la clase $\mathfrak{I}_\mu$, denotamos por $(F^\bullet, \|\cdot\|)$ el espacio normado de clases de equivalencia obtenido mediante el proceso de identificación usual

$$f \sim g \iff \|f - g\| = 0$$

y escribimos $f^\bullet$ para denotar la clase de equivalencia de cada $f \in F$. Es claro que $V^F_{f\chi_A}(B) = V^F_f(A \cap B)$ para cualesquiera $A, B \in \Sigma$. Por tanto, para cada $A \in \Sigma$ podemos definir una aplicación

$$P^F_A : F^\bullet \longrightarrow F^\bullet, \quad P^F_A(f^\bullet) := (f\chi_A)^\bullet.$$

Es fácil ver que $\{P^F_A : A \in \Sigma\}$ es una $(\Omega, \Sigma, \vartheta)$-álgebra de Boole de proyecciones equicontinuas en $(F^\bullet, \|\cdot\|)$. Escribiremos P_A y V_f en lugar de P^F_A y V^F_f cuando no haya posibilidad de confusión.

Corolario 3.4.7. *Sea $(F, \|\cdot\|)$ un espacio seminormado en la clase $\mathfrak{I}_\mu$ que verifica las siguientes propiedades:*

(i) para cada sucesión disjunta (A_n) en Σ con unión Ω, cada sucesión acotada (f_n) en F tal que $f_n|_{A_m} \equiv 0$ para todo $n > m$, y cada $(\alpha_n) \in \ell^1$, la función $f : \Omega \longrightarrow X$ definida por $f := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n$ pertenece a F y se tiene $\lim_N \|\sum_{n=1}^N \alpha_n f_n - f\| = 0$;

(ii) $P_A(F^\bullet)$ es ultrabornológico para cada átomo A de $\hat{\mu}$.

Entonces $(F^\bullet, \|\cdot\|)$ es ultrabornológico.

Demostración. Basta comprobar la condición *(i)* de la Proposición 3.4.5. Para ello fijamos una sucesión decreciente (B_n) en Σ con $\vartheta(\bigcap_{n=1}^\infty B_n) = 0$, una sucesión acotada $(h^\bullet_n)$ en $F^\bullet$ tal que $P_{B_n}(h^\bullet_n) = h^\bullet_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tomamos $(\beta_n) \in \ell^1$. Definimos $A_1 := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$, $A_2 := \Omega \setminus B_1$ y $A_n := B_{n-2} \setminus B_{n-1}$ para cada $n \geq 3$. Entonces (A_n) es una sucesión disjunta en Σ con unión Ω. Como $\vartheta(A_1) = 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $h_n|_{A_1} \equiv 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $f_1 = f_2 = 0 \in F$ y $f_n := h_{n-2}\chi_{B_{n-2}} \in F$ para cada $n \geq 3$. Claramente, $f_n|_{A_m} \equiv 0$ si $n > m$. Nótese que $f^\bullet_n = (h_{n-2}\chi_{B_{n-2}})^\bullet = P_{B_{n-2}}(h^\bullet_{n-2}) = h^\bullet_{n-2}$ para cada $n \geq 3$, luego (f_n) es una sucesión acotada y *(i)* nos permite concluir que $f := \sum_{n=3}^\infty \beta_{n-2} f_n \in F$ y $\lim_N \|\sum_{n=3}^N \beta_{n-2} f_n - f\| = 0$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^\infty \beta_n h^\bullet_n$ converge en $(F^\bullet, \|\cdot\|)$, como se quería demostrar. $\square$

En lo que respecta a la condición *(ii)*, el siguiente resultado clarifica las diferencias entre el caso general y el caso de integración respecto de medidas no negativas y finitas.

Proposición 3.4.8 ([Rodd]). *Sea $(F, \|\cdot\|)$ un espacio seminormado en la clase $\mathfrak{I}_\mu$ tal que toda función simple $g : \Omega \longrightarrow X$ pertenece a F, con $V_g(\Omega) = \int_\Omega g \, d\mu$. Supongamos que $A \in \Sigma$ es un átomo de $\hat{\mu}$ tal que $V_f(A) \in \mu(A)(X)$ para cada $f \in F$. Entonces $P_A(F^\bullet) = \{(x\chi_A)^\bullet : x \in X\}$ es linealmente homeomorfo a $\mu(A)(X)$ y las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $P_A(F^\bullet)$ es un espacio de Banach;

(ii) $P_A(F^\bullet)$ es ultrabornológico;

(iii) $P_A(F^\bullet)$ es tonelado;

(iv) $\mu(A)(X)$ es cerrado en Y.

Demostración. Escribimos $T := \mu(A)$ y denotamos por $\tilde{T}$ la biyección lineal continua de $X/\ker T$ en $T(X)$ dada por $\tilde{T}(x + \ker T) = T(x)$. Claramente, su inversa $\tilde{T}^{-1}$ tiene gráfica cerrada.

Por hipótesis, para cada $f \in F$ existe un $x_f \in X$ tal que $V_f(A) = T(x_f)$. Como A es un átomo de ϑ, se sigue inmediatamente que $(x_f\chi_A)^\bullet = (f\chi_A)^\bullet$. Por tanto, $P_A(F^\bullet) = \{(x\chi_A)^\bullet : x \in X\}$.

Además, usando de nuevo el hecho de que A es un átomo de ϑ, la Proposición 1.6.4 nos permite deducir

$$\|T(x)\| = \sup_{B\in\Sigma} \|V_{x\chi_A}(B)\| \leq \|(x\chi_A)^\bullet\| \leq 2\sup_{B\in\Sigma} \|V_{x\chi_A}(B)\| = 2\|T(x)\| \quad \text{para cada } x \in X.$$

Por tanto, podemos definir un homeomorfismo lineal $\phi : P_A(F^\bullet) \longrightarrow T(X)$ mediante la fórmula $\phi((x\chi_A)^\bullet) := T(x)$.

Pasamos a la prueba de la equivalencia entre las condiciones *(i)–(iv)*. Como ya hemos comentado, las implicaciones *(i)⇒(ii)⇒(iii)* se verifican en general. Supongamos ahora que se cumple *(iii)*. Entonces $T(X)$ es tonelado y, como $\tilde{T}^{-1}$ tiene gráfica cerrada, el Teorema 3.4.2 nos dice que $\tilde{T}^{-1}$ es continua. Por tanto, $\tilde{T}$ es un homeomorfismo lineal entre el espacio de Banach $X/\ker T$ y $T(X)$. Así, $T(X)$ es completo, es decir, cerrado en Y. Esto demuestra *(iii)⇒(iv)*. Finalmente, nótese que, como ϕ es un homeomorfismo lineal, si $T(X)$ es completo, entonces $P_A(F^\bullet)$ también lo es. □

3.4.2. Espacios de funciones integrables Bartle-Dobrakov

En lo sucesivo consideramos el espacio $D(\mu)$ equipado con la seminorma $\|\cdot\|_I$ dada por $\|f\|_I := \|I_f\|(\Omega)$. Es claro que $(D(\mu), \|\cdot\|_I)$ pertenece a la clase $\mathfrak{J}_\mu$ (basta tomar $V_f^{D(\mu)} = I_f$). Además, para cualquier átomo A de $\hat{\mu}$ se tiene $I_f(A) \in \mu(A)(X)$ para toda $f \in D(\mu)$ (nótese que f es fuertemente medible y, por tanto, constante en algún $B \in \Sigma_A$ con $\hat{\mu}(A\setminus B) = 0$). Ahora, como consecuencia inmediata de la Proposición 3.4.8 obtenemos el siguiente

Corolario 3.4.9. *Si $A \in \Sigma$ es un átomo de $\hat{\mu}$, entonces $P_A(D(\mu)^\bullet)$ es linealmente homeomorfo a $\mu(A)(X)$ y las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $P_A(D(\mu)^\bullet)$ *es un espacio de Banach;*
(ii) $P_A(D(\mu)^\bullet)$ *es ultrabornológico;*
(iii) $P_A(D(\mu)^\bullet)$ *es tonelado;*
(iv) $\mu(A)(X)$ *es cerrado en* Y.

Pasamos ya a caracterizar cuándo $(D(\mu)^\bullet, \|\cdot\|_I)$ es ultrabornológico.

Teorema 3.4.10 ([Rodd]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $D(\mu)^\bullet$ *es ultrabornológico;*
(ii) $D(\mu)^\bullet$ *es tonelado;*
(iii) $\mu(A)(X)$ *es cerrado en* Y *para cada átomo* A *de* $\hat{\mu}$.

Demostración. La implicación *(i)⇒(ii)* es válida para cualquier espacio normado. Por otra parte, para probar *(ii)⇒(iii)* fijamos un átomo A de $\hat{\mu}$ y observamos que, como P_A es una proyección continua, $P_A(D(\mu)^\bullet)$ es un subespacio complementado de $D(\mu)^\bullet$ y, por tanto, $P_A(D(\mu)^\bullet)$ es tonelado, véase e.g. [CB87, Corollary 4.2.2 (i)]. Ahora podemos utilizar el Corolario 3.4.9 para deducir que $\mu(A)(X)$ es cerrado en Y.

Finalmente, vamos a demostrar *(iii)⇒(i)* aplicando el criterio del Corolario 3.4.7. Ya sabemos que $P_A(D(\mu)^\bullet)$ es ultrabornológico para cada átomo A de $\hat{\mu}$ (Corolario 3.4.9), así que sólo tenemos que comprobar la siguiente condición:

(*) Para cada sucesión disjunta (A_n) en Σ con unión Ω, cada sucesión $\|\cdot\|_I$-acotada (f_n) en $D(\mu)$ tal que $f_n|_{A_m} \equiv 0$ para todo $n > m$, y cada $(\alpha_n) \in \ell^1$, la función $f : \Omega \longrightarrow X$ dada por $f := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ es integrable Dobrakov respecto de μ y $\lim_m \|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n f_n - f\|_I = 0$.

Para probar (*) definimos $g_m := \sum_{n=1}^{m} \alpha_n f_n \in D(\mu)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Nótese que (g_m) converge puntualmente a f y que para cada $E \in \Sigma$ existe $\lim_m (D)\int_E g_m \, d\mu = \lim_m \sum_{n=1}^{m} \alpha_n I_{f_n}(E)$, porque $(\alpha_n) \in \ell^1$ y $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_I < +\infty$. Así, la Proposición 3.1.17 asegura que $f \in D(\mu)$ y $\lim_m I_{g_m}(E) = I_f(E)$ uniformemente en $E \in \Sigma$, es decir, $\lim_m \|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n f_n - f\|_I = 0$. Esto completa la demostración. $\square$

Corolario 3.4.11. *Si $\hat{\mu}$ no tiene átomos, entonces $D(\mu)^\bullet$ es ultrabornológico.*

Swartz asegura en [Swa01, Theorem 16] que $D(\mu)^\bullet$ siempre es tonelado. Sin embargo, esta afirmación no es cierta en general. El ejemplo más sencillo de un espacio no tonelado de la forma $D(\mu)^\bullet$ lo proporciona un operador entre espacios de Banach cuyo rango no es cerrado. En efecto, tomamos un conjunto no vacío Ω y consideramos la σ-álgebra $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$. Fijamos un operador T entre dos espacios de Banach Z_1 y Z_2 tal que $T(Z_1)$ no es cerrado en Z_2 y definimos una medida $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathscr{L}(Z_1, Z_2)$ mediante $\mu(\emptyset) := 0$ y $\mu(\Omega) := T$. Entonces $D(\mu)^\bullet$ (que es linealmente homeomorfo a $T(Z_2)$) no es tonelado (Corolario 3.4.9).

La condición *(iii)* del Teorema 3.4.10 se cumple automáticamente en el caso particular considerado en el Ejemplo 3.1.3, y utilizando el Corolario 3.2.10 podemos deducir el siguiente

Corolario 3.4.12 ([DFFP95]). *Sean Z un espacio de Banach y $(T, \mathscr{S}, \theta)$ un espacio de medida finito y completo. Entonces el espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones fuertemente medibles e integrables Pettis de T en Z, con la norma de Pettis, es ultrabornológico.*

Observación 3.4.13. Es bien conocido que, en las condiciones del Ejemplo 3.1.3 (es decir, en el contexto de la integración de funciones reales respecto de medidas vectoriales), $(D(\mu)^\bullet, \|\cdot\|_I)$ es un *espacio de Banach*, véase [KK76, Chapter IV] o [Ric98].

3.4.3. Espacios de funciones S^*-integrables

En este apartado vamos a demostrar el análogo del Teorema 3.4.10 para el espacio $S^*(\mu)$, equipado con la seminorma $\|\cdot\|_\iota$ dada por $\|f\|_\iota := \|\iota_f\|(\Omega)$. Nótese que $(D(\mu), \|\cdot\|_I)$ es un subespacio de $(S^*(\mu), \|\cdot\|_\iota)$ (Teorema 3.2.9).

Observación 3.4.14. Es elemental que un espacio localmente convexo Hausdorff con un subespacio vectorial denso y tonelado es también tonelado, véase e.g. [CB87, Proposition 4.2.1 (ii)]. Combinando el Teorema 3.4.10 con el Teorema 3.2.13, deducimos que $(S^*(\mu)^\bullet, \|\cdot\|_\iota)$ *es tonelado si $\mu(A)(X)$ es cerrado en Y para cada átomo A de $\hat{\mu}$*. A continuación vamos a demostrar que, de hecho, en estas condiciones $S^*(\mu)^\bullet$ es ultrabornológico.

En primer lugar, nótese que las propiedades elementales de la S^*-integral establecidas en el Apartado 3.2.1 aseguran que $(S^*(\mu), \|\cdot\|_\iota)$ pertenece a la clase $\mathfrak{J}_\mu$ (tomamos $V_f^{S^*(\mu)} = \iota_f$).

Corolario 3.4.15. *Si $A \in \Sigma$ es un átomo de $\hat{\mu}$, entonces $P_A(S^*(\mu)^\bullet)$ es linealmente homeomorfo a $\mu(A)(X)$ y las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $P_A(S^*(\mu)^\bullet)$ *es un espacio de Banach;*
(ii) $P_A(S^*(\mu)^\bullet)$ *es ultrabornológico;*
(iii) $P_A(S^*(\mu)^\bullet)$ *es tonelado;*
(iv) $\mu(A)(X)$ *es cerrado en* Y.

Demostración. El resultado se sigue inmediatamente de la Proposición 3.4.8 teniendo en cuenta que $\iota_f(A) \in \mu(A)(X)$ para cada $f \in S^*(\mu)$ (por el Lema 3.2.12). □

Para aplicar el criterio del Corolario 3.4.7 a $(S^*(\mu), \|\cdot\|_\iota)$ necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.4.16 ([Rodd]). *Sean (A_n) una sucesión disjunta en Σ con unión Ω, (f_n) una sucesión $\|\cdot\|_\iota$-acotada en $S^*(\mu)$ tal que $f_n|_{A_m} \equiv 0$ para todo $n > m$, y $(\alpha_n) \in \ell^1$. Consideramos la función $f : \Omega \longrightarrow X$ definida por $f := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n$. Entonces:*

(i) $f \in S^*(\mu)$;
(ii) $\iota_f(E) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \iota_{f_n}(E)$ *para cada* $E \in \Sigma$;
(iii) $\lim_N \|\sum_{n=1}^N \alpha_n f_n - f\|_\iota = 0$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f|_{A_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i|_{A_n}$, luego $f|_{A_n}$ es S^*-integrable respecto de μ_{A_n}. Por tanto, en virtud del Lema 3.2.8, para probar que $f \in S^*(\mu)$ sólo tenemos que demostrar que *si Γ es cualquier partición contable de Ω en Σ más fina que (A_n), entonces la serie $\sum_{A\in\Gamma} (S^*)\int_A f|_A \, d\mu_A$ converge incondicionalmente*.

Para ello fijamos una tal partición $\Gamma = (A_{n,k})$, donde $A_n = \bigcup_k A_{n,k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que

$$(S^*)\int_{A_{n,k}} f|_{A_{n,k}} \, d\mu_{A_{n,k}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \iota_{f_i}(A_{n,k}) \tag{3.38}$$

para cada $n, k \in \mathbb{N}$. Escribimos $K := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\iota$ y fijamos $\varepsilon > 0$. Podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $(\sum_{n>N} |\alpha_n|) \cdot K \le \varepsilon$. Como cada ι_{f_n} es contablemente aditiva, existe un conjunto finito $T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$|\alpha_n| \cdot \Big\| \iota_{f_n}\Big(\bigcup_{(m,k)\in S} A_{m,k} \Big) \Big\| \le \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{para todo } 1 \le n \le N$$

para cualquier conjunto finito $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $S \cap T = \emptyset$. Combinando (3.38) con la anterior desigualdad deducimos

$$\Big\| \sum_{(m,k)\in S} (S^*)\int_{A_{m,k}} f|_{A_{m,k}} \, d\mu_{A_{m,k}} \Big\| = \Big\| \sum_{(m,k)\in S} \sum_{i=1}^m \alpha_i \iota_{f_i}(A_{m,k}) \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{(m,k)\in S \\ n\le m}} \alpha_n \iota_{f_n}(A_{m,k}) \Big\|$$

$$\le \sum_{n=1}^N |\alpha_n| \cdot \Big\| \iota_{f_n}\Big(\bigcup_{\substack{(m,k)\in S \\ n\le m}} A_{m,k} \Big) \Big\| + \sum_{n>N} |\alpha_n| \cdot \Big\| \iota_{f_n}\Big(\bigcup_{\substack{(m,k)\in S \\ n\le m}} A_{m,k} \Big) \Big\| \le \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{N} + \Big(\sum_{n>N} |\alpha_n| \Big) \cdot K \le 2\varepsilon$$

para cualquier conjunto finito $S \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con $S \cap T = \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la serie $\sum_{n,k}(S^*)\int_{A_{n,k}} f|_{A_{n,k}}\, d\mu_{A_{n,k}}$ converge incondicionalmente. Esto completa la prueba de *(i)*.

Para demostrar *(ii)* comenzamos comprobando que *la serie* $\sum_{n,k}\alpha_n \imath_{f_n}(A_k)$ *es incondicionalmente convergente*. En efecto, esto se sigue inmediatamente del Lema 1.5.6, ya que

- la serie $\sum_k \alpha_n \imath_{f_n}(A_k)$ converge incondicionalmente para todo $n \in \mathbb{N}$;
- para cada conjunto finito $Q \subset \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\Big\|\sum_{k\in Q}\alpha_n \imath_{f_n}(A_k)\Big\| = \Big\|\alpha_n \imath_{f_n}\Big(\bigcup_{k\in Q} A_k\Big)\Big\| \le |\alpha_n|\cdot K.$$

Utilizando (3.38) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \imath_{f_n}(\Omega) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_n \imath_{f_n}(A_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \imath_{f_n}(A_k)\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{k}\alpha_n \imath_{f_n}(A_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\imath_f(A_k) = \imath_f(\Omega).\end{aligned}$$

Dado $E \in \Sigma$, el mismo argumento aplicado a las sucesiones $(f_n|_E)$ y $(A_n \cap E)$ asegura que $\imath_f(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \imath_{f_n}(E)$, como se quería demostrar.

Finalmente, para probar *(iii)* fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N_0}|\alpha_n| \le \varepsilon$. Para cada $N \ge N_0$, la función $h_N \in S^*(\mu)$ definida por $h_N := f - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n = \sum_{n>N}\alpha_n f_n$ satisface

$$\|h_N\|_\imath \le 2\sup_{E\in\Sigma}\|\imath_{h_N}(E)\| = 2\sup_{E\in\Sigma}\Big\|\sum_{n>N}\alpha_n \imath_{f_n}(E)\Big\| \le 2K\Big(\sum_{n>N}|\alpha_n|\Big) \le 2K\varepsilon,$$

donde la igualdad se sigue de *(ii)*. Esto completa la demostración. □

Ya hemos reunido todas las herramientas necesarias para demostrar el resultado principal de este apartado.

Teorema 3.4.17 ([Rodd]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $S^*(\mu)^\bullet$ *es ultrabornológico;*
(ii) $S^*(\mu)^\bullet$ *es tonelado;*
(iii) $\mu(A)(X)$ *es cerrado en* Y *para cada átomo* A *de* $\hat{\mu}$.

Demostración. La prueba de *(ii)⇒(iii)* sigue los pasos de la correspondiente implicación en el Teorema 3.4.10. Por otro lado, *(iii)⇒(i)* es una consecuencia inmediata de los Corolarios 3.4.7, 3.4.15 y el Lema 3.4.16. □

Corolario 3.4.18. *Si* $\hat{\mu}$ *no tiene átomos, entonces* $S^*(\mu)^\bullet$ *es ultrabornológico.*

En vista del Corolario 3.4.15 y los comentarios que siguen al Corolario 3.4.11, $S^*(\mu)^\bullet$ no es tonelado en general.

Corolario 3.4.19 ([Rodd]). *Sean* Z *un espacio de Banach y* $(T,\mathscr{S},\theta)$ *un espacio de medida finito y completo. Entonces el espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones integrables Birkhoff de* T *en* Z*, con la norma de Pettis, es ultrabornológico.*

3.4.4. Espacios de funciones integrables McShane

A lo largo de este apartado τ es una topología en Ω con $\tau \subset \Sigma$ y suponemos que $\hat{\mu}$ satisface las condiciones (α) y (β) consideradas en la Sección 3.3.

Las propiedades básicas de la integral de McShane que hemos probado en el Apartado 3.3.1 garantizan que $M(\mu)$, equipado con la seminorma $\|\cdot\|_\zeta$ dada por $\|f\|_\zeta := \|\zeta_f\|(\Omega)$, pertenece a la clase $\mathfrak{I}_\mu$ (tomando $V_f^{M(\mu)} = \zeta_f$). Nuestro objetivo en este apartado es determinar bajo qué condiciones $M(\mu)^\bullet$ es ultrabornológico. En este sentido, vamos a mostrar que las mismas conclusiones que hemos obtenido anteriormente para $D(\mu)^\bullet$ y $S^*(\mu)^\bullet$ son también válidas para $M(\mu)^\bullet$.

Comenzamos observando que $(M(\mu), \|\cdot\|_\zeta)$ satisface los requisitos de la Proposición 3.4.8, gracias al Corolario 3.3.15 y el siguiente lema.

Lema 3.4.20 ([Rodd]). *Supongamos que Ω es un átomo de $\hat{\mu}$. Si $f \in M(\mu)$, entonces existe un $E \in \Sigma$ con $\hat{\mu}(\Omega \setminus E) = 0$ tal que $\zeta_f(\Omega) = \mu(\Omega)(f(t))$ para cada $t \in E$.*

Demostración. La familia $\mathscr{G} = \{G \in \tau : \vartheta(G) = 0\}$ no es vacía y está dirigida superiormente, luego $\vartheta(\cup\mathscr{G}) = 0$. Definimos $E := \Omega \setminus \cup\mathscr{G}$. Como $f|_E$ es integrable McShane respecto de μ_E, con integral $\zeta_f(E) = \zeta_f(\Omega)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un calibre δ_n en (E, τ_E) y un $\eta_n > 0$ tales que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i)(f(s_i)) - \zeta_f(\Omega) \Big\| \leq \frac{1}{n} \tag{3.39}$$

para cada partición parcial de McShane $\{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\}$ de E subordinada a δ_n cumpliendo $\hat{\mu}(E \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i) \leq \eta_n$. Fijamos $t \in E$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\delta_n(t) = G_n \cap E = G_n \setminus \bigcup\mathscr{G}$ para algún $G_n \in \tau$. Como $\delta_n(t) \neq \emptyset$, se tiene $\vartheta(G_n) > 0$ y así $\vartheta(E \setminus \delta_n(t)) = 0$ (porque Ω un átomo de ϑ). En particular, $\mu(\delta_n(t)) = \mu(\Omega)$. Por tanto, la desigualdad (3.39) aplicada a la partición parcial de McShane $\{(\delta_n(t), t)\}$ implica $\|\mu(\Omega)(f(t)) - \zeta_f(\Omega)\| \leq 1/n$. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se sigue que $\zeta_f(\Omega) = \mu(\Omega)(f(t))$ para cada $t \in E$. Esto completa la demostración. □

Corolario 3.4.21. *Si $A \in \Sigma$ es un átomo de $\hat{\mu}$, entonces $P_A(M(\mu)^\bullet)$ es linealmente homeomorfo a $\mu(A)(X)$ y las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $P_A(M(\mu)^\bullet)$ *es un espacio de Banach;*
(ii) $P_A(M(\mu)^\bullet)$ *es ultrabornológico;*
(iii) $P_A(M(\mu)^\bullet)$ *es tonelado;*
(iv) $\mu(A)(X)$ *es cerrado en* Y.

El siguiente teorema de convergencia "de tipo Beppo-Levi" será útil para poder aplicar el criterio del Corolario 3.4.7 a $(M(\mu), \|\cdot\|_\zeta)$. La prueba se inspira en algunas de las ideas empleadas en [Swa97, Theorem 8] y [Swa98, Theorem 6], donde se establecen resultados semejantes en el caso de funciones vectoriales integrables McShane definidas en $[0,1]$.

Proposición 3.4.22 ([Rodd]). *Sea (f_n) una sucesión en $M(\mu)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente y $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\zeta} < +\infty$. Entonces:*

(i) $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *es integrable McShane respecto de μ;*

(ii) $\zeta_f(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_f(E)$ *para cada $E \in \Sigma$;*

(iii) $\lim_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n - f\|_{\zeta} = 0$.

Demostración. Definimos $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \in M(\mu)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un calibre δ_n en (Ω, τ) tal que

$$\left\| g_n(\mathscr{P}) - \zeta_{g_n}(W_{\mathscr{P}}) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{3.40}$$

para cualquier partición parcial de McShane $\mathscr{P}$ de Ω subordinada a δ_n (Lema 3.3.13). Fijamos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{n>N} \|f_n\|_{\zeta} \leq \varepsilon. \tag{3.41}$$

Como cada ζ_{f_n} es ϑ-continua (Proposición 3.3.12), podemos encontrar un $\eta > 0$ tal que

$$\left\| \zeta_{f_n}(E) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{para todo } E \in \Sigma \text{ con } \hat{\mu}(E) \leq \eta \text{ y cada } 1 \leq n \leq N. \tag{3.42}$$

Por otro lado, para cada $t \in \Omega$ fijamos $n(t) > N$ cumpliendo $\|g_{n(t)}(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$.

Definimos un calibre δ en (Ω, τ) mediante $\delta(t) := \delta_{n(t)}(t)$ para cada $t \in \Omega$. Afirmamos que

$$\left\| f(\mathscr{P}) - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{f_n}(\Omega) \right\| \leq (\hat{\mu}(\Omega) + 3) \cdot \varepsilon \quad \text{para cada } \mathscr{P} \in \Pi_{\delta,\eta}. \tag{3.43}$$

En efecto, tomamos cualquier $\mathscr{P} = \{(E_i, s_i) : \ 1 \leq i \leq p\} \in \Pi_{\delta,\eta}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección (quizás vacía) $\{(E_i, s_i) : n(s_i) = n\}$ es una partición parcial de McShane de Ω subordinada a δ_n, y podemos aplicar (3.40) para obtener

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i) g_{n(s_i)}(s_i) - \sum_{i=1}^{p} \zeta_{g_{n(s_i)}}(E_i) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{n(s_i)=n} \mu(E_i) g_n(s_i) - \zeta_{g_n}\Big(\bigcup_{n(s_i)=n} E_i \Big) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

La elección de $n(s_i)$ garantiza que $\|g_{n(s_i)}(s_i) - f(s_i)\| \leq \varepsilon$ para cada $1 \leq i \leq p$. Por tanto,

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i) f(s_i) - \sum_{i=1}^{p} \zeta_{g_{n(s_i)}}(E_i) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i) \big(f(s_i) - g_{n(s_i)}(s_i) \big) \right\| + \varepsilon \leq (\hat{\mu}(\Omega) + 1) \cdot \varepsilon. \tag{3.44}$$

Por otro lado, (3.41) y (3.42) implican

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{p} \zeta_{g_{n(s_i)}}(E_i) - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{f_n}(\Omega) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n(s_i)} \zeta_{f_k}(E_i) - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{f_n}(\Omega) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{f_n}\Big(\bigcup_{n(s_i) \geq n} E_i \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{f_n}(\Omega) \right\| \leq \sum_{n=1}^{N} \left\| \zeta_{f_n}\Big(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i \Big) \right\| + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

(téngase en cuenta que $n(s_i) > N$ para cada $1 \leq i \leq p$ y que $\hat{\mu}(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{p} E_i) \leq \eta$). La desigualdad (3.43) se sigue ahora de la anterior y (3.44). Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $f \in M(\mu)$, con integral $\zeta_f(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{f_n}(\Omega)$. Esto completa la prueba de *(i)*. Nótese que *(ii)* se puede obtener aplicando el argumento anterior a cada $f|_E$ con $E \in \Sigma$.

Finalmente, veamos *(iii)*. Dado $N \in \mathbb{N}$, la función $f - \sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n>N} f_n =: h_N \in M(\mu)$ satisface $\zeta_{h_N}(E) = \sum_{n>N} \zeta_{f_n}(E)$ para cada $E \in \Sigma$ (gracias a *(ii)*), luego

$$\frac{1}{2}\Big(\limsup_N \|h_N\|_\zeta\Big) \leq \limsup_N \sup_{E\in\Sigma} \|\zeta_{h_N}(E)\| = \limsup_N \sup_{E\in\Sigma} \Big\|\sum_{n>N} \zeta_{f_n}(E)\Big\| \leq \lim_N \sum_{n>N} \|f_n\|_\zeta = 0.$$

La demostración ha finalizado. □

Corolario 3.4.23 ([Rodd]). *Sean (A_n) una sucesión disjunta en Σ con unión Ω, (f_n) una sucesión $\|\cdot\|_\zeta$-acotada en $M(\mu)$ tal que $f_n|_{A_m} \equiv 0$ para todo $n > m$, y $(\alpha_n) \in \ell^1$. Definimos $f : \Omega \longrightarrow X$ mediante $f := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$. Entonces $f \in M(\mu)$ y $\lim_N \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n - f\|_\zeta = 0$.*

El resultado análogo a la Proposición 3.4.22 para la integral de Birkhoff *no* es cierto en general.

Ejemplo 3.4.24 ([Rodd]). *Existe una sucesión $g_n : [0,1] \longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ de funciones escalarmente nulas e integrables Birkhoff tales que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge puntualmente a una función que no es integrable Birkhoff.*

Demostración. En el Ejemplo 2.5.4 encontramos una sucesión de funciones integrables Birkhoff $f_n : [0,1] \longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ que converge puntualmente a una función $f : [0,1] \longrightarrow c_0(\mathfrak{c})$ que no es integrable Birkhoff. Un vistazo a dicha construcción revela que cada f_n es escalarmente nula. Ahora definimos $g_1 := f_1$ y $g_n := f_n - f_{n-1}$ para cada $n \geq 2$. Entonces g_n es integrable Birkhoff y escalarmente nula para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \lim_n f_n = f$ no es integrable Birkhoff. □

Finalmente, todo el trabajo previo nos conduce hacia la caracterización anunciada.

Teorema 3.4.25 ([Rodd]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $M(\mu)^\bullet$ *es ultrabornológico;*
(ii) $M(\mu)^\bullet$ *es tonelado;*
(iii) $\mu(A)(X)$ *es cerrado en Y para cada átomo A de $\hat{\mu}$.*

Corolario 3.4.26. *Si $\hat{\mu}$ no tiene átomos, entonces $M(\mu)^\bullet$ es ultrabornológico.*

De nuevo, los comentarios que siguen al Corolario 3.4.11 (con $\tau := \{\emptyset, \Omega\}$) muestran que $M(\mu)^\bullet$ no es tonelado en general.

Corolario 3.4.27 ([Rodd]). *Sean Z un espacio de Banach y $(T, \mathfrak{T}, \mathscr{S}, \theta)$ un espacio de medida topológico quasi-Radon. Entonces el espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones integrables McShane de T en Z, con la norma de Pettis, es ultrabornológico.*

En el caso particular $T = [0,1]$ (con la medida de Lebesgue), el resultado anterior se puede encontrar en [DFFP95, Theorem 3].

Capítulo 4

Las integrales de Birkhoff y Pettis para funciones multi-valuadas

Durante las últimas décadas el estudio de las propiedades de medibilidad e integrabilidad de las *multi-funciones* (también llamadas correspondencias o funciones multi-valuadas) ha recibido un notable impulso, debido en gran parte a las aplicaciones que estas técnicas proporcionan en áreas como la Optimización y la Matemática Económica. El lector puede encontrar un completo tratamiento de la teoría de correspondencias en las monografías de Castaing y Valadier [CV77], Klein y Thompson [KT84], Aubin y Frankowska [AF90]. El reciente “survey” de Hess [Hes02] ofrece una amplia panorámica sobre estos temas.

Los orígenes de la teoría de integración de correspondencias se remontan a los trabajos pioneros de Aumann [Aum65] y Debreu [Deb67]. Dada una multi-función $F:[0,1]\longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}\setminus\{\emptyset\}$, la *integral de Aumann* de F viene definida por

$$\begin{aligned}&(\text{Aumann})\int_0^1 F(t)\,dt\\&\qquad=\Big\{\int_0^1 f(t)\,dt:\ f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n \text{ es integrable y } f(t)\in F(t) \text{ para todo } t\in[0,1]\Big\}.\end{aligned}$$

Los puntos de vista de Debreu (véase el Apartado 4.1.4) son distintos y se basan en reducir el problema al caso de funciones univaluadas, a través de una inmersión apropiada de la familia $ck(\mathbb{R}^n)$, formada por todos los subconjuntos (no vacíos) convexos y compactos de $\mathbb{R}^n$, en otro espacio de Banach. Una vez hecho esto, Debreu utiliza la teoría de la *integral de Bochner* para definir la integral de una correspondencia con valores en $ck(\mathbb{R}^n)$. La “integral” de una función integrable Debreu coincide a la postre con la integral de Aumann.

En este capítulo estudiamos la integración de multi-funciones, definidas en un espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ), cuyos valores son subconjuntos (no vacíos) convexos y débilmente compactos de un espacio de Banach X que, en numerosas ocasiones, vamos a suponer separable. En la Sección 4.2 nuestro interés se centra en la *integral de Pettis* de multi-funciones, introducida en [CV77] y ampliamente estudiada en los últimos años. Por otra parte, la Sección 4.3 está dedicada a estudiar la generalización natural de la *integral de Birkhoff* a este contexto, y su relación con las integrales de Debreu y Pettis. La mayoría de los resultados originales de este capítulo proceden de nuestro trabajo conjunto con B. Cascales [CR04].

4.1. Preliminares

En esta sección presentamos algunos conceptos y resultados que vamos a emplear frecuentemente a lo largo de este capítulo. En el Apartado 4.1.1 consideramos el hiperespacio de los subconjuntos (no vacíos) convexos y débilmente compactos de un espacio de Banach, equipado con la *distancia de Hausdorff*. Recordamos cómo sumergir isométricamente este hiperespacio en un espacio de Banach y estudiamos bajo qué condiciones es separable. El Apartado 4.1.2 está dedicado a analizar la noción de *serie de conjuntos incondicionalmente convergente*. En el Apartado 4.1.3 introducimos diferentes conceptos de *medibilidad para multi-funciones* que, en el caso de espacios de Banach separables, coinciden y aseguran la existencia de selectores fuertemente medibles. Finalmente, el Apartado 4.1.4 contiene una breve introducción a la *integral de Debreu*.

4.1.1. La distancia de Hausdorff en un espacio de Banach

Definición 4.1.1. *Sean $C,D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como*

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Es bien conocido que h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X. Además, como X es completo, lo mismo ocurre con $(\mathscr{C},h)$, véase e.g. [CV77, Theorem II.3] o [KT84, Corollary 4.3.12]. En este capítulo vamos a trabajar con los siguientes subespacios:

$$ck(X) = \{C \in \mathscr{C} : \; C \text{ es convexo y compacto en norma}\}$$
$$\text{y} \quad cwk(X) = \{C \in \mathscr{C} : \; C \text{ es convexo y débilmente compacto}\}.$$

Para ver que ambos subespacios son cerrados en $(\mathscr{C},h)$ necesitamos la siguiente observación (véase e.g. [CV77, Theorem II.14] o [KT84, Proposition 4.3.11]).

Lema 4.1.2. *La familia $\mathscr{D} = \{C \in \mathscr{C} : \; C$ es convexo$\}$ es un subespacio cerrado de $(\mathscr{C},h)$.*

Demostración. Fijamos un $C \in \mathscr{C}$ perteneciente a la clausura de $\mathscr{D}$ en $(\mathscr{C},h)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $D \in \mathscr{D}$ tal que $C \subset D + \varepsilon B_X$ y $D \subset C + \varepsilon B_X$. Por tanto, tenemos

$$\overline{\mathrm{co}(C)} \subset \mathrm{co}(C) + \varepsilon B_X \subset \mathrm{co}(D + \varepsilon B_X) + \varepsilon B_X = D + 2\varepsilon B_X \subset C + 3\varepsilon B_X.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $h(C, \overline{\mathrm{co}(C)}) = 0$, es decir, $C = \overline{\mathrm{co}(C)} \in \mathscr{D}$. □

El resultado aislado en la siguiente proposición es conocido, al menos para el caso de $ck(X)$, véase e.g. [CV77, Theorem II.14] o [KT84, Corollary 4.3.12] .

Proposición 4.1.3. *$ck(X)$ y $cwk(X)$ son subespacios cerrados (y, por tanto, completos) de $(\mathscr{C},h)$.*

Demostración. Fijamos un $C \in \mathscr{C}$ perteneciente a la clausura de $ck(X)$ en $(\mathscr{C}, h)$. Ya sabemos que C es convexo (Lema 4.1.2). Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $D \in ck(X)$ tal que $C \subset D + \varepsilon B_X$. Como D es totalmente acotado en norma, existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $\min_{1 \le i \le n} \|x_i - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in D$. Por tanto, $\min_{1 \le i \le n} \|x_i - x\| < 2\varepsilon$ para todo $x \in C$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, C es totalmente acotado, es decir, relativamente compacto en norma. Esto demuestra que $\mathscr{C} \in ck(X)$.

La prueba de que $cwk(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ es similar, teniendo en cuenta el criterio de Grothendieck (véase e.g. [Die84, Lemma 2, p. 227]) que afirma que un conjunto $C \subset X$ es débilmente relativamente compacto si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto débilmente compacto D_ε tal que $C \subset D_\varepsilon + \varepsilon B_X$. $\square$

A continuación mostramos cómo sumergir convenientemente $(cwk(X), h)$ en un espacio de Banach. La existencia de una inmersión de este tipo fue demostrada por primera vez por Rådström [Råd52]. Nuestra prueba es estándar y sigue los pasos de [CV77, Theorems II.18 y II.19].

Dados un conjunto acotado $C \subset X$ y $x^* \in X^*$, escribimos

$$\delta^*(x^*, C) := \sup\{x^*(x) : \ x \in C\}.$$

Lema 4.1.4. *La aplicación $j : cwk(X) \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ definida por $j(C)(x^*) = \delta^*(x^*, C)$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $j(C+D) = j(C) + j(D)$ *para cada* $C, D \in cwk(X)$;
(ii) $j(\lambda C) = \lambda j(C)$ *para cada* $\lambda \ge 0$ *y cada* $C \in cwk(X)$;
(iii) $h(C, D) = \|j(C) - j(D)\|_\infty$ *para cada* $C, D \in cwk(X)$;
(iv) $j(cwk(X))$ *es cerrado en* $\ell_\infty(B_{X^*})$.

Demostración. Las propiedades *(i)* y *(ii)* son inmediatas.

Para demostrar *(iii)* fijamos $C, D \in cwk(X)$. Supongamos que $\eta > 0$ verifica $C \subset D + \eta B_X$ y $D \subset C + \eta B_X$. Entonces se tiene $x^*(C) \subset x^*(D) + [-\eta, \eta]$ y $x^*(D) \subset x^*(C) + [-\eta, \eta]$ para cada $x^* \in B_{X^*}$. Se sigue inmediatamente que $|\sup(x^*(C)) - \sup(x^*(D))| \le \eta$ para cada $x^* \in B_{X^*}$, es decir, $\|j(C) - j(D)\|_\infty \le \eta$. Por tanto, $\|j(C) - j(D)\|_\infty \le h(C, D)$. Para ver la desigualdad contraria escribimos $\alpha := \|j(C) - j(D)\|_\infty$. Entonces $\sup(x^*(C)) \le \sup(x^*(D)) + \alpha$ para todo $x^* \in B_{X^*}$. Como $D + \alpha B_X$ es convexo y cerrado, el teorema de separación de Hahn-Banach nos permite deducir que $C \subset D + \alpha B_X$. Por simetría, también tenemos $D \subset C + \alpha B_X$. Por tanto, $h(C, D) \le \alpha$. Esto demuestra *(iii)*.

Finalmente, *(iv)* es consecuencia inmediata de *(iii)* y la completitud de $(cwk(X), h)$ (Proposición 4.1.3). La prueba ha finalizado. $\square$

Los distintos métodos de integración para multi-funciones $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ que vamos a considerar en este capítulo pueden interpretarse en términos de la "integrabilidad" de la función univaluada $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$. Así, es natural preguntarse si el espacio de Banach

$$\overline{\operatorname{span}(j(cwk(X)))} \subset \ell_\infty(B_{X^*})$$

posee propiedades relevantes desde el punto de vista de la integración vectorial. El resto del apartado se dedica a analizar la separabilidad de dicho espacio o, equivalentemente, de $(cwk(X), h)$.

Comenzamos recordando que $(ck(X),h)$ es separable si y sólo si X es separable (Corolario 4.1.6, véase [CV77, Theorem II.8]). Para la prueba necesitamos el siguiente lema bien conocido.

Lema 4.1.5. *Para cada $C \in ck(X)$, la función $j(C) : B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ es w^*-continua.*

Demostración. Sea (x^*_α) una red en B_{X^*} que w^*-converge a $x^* \in B_{X^*}$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Como C es compacto en norma, podemos encontrar $x_1,\dots,x_n \in C$ tales que $\min_{1\le i\le n} \|x - x_i\| \le \varepsilon$ para cada $x \in C$. Por otro lado, existe un α de manera que $\sup_{1\le i\le n} |x^*_\beta(x_i) - x^*(x_i)| \le \varepsilon$ para todo $\beta > \alpha$. Se sigue inmediatamente que $|x^*_\beta(x) - x^*(x)| \le 3\varepsilon$ para todo $x \in C$ y todo $\beta > \alpha$. Por tanto, $|j(C)(x^*_\beta) - j(C)(x^*)| \le 3\varepsilon$ para cada $\beta > \alpha$. Esto demuestra que $j(C)$ es w^*-continua. □

Corolario 4.1.6. *$(ck(X),h)$ es separable si y sólo si X es separable.*

Demostración. Nótese que $(X,\|\cdot\|)$ es isométrico a un subespacio de $(ck(X),h)$ y, por tanto, X es separable si $(ck(X),h)$ lo es. Recíprocamente, supongamos que X es separable. Entonces (B_{X^*},w^*) es un compacto metrizable y, por tanto, el espacio de Banach $C(B_{X^*},w^*)$ es separable, véase e.g. [FHH$^+$01, Lemma 3.23]. El resultado se sigue ahora de los Lemas 4.1.4 y 4.1.5. □

En las Proposiciones 4.1.10 y 4.1.12 caracterizamos la separabilidad de $(cwk(X),h)$ para ciertas clases de espacios de Banach. Las construcciones que aparecen serán utilizadas de nuevo en la Sección 4.3.

Lema 4.1.7 ([CR04]). *Sea $\{(x_i,x_i^*)\}_{i\in I}$ un sistema biortogonal en $X \times X^*$ tal que $\{x_i : i \in I\}$ es débilmente relativamente compacto y $M := \sup_{i\in I} \|x_i^*\| < +\infty$. Entonces:*

(i) $C_J := \overline{\mathrm{aco}}\{x_i :\ i \in J\} \in cwk(X)$ *para cada $\emptyset \neq J \subset I$;*
(ii) $h(C_J,C_{J'}) \ge 1/M$ *para cada par de conjuntos distintos (no vacíos) $J,J' \subset I$.*

Demostración. *(i)* es consecuencia directa del teorema de Krein-Smulian, véase e.g. [DU77, Theorem 11, p. 51]. Para demostrar *(ii)* tomamos dos conjuntos no vacíos $J,J' \subset I$ con $J \not\subset J'$. Fijamos un $\eta > 0$ tal que $C_J \subset C_{J'} + \eta B_X$ y tomamos $i \in J\setminus J'$. Como $x_i \in C_J$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $x \in \mathrm{aco}\{x_j : j \in J'\}$ tal que $\|x_i - x\| \le \eta + \varepsilon$. Pero $i \notin J'$, luego

$$1 = x_i^*(x_i - x) \le M\|x_i - x\| \le M(\eta + \varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, deducimos que $\eta \ge 1/M$. Esto demuestra que $h(C_J,C_{J'}) \ge 1/M$. □

El siguiente lema nos dice, en particular, que todo espacio de Banach con una base de Markushevich “shrinking” es débilmente compactamente generado, véase [FHH$^+$01, Theorem 11.23].

Lema 4.1.8. *Sea $\{(x_i,x_i^*)\}_{i\in I}$ un sistema biortogonal en $X \times X^*$ tal que $\sup_{i\in I} \|x_i\| < +\infty$ y*

$$X^* = \overline{\mathrm{span}\{x_i^* :\ i \in I\}}^{\|\cdot\|}.$$

Entonces $\{x_i : i \in I\}$ es débilmente relativamente compacto.

Demostración. Por el teorema de Eberlein-Smulian (véase e.g. [Die84, Chapter III]), basta demostrar que $\{x_i : i \in I\}$ es débilmente relativamente *sucesionalmente compacto*. Fijamos una sucesión (i_n) en I. Se afirma que (x_{i_n}) tiene una subsucesión convergente. En efecto, nótese que podemos suponer que, para cada $i \in I$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : i_n = i\}$ es finito. Entonces existen $n_1 < n_2 < \ldots$ en $\mathbb{N}$ tales que $i_{n_k} \neq i_{n_{k'}}$ para cualesquiera $k \neq k'$. Veamos que $(x_{i_{n_k}})$ converge a 0 débilmente. Fijamos $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Como $X^* = \overline{\operatorname{span}\{x_i^* : i \in I\}}^{\|\cdot\|}$, existen $j_1, \ldots, j_p \in I$ y $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tales que el vector $y^* = \sum_{k=1}^{p} a_k x_{j_k}^*$ satisface $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$. Ahora podemos encontrar un $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que, para cada $k' \geq k$, se tiene $i_{n_{k'}} \notin \{j_1, \ldots, j_p\}$, luego

$$|x^*(x_{i_{n_{k'}}})| = |(x^* - y^*)(x_{i_{n_{k'}}})| \leq (\sup_{i \in I} \|x_i\|) \cdot \varepsilon.$$

Esto completa la demostración. $\square$

Con la ayuda de los dos lemas anteriores vamos a mostrar que $(cwk(X), h)$ *no* es separable si X es de dimensión infinita y X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Antes es conveniente recordar la siguiente observación elemental.

Observación 4.1.9. *Sea $Z \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces*

$$cwk(Z) = \{C \in cwk(X) : \ C \subset Z\}$$

y la distancia de Hausdorff (relativa al espacio métrico Z) entre dos elementos cualesquiera $C, C' \in cwk(Z)$ es exactamente $h(C, C')$.

Proposición 4.1.10 ([CR04]). *Supongamos que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Entonces $(cwk(X), h)$ es separable si y sólo si X es de dimensión finita.*

Demostración. Como hemos comentado en la Sección 1.4, es conocido que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si X es de Asplund, es decir, todo subespacio cerrado separable de X tiene dual separable. Supongamos que X tiene dimensión infinita. Fijamos un subespacio cerrado separable de dimensión infinita $Z \subset X$. Entonces Z^* es separable. El teorema de Ovsepian y Pelczynski [OP75], véase e.g. [LT77, Theorem 1.f.4], garantiza la existencia de una base de Markushevich $\{(z_n, z_n^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en Z tal que

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\| \cdot \|z_n^*\| < +\infty$;
- $Z^* = \overline{\operatorname{span}\{z_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$.

Normalizando, podemos suponer que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\| < +\infty$ y $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z_n^*\| < +\infty$. Los Lemas 4.1.7 y 4.1.8 nos permiten deducir que $cwk(Z)$ es un subespacio *no* separable de $(cwk(X), h)$ (téngase en cuenta la Observación 4.1.9). $\square$

Corolario 4.1.11. *Supongamos que X^* es separable. Entonces $(cwk(X), h)$ es separable si y sólo si X es de dimensión finita.*

Recordemos que X tiene la *propiedad de Schur* si toda sucesión débilmente convergente es convergente en norma. En tal caso se tiene $ck(X) = cwk(X)$, por el teorema de Eberlein-Smulian. Por ejemplo, es bien conocido que ℓ^1 tiene la propiedad de Schur (véase e.g. [Die84, p. 85]).

La prueba del siguiente resultado es similar a la de la Proposición 4.1.10 y utiliza una caracterización debida a Dilworth, Girardi y Johnson [DGJ00] de los espacios de Banach duales sin la propiedad de Schur en términos de sistemas biortogonales.

Proposición 4.1.12. *Supongamos que $X = Y^*$ para algún espacio de Banach Y. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(cwk(X), h)$ *es separable;*
(ii) X *es separable y tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. La implicación *(ii)⇒(i)* es una consecuencia inmediata del Corolario 4.1.6 y los comentarios anteriores.

Veamos la prueba de *(i)⇒(ii)*. Por un lado, como $(X, \|\cdot\|)$ es isométrico a un subespacio de $(cwk(X), h)$, resulta que X es separable. Para probar que X tiene la propiedad de Schur razonamos por reducción al absurdo. Si el dual $X = Y^*$ del espacio de Banach separable Y no tiene la propiedad de Schur, entonces un resultado de Dilworth, Girardi y Johnson, [DGJ00, Theorem 1], asegura que existe una base de Markushevich $\{(y_n, y_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| < +\infty$ y $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n^*\| < +\infty$;
- (y_n^*) converge débilmente a 0.

De la convergencia débil de (y_n^*) se sigue que $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente relativamente compacto. Por tanto, el sistema biortogonal $\{(y_n^*, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times X^*$ está en las condiciones del Lema 4.1.7 y deducimos que $(cwk(X), h)$ no es separable, lo que contradice la hipótesis. □

Los resultados anteriores ponen de manifiesto que el espacio de Banach $\overline{\mathrm{span}(j(cwk(X)))}$ no es separable en numerosas situaciones. Vamos a finalizar este apartado discutiendo bajo qué condiciones dicho espacio tiene bola dual w^*-separable o es WLD.

Necesitamos introducir la siguiente topología, que va a jugar un papel fundamental durante el resto del capítulo.

Definición 4.1.13. *La topología de Mackey en X^*, denotada por τ_M, es la topología de la convergencia uniforme en todos los subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos de X.*

Recordemos que τ_M es una topología localmente convexa Hausdorff *compatible con el par dual* $\langle X, X^*\rangle$ (teorema de Mackey-Arens, véase e.g. [Jar81, 8.5.5]), es decir, el dual topológico de (X^*, τ_M) está formado precisamente por los funcionales de la forma $x^* \mapsto x^*(x)$, $x \in X$. Por tanto, para cualquier conjunto convexo $A \subset X^*$, se tiene la igualdad

$$\overline{A}^{\tau_M} = \overline{A}^{w^*},$$

véase e.g. [Jar81, 8.2.5].

Nótese que, por el teorema de Krein-Smulian (véase e.g. [DU77, Theorem 11, p. 51]), τ_M es precisamente la topología de la convergencia uniforme en todos los subconjuntos débilmente compactos de X. En particular, tenemos la siguiente

Observación 4.1.14. *Para cada $C \in cwk(X)$, la función $j(C) : B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ es τ_M-continua. Por tanto, j toma valores en $C_b(B_{X^*}, \tau_M)$.* En efecto, para verlo no es necesario utilizar el teorema de Krein-Smulian: basta observar que, fijado un vector $x \in C$, se tiene

$$\mathrm{aco}(C) \subset C - C + \{\alpha x : \alpha \in [-1,1]\},$$

luego $\overline{\mathrm{aco}(C)}$ es débilmente compacto.

Lema 4.1.15. *Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces $(B_{C_b(B_{X^*},\tau_M)^*}, w^*)$ también es separable.*

Demostración. Escribimos $Y = C_b(B_{X^*}, \tau_M)$. Como X es separable, existe un conjunto contable $D \subset B_{X^*}$ tal que $\overline{D}^{w^*} = B_{X^*}$. En vista de los comentarios que siguen a la Definición 4.1.13, se tiene $\overline{\mathrm{co}(D)}^{\tau_M} = B_{X^*}$. Por tanto, el conjunto A formado por todas las combinaciones convexas de elementos de D con coeficientes racionales es contable y satisface $\overline{A}^{\tau_M} = B_{X^*}$. Como

$$B = \{e_{x^*}|_Y : \ x^* \in A\} \subset B_{Y^*}$$

es normante, el teorema de separación de Hahn-Banach asegura que $\overline{\mathrm{aco}(B)}^{w^*} = B_{Y^*}$. Para acabar, nótese que el conjunto contable formado por todas las combinaciones "absolutamente convexas" de elementos de B con coeficientes racionales es denso en (B_{Y^*}, w^*). $\square$

En vista de la Observación 4.1.14 y el Lema 4.1.15, el espacio $\overline{\mathrm{span}(j(cwk(X)))}$ tiene bola dual w^*-separable si lo mismo ocurre con X. En tal caso, sabemos que $\overline{\mathrm{span}(j(cwk(X)))}$ *es WLD si y sólo si es separable* (véase la Sección 1.4). En general, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.1.16. *Supongamos que (B_{X^*}, w^*) es separable. Sea $T \subset cwk(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (T,h) *es separable;*
(ii) $j(T)$ *está contenido en un subespacio WLD de* $\ell_\infty(B_{X^*})$.

Demostración. La implicación *(i)*⇒*(ii)* es inmediata. Recíprocamente, supongamos que Y es un subespacio WLD de $\ell_\infty(B_{X^*})$ que contiene a $j(T)$. Como la clase de los espacios de Banach WLD es estable para subespacios cerrados (véase la Sección 1.4), el espacio $Z := Y \cap C_b(B_{X^*}, \tau_M)$ es también WLD. Por otra parte, la separabilidad de X asegura que $(B_{C_b(B_{X^*},\tau_M)^*}, w^*)$ es separable (Lema 4.1.15). Se sigue que (B_{Z^*}, w^*) es un compacto de Corson separable, es decir, (B_{Z^*}, w^*) es metrizable, luego $Z \supset j(T)$ es separable y, por tanto, lo mismo ocurre con (T,h) (Lema 4.1.4). Esto completa la demostración. $\square$

4.1.2. Series de conjuntos en espacios de Banach

En este apartado estudiamos la convergencia incondicional de series de elementos de $cwk(X)$, en el sentido de la Definición 1.5.4. Nuestro principal objetivo es mostrar (Proposición 4.1.18) que dicha convergencia puede caracterizarse, a través de la inmersión j, en términos de la noción usual de convergencia incondicional de series de vectores en espacios de Banach. Este hecho es consecuencia inmediata del siguiente lema y [Dre76, Propositions 2.3 y 2.5]. Para facilitar la lectura incluimos una demostración autocontenida.

Lema 4.1.17 ([CR04]). *Sea (B_n) una sucesión en $cwk(X)$ tal que $\sum_n B_n$ es incondicionalmente convergente. Entonces $\sum_n B_n \in cwk(X)$.*

Demostración. Claramente, $\sum_n B_n$ es convexo. Para ver que $\sum_n B_n$ es débilmente compacto consideramos la aplicación

$$S : \prod_{n=1}^{\infty} B_n \longrightarrow X, \quad S((b_n)_{n=1}^{\infty}) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Sea $\mathfrak{T}$ la topología producto en $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$ obtenida cuando cada B_n se considera equipado con la restricción de la topología débil de X. *Afirmamos que S es $\mathfrak{T}$-débil-continua*. En efecto, fijamos $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ y $U \in \mathscr{U}$, donde $\mathscr{U}$ denota la familia de todos entornos de 0 en la topología débil de X. Evidentemente, existen $\varepsilon > 0$ y $V \in \mathscr{U}$ tales que $2\varepsilon B_X + V \subset U$. Como $\sum_n B_n$ es incondicionalmente convergente, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{i \in S} B_i\| \leq \varepsilon$ para cada conjunto finito $S \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}$ (Observación 1.5.5). Fijamos $W_1, \dots, W_N \in \mathscr{U}$ de manera que $\sum_{n=1}^{N} W_n \subset V$. Definimos $H_n := B_n \cap (b_n + W_n)$ para cada $1 \leq n \leq N$, $H_n := B_n$ para cada $n > N$ y $H := \prod_{n=1}^{\infty} H_n$. Entonces H es un $\mathfrak{T}$-entorno de $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $(b'_n)_{n=1}^{\infty} \in H$

$$\begin{aligned} S((b'_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \sum_{n=1}^{N} b'_n + \sum_{n>N} b'_n \in \sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n>N} b'_n + \sum_{n=1}^{N} W_n \\ \subset \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n>N} (b'_n - b_n) + V \subset \sum_{n=1}^{\infty} b_n + 2\varepsilon B_X + V \subset \sum_{n=1}^{\infty} b_n + U. \end{aligned}$$

Como $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ y $U \in \mathscr{U}$ son arbitrarios, S es $\mathfrak{T}$-débil-continua. Finalmente, teniendo en cuenta que $(\prod_{n=1}^{\infty} B_n, \mathfrak{T})$ es compacto (por el teorema de Tychonoff), deducimos que $S(\prod_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_n B_n$ es débilmente compacto. Esto completa la demostración. □

Proposición 4.1.18 ([CR04]). *Sea (B_n) una sucesión en $cwk(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\sum_n B_n$ *es incondicionalmente convergente;*

(ii) *existe un $B \in cwk(X)$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $P \subset \mathbb{N}$ tal que $h(\sum_{n \in Q} B_n, B) \leq \varepsilon$ para cada conjunto finito $P \subset Q \subset \mathbb{N}$;*

(iii) $\sum_n j(B_n)$ *es incondicionalmente convergente en $\ell_\infty(B_{X^*})$.*

En tal caso, $\sum_n B_n = B$ y $j(\sum_n B_n) = \sum_n j(B_n)$.

Demostración. *(i)⇒(ii)* Nótese que $B := \sum_n B_n$ pertenece a $cwk(X)$ (Lema 4.1.17). Fijamos $\varepsilon > 0$. Como $\sum_n B_n$ es incondicionalmente convergente, existe un $N \in \mathbb{N}$ de manera que $\|\sum_{n\in S} B_n\| \leq \varepsilon$ para cada conjunto finito $S \subset \mathbb{N} \setminus P$, donde $P := \{1, \dots, N\}$ (Observación 1.5.5). Dado cualquier conjunto finito $P \subset Q \subset \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{n\in Q} B_n \subset B + \varepsilon B_X \quad \text{y} \quad B \subset \sum_{n\in Q} B_n + \varepsilon B_X,$$

luego $h(\sum_{n\in Q} B_n, B) \leq \varepsilon$. Esto demuestra *(i)⇒(ii)*.

Supongamos ahora que se cumple *(ii)*. En particular, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $P \subset \mathbb{N}$ tal que $h(\sum_{n\in Q} B_n, \sum_{n\in P} B_n) \leq \varepsilon$ para cualquier $P \subset Q \subset \mathbb{N}$ finito. Fijamos un conjunto finito $S \subset \mathbb{N} \setminus P$. Usando el Lema 4.1.4 deducimos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n\in S} B_n\Big\| &= h\Big(\sum_{n\in S} B_n, \{0\}\Big) = \Big\|j\Big(\sum_{n\in S} B_n\Big)\Big\|_\infty \\ &= \Big\|j\Big(\sum_{n\in S\cup P} B_n\Big) - j\Big(\sum_{n\in P} B_n\Big)\Big\|_\infty = h\Big(\sum_{n\in S\cup P} B_n, \sum_{n\in P} B_n\Big) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, la serie $\sum_n B_n$ es incondicionalmente convergente, y la implicación *(ii)⇒(i)* queda demostrada.

Por otra parte, la equivalencia *(i)⇔(iii)* es consecuencia inmediata de la igualdad

$$\Big\|\sum_{n\in S} B_n\Big\| = h\Big(\sum_{n\in S} B_n, \{0\}\Big) = \Big\|j\Big(\sum_{n\in S} B_n\Big)\Big\|_\infty = \Big\|\sum_{n\in S} j(B_n)\Big\|_\infty \quad \text{para cada conjunto finito } S \subset \mathbb{N}.$$

Finalmente, la igualdad $\sum_n B_n = B$ se sigue de la prueba de *(i)⇒(ii)*. Por el Lema 4.1.4, también tenemos $j(\sum_n B_n) = \sum_n j(B_n)$. Esto completa la demostración. □

Observación 4.1.19. Nótese que las condiciones de la Proposición 4.1.18 son equivalentes a:

(iv) Para cualquier inmersión i de $cwk(X)$ en un espacio de Banach Y con las propiedades (i)-(iv) del Lema 4.1.4, la serie $\sum_n i(B_n)$ es incondicionalmente convergente en Y.

En tal caso, $i(\sum_n B_n) = \sum_n i(B_n)$.

Es conveniente introducir el siguiente concepto, que aparece asociado de manera natural a la noción de serie de conjuntos incondicionalmente convergente.

Definición 4.1.20. *Una multi-función $M : \Sigma \longrightarrow cwk(X)$ se llama multi-medida contablemente aditiva si, para cada sucesión disjunta (E_n) en Σ, la serie $\sum_n M(E_n)$ es incondicionalmente convergente y $M(\bigcup_n E_n) = \sum_n M(E_n)$.*

Como consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.18 obtenemos el siguiente

Corolario 4.1.21. *Una multi-función $M : \Sigma \longrightarrow cwk(X)$ es una multi-medida contablemente aditiva si y sólo si la composición $j \circ M$ es una medida contablemente aditiva.*

El lector puede encontrar en [Hes02, Section 7] y [KT84, Chapter 19] más información y numerosas referencias sobre la teoría de las multi-medidas.

4.1.3. Medibilidad de multi-funciones y existencia de selectores medibles

En este apartado realizamos un breve repaso de las distintas nociones de medibilidad que se pueden considerar cuando se trata con multi-funciones $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$. Para información detallada sobre este tema en contextos más generales, remitimos al lector a los libros [CV77, KT84], el reciente "survey" [Hes02], los artículos [BH98, HU77, Him75] y las referencias que allí se proporcionan. *Durante el resto del apartado M es un espacio métrico y escribimos $\mathscr{C}(M)$ para denotar la familia de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados de M.*

Definición 4.1.22. *Sea $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(M)$ una multi-función. Decimos que una función $f:\Omega\longrightarrow M$ es un selector de F si $f(t)\in F(t)$ para cada $t\in\Omega$.*

Definición 4.1.23. *Una multi-función $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(M)$ se dice medible Effros si*

$$\{t\in\Omega:\ F(t)\cap U\neq\emptyset\}\in\Sigma \quad \textit{para cada abierto } U\subset M.$$

Gran parte del interés de esta noción reside en un importante resultado de Kuratowski y Ryll-Nardzewski [KRN65] (véase e.g. [CV77, Theorem III.6] o [KT84, Theorem 14.2.1]) que afirma que, cuando M es *separable* y *completo*, toda multi-función medible Effros $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(M)$ tiene un selector Σ-Borel(M)-medible.

Definición 4.1.24. *Decimos que una multi-función $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(M)$ tiene gráfica medible si*

$$\mathrm{Graph}(F)=\{(t,m)\in\Omega\times M:\ m\in F(t)\}\in\Sigma\otimes\mathrm{Borel}(M).$$

Es bien conocido (véase e.g. [CV77, Theorem III.30] o [KT84, Theorem 13.2.7]) que si M es *separable* y *completo*, entonces una multi-función $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(M)$ es medible Effros si y sólo si tiene gráfica medible.

En el caso de multi-funciones con valores en $cwk(X)$ se puede considerar también el concepto de medibilidad escalar, que recordamos a continuación. Dada una multi-función $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ y $x^*\in X^*$, escribimos $\delta^*(x^*,F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante

$$t\mapsto\delta^*(x^*,F(t)).$$

Definición 4.1.25. *Una multi-función $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*,F)$ es medible para cada $x^*\in X^*$.*

Medibilidad escalar y medibilidad Effros coinciden cuando X es *separable*, como se muestra en [CV77, Theorem III.37] (véase también [BH98, Corollary 4.10 (a)]). A continuación incluimos una prueba de dicha equivalencia.

Teorema 4.1.26. *Supongamos que X es separable. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) F es medible Effros;
(ii) F tiene gráfica medible;

(iii) F es escalarmente medible.

En tal caso, F tiene un selector fuertemente medible $f:\Omega\longrightarrow X$.

Demostración. *(i)⇒(iii)* Fijamos $x^*\in X^*$. Dado $a\in\mathbb{R}$, como el conjunto $U=\{x\in X : x^*(x)>a\}$ es abierto, tenemos que $\{t\in\Omega:\ F(t)\cap U\neq\emptyset\}=\{t\in\Omega:\ \delta^*(x^*,F(t))>a\}$ pertenece a Σ. Por tanto, $\delta^*(x^*,F)$ es medible.

La demostración de *(iii)⇒(i)* se divide en tres etapas.

Paso 1.- Para cada $\eta>0$, el conjunto $\{t\in\Omega : F(t)\cap\eta B_X\neq\emptyset\}$ pertenece a Σ. En primer lugar, observamos que

$$\{t\in\Omega:\ F(t)\cap\eta B_X\neq\emptyset\}=\bigcap_{x^*\in B_{X^*}}\{t\in\Omega:\ x^*(F(t))\cap[-\eta,\eta]\neq\emptyset\}.$$

En efecto, nótese que si para un cierto $t\in\Omega$ se cumple $F(t)\cap\eta B_X=\emptyset$, el teorema de separación de Hahn-Banach ($F(t)$ es convexo y débilmente compacto) garantiza la existencia de un $x^*\in S_{X^*}$ tal que $\inf(x^*(F(t)))>\sup(x^*(\eta B_X))=\eta$, luego $x^*(F(t))\cap[-\eta,\eta]=\emptyset$.

Como (B_{X^*},w^*) es separable, lo mismo ocurre con (B_{X^*},τ_M) (véase la demostración del Lema 4.1.15). Fijamos $A\subset B_{X^*}$ contable tal que $\overline{A}^{\tau_M}=B_{X^*}$. Se afirma que

$$\{t\in\Omega:\ F(t)\cap\eta B_X\neq\emptyset\}=\bigcap_{x^*\in A}\{t\in\Omega:\ x^*(F(t))\cap[-\eta,\eta]\neq\emptyset\}. \tag{4.1}$$

Para ver esta igualdad, fijamos un $t\in\Omega$ tal que $x^*(F(t))\cap[-\eta,\eta]\neq\emptyset$ para todo $x^*\in A$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $x_0^*(F(t))\cap[-\eta,\eta]=\emptyset$ para algún $x_0^*\in B_{X^*}$. Por ejemplo, podemos suponer que $\inf(x_0^*(F(t)))>\eta$. Como $\overline{A}^{\tau_M}=B_{X^*}$ y $\overline{\mathrm{aco}(F(t))}$ es débilmente compacto, existe un $x^*\in A$ tal que $|x^*(x)-x_0^*(x)|<\inf(x_0^*(F(t)))-\eta$ para cada $x\in F(t)$, es decir,

$$x^*(x)>x_0^*(x)-\inf(x_0^*(F(t)))+\eta\geq\eta\quad\text{ para cada } x\in F(t),$$

lo que contradice la elección de t. Esto demuestra (4.1).

Finalmente, la medibilidad escalar de F garantiza que, para cada $x^*\in B_{X^*}$, el conjunto

$$\{t\in\Omega:\ x^*(F(t))\cap[-\eta,\eta]\neq\emptyset\}$$
$$=\{t\in\Omega:\ \delta^*(x^*,F(t))\geq-\eta\}\cap\{t\in\Omega:\ \delta^*(-x^*,F(t))\geq-\eta\}$$

pertenece a Σ. Utilizando la igualdad (4.1) deducimos que $\{t\in\Omega : F(t)\cap\eta B_X\neq\emptyset\}\in\Sigma$.

Paso 2.- Para cada $\eta>0$ y cada $x\in X$, el conjunto $\{t\in\Omega : F(t)\cap(x+\eta B_X)\neq\emptyset\}$ pertenece a Σ. Para verlo, definimos una multi-función $G:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ mediante $G(t)=-x+F(t)$. Para cada $x^*\in X^*$ se tiene $\delta^*(x^*,G)=-x^*(x)+\delta^*(x^*,F)$. Por tanto, G también es escalarmente medible y el *Paso 1* nos dice que $\{t\in\Omega : F(t)\cap(x+\eta B_X)\neq\emptyset\}=\{t\in\Omega : G(t)\cap\eta B_X\neq\emptyset\}\in\Sigma$, como se quería demostrar.

Paso 3.- Para cada abierto $U\subset X$, el conjunto $\{t\in\Omega : F(t)\cap U\neq\emptyset\}$ pertenece a Σ. En efecto, como X es separable, podemos escribir $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n+\eta_n B_X)$ para ciertas sucesiones (x_n) en X y

(η_n) en $\mathbb{R}^+$. En virtud del *Paso 2*, se tiene

$$\{t \in \Omega : \ F(t) \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in \Omega : \ F(t) \cap (x_n + \eta_n B_X) \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Esto completa la demostración de *(iii)⇒(i)*.

Finalmente, por el teorema de selección de Kuratowski y Ryll-Nardzewski mencionado anteriormente, sabemos que existe un selector Σ-Borel$(X, \|\cdot\|)$-medible de F. Como X es separable, dicho selector es necesariamente fuertemente medible (Teorema 1.7.8). □

4.1.4. La integral de Debreu

Como se ha mencionado en la introducción, la noción de integral introducida por Debreu en [Deb67] es la generalización natural de la integral de Bochner al caso de multi-funciones. A pesar de que la teoría desarrollada por Debreu sólo consideraba multi-funciones con valores en $ck(X)$, no es difícil comprobar, como advirtió Byrne [Byr78, p. 246], que esta teoría se puede extender al caso de multi-funciones con valores en $cwk(X)$. El lector puede encontrar un estudio bastante completo sobre la integral de Debreu en [KT84, Chapter 17]. Para más información, remitimos a [Byr78, HU77], [Hes02, Section 3] y las referencias que allí se proporcionan.

Definición 4.1.27. *Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice integrable Debreu si la composición $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ es integrable Bochner. En tal caso, la integral de Debreu de F es el único elemento $(De)\int_\Omega F \, d\mu \in cwk(X)$ que cumple $j((De)\int_\Omega F \, d\mu) = (\mathrm{Bochner})\int_\Omega j \circ F \, d\mu$.*

Cabe destacar que el concepto de integrabilidad Debreu no depende de la inmersión particular j con la que estamos trabajando: para definir esta integral podemos utilizar cualquier aplicación i de $cwk(X)$ en un espacio de Banach que cumpla las propiedades *(i)-(iv)* del Lema 4.1.4 (véase e.g. [KT84, Proposition 17.2.4]).

Es conocido que para cualquier multi-función integrable Debreu $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se cumple la igualdad

$$(De)\int_\Omega F \, d\mu = \left\{(\mathrm{Bochner})\int_\Omega f \, d\mu : \ f : \Omega \longrightarrow X \text{ es un selector integrable Bochner de } F\right\},$$

es decir, la integral de Debreu de F coincide con la llamada *integral de Aumann* de F, [Aum65], véase [KT84, Theorem 17.3.2] y [Byr78].

4.2. La integral de Pettis de multi-funciones

A lo largo de esta sección suponemos siempre que X es separable.

La integral de Pettis de multi-funciones fue considerada por primera vez en [CV77, Chapter V, §4] y en los últimos años ha sido ampliamente estudiada por diversos autores, véase [Amr98, EAH00, HZ02, Zia97, Zia00]. Se define del siguiente modo.

Definición 4.2.1. *Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice integrable Pettis si*

(i) $\delta^*(x^*, F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *para todo* $x^* \in X^*$;

(ii) *para cada* $A \in \Sigma$, *existe un* $(P)\int_A F\ d\mu \in cwk(X)$ *tal que*

$$\delta^*\Big(x^*, (P)\int_A F\ d\mu\Big) = \int_A \delta^*(x^*, F)\ d\mu \quad \textit{para todo } x^* \in X^*.$$

Dada una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$, es claro que

$$\langle e_{x^*}, j \circ F \rangle = \delta^*(x^*, F) \quad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

La igualdad anterior nos permite reformular la Definición 4.2.1 en términos de la composición $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$, como señalamos en la siguiente

Observación 4.2.2. *Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Pettis si y sólo si*

(i) $\langle e_{x^*}, j \circ F \rangle \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *para todo* $x^* \in X^*$;

(ii) *para cada* $A \in \Sigma$, *existe un* $(P)\int_A F\ d\mu \in cwk(X)$ *tal que*

$$\langle e_{x^*}, j\Big((P)\int_A F\ d\mu\Big)\rangle = \int_A \langle e_{x^*}, j \circ F\rangle\ d\mu \quad \textit{para todo } x^* \in X^*.$$

La condición *(ii)* garantiza la unicidad de $(P)\int_A F\ d\mu$, ya que el conjunto

$$\mathscr{E} = \{e_{x^*} :\ x^* \in B_{X^*}\} \subset B_{\ell_\infty(B_{X^*})^*}$$

es normante. En lo sucesivo, dada una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$, escribimos

$$W_F = Z_{j\circ F, \mathscr{E}} = \{\delta^*(x^*, F) :\ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Es bien conocido (véase e.g. [Mus91, Theorem 5.2]) que *una función f definida en Ω con valores en un espacio de Banach separable Y es integrable Pettis si y sólo si la familia Z_f es uniformemente integrable*. En lo que respecta a multi-funciones, disponemos de la caracterización aislada en el Teorema 4.2.3. La implicación *(iii)⇒(i)* se debe esencialmente a Castaing y Valadier [CV77, Chapter V, §4], mientras que las otras han sido probadas más recientemente por El Amri y Hess [EAH00] y Ziat [Zia97] (véase [Zia00] para una prueba corregida de *(i)⇒(ii)*).

Teorema 4.2.3. *Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F es integrable Pettis;*

(ii) *W_F es uniformemente integrable;*

(iii) *F es escalarmente medible y cualquier selector fuertemente medible de F es integrable Pettis.*

En tal caso, para cada $A \in \Sigma$, se tiene

$$(P)\int_A F\ d\mu = \{(\text{Pettis})\int_A f\ d\mu :\ f : \Omega \longrightarrow X \textit{ es un selector integrable Pettis de } F\}.$$

El Apartado 4.2.1 está dedicado a proporcionar una prueba del Teorema 4.2.3. Este resultado será fundamental en nuestras consideraciones posteriores sobre la integral de Pettis y su relación con la integral de Birkhoff de multi-funciones. Como aplicación, en el Apartado 4.2.2 discutimos la relación entre la integrabilidad Pettis de una multi-función $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ y la integrabilidad Pettis de la función univaluada $j\circ F$.

4.2.1. Caracterización de la integrabilidad Pettis de multi-funciones

El apartado *(ii)* de la siguiente proposición es conocido, al menos para un espacio de Banach separable Y en el caso $B=B_{Y^*}$ (como hemos comentado antes del Teorema 4.2.3).

Proposición 4.2.4 ([CR04]). *Sean Y un espacio de Banach tal que (B_{Y^*},w^*) es angélico, $B\subset B_{Y^*}$ un conjunto normante y $f:\Omega\longrightarrow Y$ una función.*

(i) Si $Z_{f,B}$ está formada por funciones medibles, entonces f es escalarmente medible.
(ii) Si $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable, entonces f es integrable Pettis y $\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma.

Demostración. Como B es normante, el teorema de separación de Hahn-Banach asegura que $\mathrm{aco}(B)$ es w^*-denso en B_{Y^*}. Utilizando la angelicidad de (B_{Y^*},w^*) concluimos que $\mathrm{aco}(B)$ es w^*-sucesionalmente denso en B_{Y^*} y, por tanto, $\mathrm{aco}(Z_{f,B})$ es $\mathfrak{T}_p$-sucesionalmente denso en Z_f. Es claro ahora que si $Z_{f,B}$ está compuesta por funciones medibles, lo mismo ocurre con Z_f.

La prueba de *(ii)* es como sigue. Supongamos que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable. Como $\mathrm{aco}(Z_{f,B})$ es uniformemente integrable y $\mathfrak{T}_p$-sucesionalmente denso en Z_f, podemos aplicar el teorema de Vitali (véase e.g. [Fre01, 246J]) para deducir que Z_f es un subconjunto uniformemente integrable de $\mathscr{L}^1(\mu)$.

Para ver que f es integrable Pettis, con $\nu_f(\Sigma)$ relativamente compacto en norma, sólo tenemos que comprobar que la aplicación canónica $J:B_{Y^*}\longrightarrow L^1(\mu)$ (que envía cada $y^*\in B_{Y^*}$ a la clase de equivalencia de $y^*\circ f$) es w^*-$\|\cdot\|_1$-continua (Proposición 1.9.2). Fijamos $C\subset B_{Y^*}$ y tomamos cualquier $y^*\in\overline{C}^{w^*}$. Como (B_{Y^*},w^*) es angélico, existe una sucesión (y_n^*) en C que w^*-converge a y^*. Por tanto, $(y_n^*\circ f)$ converge puntualmente a $y^*\circ f$ y, como Z_f es uniformemente integrable, podemos utilizar de nuevo el teorema de Vitali para concluir que $\lim_n\|J(y_n^*)-J(y^*)\|_1=0$. En particular, $J(y^*)\in\overline{J(C)}^{\|\cdot\|_1}$. Esto demuestra que J es w^*-$\|\cdot\|_1$-continua. □

Dada una multi-función integrable Pettis $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$, podemos considerar la multi-función asociada

$$M_F:\Sigma\longrightarrow cwk(X),\quad M_F(A)=(P)\int_A F\,d\mu.$$

En la Proposición 4.2.6 se muestra que M_F es una multi-medida contablemente aditiva. Esto es una consecuencia directa de un resultado de Costé [Cos] (véase [Hes02, Proposition 7.4]) que afirma que *una multi-función $M:\Sigma\longrightarrow cwk(X)$ es una multi-medida contablemente aditiva si y sólo si, para cada $x^*\in X^*$, la función $\delta^*(x^*,M(\cdot)):\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}$ es una medida contablemente aditiva*. Sin embargo, hemos optado por incluir aquí una una prueba completa de la Proposición 4.2.6 que no involucra la caracterización de Costé. Para ello necesitamos el siguiente lema (véase [Zia00]).

Lema 4.2.5. *Sea $F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función integrable Pettis. Entonces:*

(i) F tiene un selector fuertemente medible;

(ii) cualquier selector fuertemente medible de F, digamos $f:\Omega \longrightarrow X$, es integrable Pettis y $\nu_f(A) \in (P)\int_A F\, d\mu$ para todo $A \in \Sigma$.

Demostración. *(i)* es una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.26.

Para probar *(ii)* fijamos un selector fuertemente medible $f:\Omega \longrightarrow X$ de F. En primer lugar, observamos que f *es integrable Dunford*. En efecto, basta tener en cuenta que f es escalarmente medible y que se tiene la desigualdad

$$-\delta^*(-x^*,F) \leq x^* \circ f \leq \delta^*(x^*,F) \quad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

Fijamos $E \in \Sigma$ y definimos la aplicación lineal

$$T_E : X^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T_E(x^*) = \int_E x^* \circ f\, d\mu.$$

La función $\phi : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x^*) = \delta^*(x^*,(P)\int_E F\, d\mu)$ es τ_M-continua (véase la Observación 4.1.14) y se anula en 0. Gracias a la integrabilidad Pettis de F, se cumple la desigualdad $-\phi(-x^*) \leq T_E(x^*) \leq \phi(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$. Concluimos que T_E es τ_M-continua en 0 y, por linealidad, en todo punto de X^*. Por el teorema de Mackey-Arens, véase e.g. [Jar81, 8.5.5], existe $x_E \in X$ tal que $T_E(x^*) = x^*(x_E)$ para todo $x^* \in X^*$. Esto demuestra que f *es integrable Pettis*.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\nu_f(A) \notin (P)\int_A F\, d\mu$ para cierto $A \in \Sigma$. El teorema de separación de Hahn-Banach nos asegura que existe un $x^* \in X^*$ tal que

$$\begin{aligned}\int_A x^* \circ f\, d\mu &= x^*(\nu_f(A)) \\ &> \sup\Big\{x^*(x) :\ x \in (P)\int_A F\, d\mu\Big\} = \delta^*\Big(x^*,(P)\int_A F\, d\mu\Big) = \int_A \delta^*(x^*,F)\, d\mu,\end{aligned}$$

lo que contradice que $x^* \circ f \leq \delta^*(x^*,F)$. Por tanto, $\nu_f(A) \in (P)\int_A F\, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 4.2.6. *Sea $F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función integrable Pettis. Entonces M_F es una multi-medida contablemente aditiva.*

Demostración. Es sencillo ver que $\nu := j \circ M_F : \Sigma \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ es una medida finitamente aditiva. Para probar que, de hecho, ν es contablemente aditiva, comenzamos con el siguiente:

Caso particular.- Supongamos que $0 \in (P)\int_A F\, d\mu$ *para todo* $A \in \Sigma$. Fijamos una sucesión disjunta (A_n) en Σ. En primer lugar, vamos a ver que la serie $\sum_n \nu(A_n)$ converge incondicionalmente. Esto equivale a demostrar que la serie de conjuntos $\sum_n (P)\int_{A_n} F\, d\mu$ es incondicionalmente convergente (Proposición 4.1.18). Fijamos $x_n \in \sum_n (P)\int_{A_n} F\, d\mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tomamos una sucesión $n_1 < n_2 < \dots$ en $\mathbb{N}$. Definimos $s_k = \sum_{i=1}^k x_{n_i}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nótese que

$$s_k = s_k + 0 \in \sum_{i=1}^k (P)\int_{A_{n_i}} F\, d\mu + (P)\int_{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k A_{n_i}} F\, d\mu = (P)\int_\Omega F\, d\mu \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, para cada $x^* \in X^*$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_{n_i})$ es convergente. En efecto, basta observar que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(x_{n_i})| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \Big|\delta^*\Big(x^*,(P)\int_{A_{n_i}} F\ d\mu\Big)\Big| + \sum_{i=1}^{\infty} \Big|\delta^*\Big(-x^*,(P)\int_{A_{n_i}} F\ d\mu\Big)\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_{n_i}} |\delta^*(x^*,F)|\ d\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_{n_i}} |\delta^*(-x^*,F)|\ d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |\delta^*(x^*,F)|\ d\mu + \int_{\Omega} |\delta^*(-x^*,F)|\ d\mu < +\infty.\end{aligned}$$

Esto garantiza que la sucesión (s_k) tiene, a lo más, un punto de aglomeración para la topología débil de X. Como cada s_k pertenece al conjunto débilmente compacto $(P)\int_{\Omega} F\ d\mu$, se deduce que (s_k) es débilmente convergente, es decir, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ es débilmente convergente. Como la sucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ es arbitraria, el teorema de Orlicz-Pettis 1.5.7 asegura que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente. Esto demuestra que la serie $\sum_n \nu(A_n)$ converge incondicionalmente en $\ell_\infty(B_{X^*})$.

Se afirma que $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. En efecto, para cada $x^* \in B_{X^*}$ tenemos

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)\Big)(x^*) &= \lim_N \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n)(x^*) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \delta^*\Big(x^*,(P)\int_{A_n} F\ d\mu\Big) \\ &= \lim_N \sum_{n=1}^{N} \int_{A_n} \delta^*(x^*,F)\ d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \delta^*(x^*,F)\ d\mu \\ &= \delta^*\Big(x^*,(P)\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} F\ d\mu\Big) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)(x^*).\end{aligned}$$

La demostración del *Caso particular* ha finalizado.

Caso general.- Fijamos un selector integrable Pettis de F, digamos $f : \Omega \longrightarrow X$ (Lema 4.2.5). Definimos

$$G : \Omega \longrightarrow cwk(X), \quad G(t) = -f(t) + F(t).$$

Es claro que $\delta^*(x^*,G) = -x^* \circ f + \delta^*(x^*,F)$ para todo $x^* \in X^*$. Por tanto, G es integrable Pettis y $0 \in (P)\int_A G\ d\mu = -\nu_f(A) + (P)\int_A F\ d\mu$ para cada $A \in \Sigma$ (de nuevo, aplicamos el Lema 4.2.5). El *Caso particular* nos dice que la función $\nu' : \Sigma \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ dada por

$$\nu'(A) = j\Big((P)\int_A G\ d\mu\Big) = j(\{-\nu_f(A)\}) + \nu(A)$$

es una medida contablemente aditiva. Finalmente, como ν_f es una medida contablemente aditiva (Teorema 1.8.7), deducimos que lo mismo ocurre con ν. El Corolario 4.1.21 asegura ahora que M_F es una multi-medida contablemente aditiva. □

Ya hemos reunido todas las herramientas necesarias para la prueba del Teorema 4.2.3.

Demostración del Teorema 4.2.3. *(i)⇒(ii)* La función $\nu : \Sigma \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ dada por $\nu = j \circ M_F$ es una medida contablemente aditiva (Proposición 4.2.6) y μ-continua. En vista de la desigualdad

$$\|\nu\|(A) \geq \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle e_{x^*}, \nu \rangle|(A) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_A |\delta^*(x^*, F)| \, d\mu \quad \text{para cada } A \in \Sigma,$$

deducimos que $W_F = \{\delta^*(x^*, F) : x^* \in B_{X^*}\}$ es uniformemente integrable.

(ii)⇒(iii) Fijamos un selector fuertemente medible de F, digamos $f : \Omega \longrightarrow X$. Se tiene

$$-\delta^*(-x^*, F) \leq x^* \circ f \leq \delta^*(x^*, F) \quad \text{para todo } x^* \in B_{X^*}.$$

Esta desigualdad y la integrabilidad uniforme de W_F garantizan que $Z_f = \{x^* \circ f : x^* \in B_{X^*}\}$ es uniformemente integrable. Por la Proposición 4.2.4, f es integrable Pettis, como se quería demostrar.

Dividimos la prueba de *(iii)⇒(i)* en una serie de pasos.

Paso 1.- $\delta^*(x^*, F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$. Fijamos $x^* \in X^*$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar la multi-función $G_{\varepsilon, x^*} : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ dada por

$$G_{\varepsilon, x^*}(t) = F(t) \cap \{x \in X : \; x^*(x) \geq \delta^*(x^*, F(t)) - \varepsilon\}.$$

Como F es escalarmente medible, el conjunto

$$\mathrm{Graph}(F) = \{(t, x) \in \Omega \times X : \; x \in F(t)\}$$

pertenece a $\Sigma \otimes \mathrm{Borel}(X)$ (Teorema 4.1.26). Por otra parte, la función

$$\Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto x^*(x) - \delta^*(x^*, F(t)) + \varepsilon$$

es $\Sigma \otimes \mathrm{Borel}(X)$-medible, luego

$$\mathrm{Graph}(G_{\varepsilon, x^*}) = \mathrm{Graph}(F) \cap \{(t, x) \in \Omega \times X : \; x^*(x) \geq \delta^*(x^*, F(t)) - \varepsilon\} \in \Sigma \otimes \mathrm{Borel}(X).$$

El Teorema 4.1.26 nos dice que G_{ε, x^*} es medible Effros y que existe un selector fuertemente medible de G_{ε, x^*}, digamos $g_{\varepsilon, x^*} : \Omega \longrightarrow X$. En particular, g_{ε, x^*} es un selector de F, luego g_{ε, x^*} es integrable Pettis. Como $x^* \circ g_{\varepsilon, x^*} \in \mathscr{L}^1(\mu)$ y

$$x^* \circ g_{\varepsilon, x^*} \leq \delta^*(x^*, F) \leq x^* \circ g_{\varepsilon, x^*} + \varepsilon,$$

se sigue que $\delta^*(x^*, F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Paso 2.- Definimos

$$Q = \{f : \Omega \longrightarrow X : \; f \text{ es un selector integrable Pettis de } F\} \neq \emptyset.$$

Por comodidad, escribimos h^μ para denotar la clase de equivalencia en $L^1(\mu)$ de cada $h \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Fijamos una aplicación lineal $\rho : L^1(\mu) \longrightarrow \mathscr{L}^1(\mu)$ cumpliendo $\rho(h^\mu) \in h^\mu$ para toda $h \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Sea $\mathfrak{T}$ la topología producto en $L^1(\mu)^{X^*}$ obtenida cuando $L^1(\mu)$ se considera equipado con su topología débil. Consideramos el conjunto

$$\tilde{Q} = \{\phi \in L^1(\mu)^{X^*} : \text{ existe } f \in Q \text{ tal que } \rho(\phi(x^*)) = x^* \circ f \ \mu\text{-a.e. para todo } x^* \in X^*\}.$$

Es sencillo comprobar que $\tilde{Q}$ está formado por aplicaciones lineales de X^* en $L^1(\mu)$.

Vamos a demostrar que *$\tilde{Q}$ es $\mathfrak{T}$-cerrado en $L^1(\mu)^{X^*}$*. Para verlo fijamos un $\phi \in L^1(\mu)^{X^*}$ perteneciente a la clausura de $\tilde{Q}$ en $(L^1(\mu)^{X^*}, \mathfrak{T})$. Tomamos una red (ϕ_α) en $\tilde{Q}$ tal que, para cada $x^* \in X^*$, la red $(\phi_\alpha(x^*))$ converge a $\phi(x^*)$ débilmente. En particular, ϕ es lineal. Además, podemos encontrar una red (f_α) en Q tal que

$$\lim_\alpha \int_E x^* \circ f_\alpha \, d\mu = \int_E \rho(\phi(x^*)) \, d\mu \quad \text{para todo } E \in \Sigma \text{ y todo } x^* \in X^*.$$

Para cada $t \in \Omega$ podemos definir una aplicación lineal

$$s(t) : X^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s(t)(x^*) = \rho(\phi(x^*))(t).$$

Como (B_{X^*}, w^*) es separable, existe $A \subset B_{X^*}$ contable tal que $\overline{A}^{\tau_M} = B_{X^*}$ (véase la prueba del Lema 4.1.15). Sea C el $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial *contable* de X^* formado por todas las combinaciones lineales de elementos de A con coeficientes racionales. Dado $x^* \in X^*$, tenemos

$$\int_E \rho(\phi(x^*)) \, d\mu = \lim_\alpha \int_E x^* \circ f_\alpha \, d\mu \le \int_E \delta^*(x^*, F) \, d\mu \quad \text{para todo } E \in \Sigma.$$

Por tanto, para cada $x^* \in X^*$ se cumple la desigualdad

$$\rho(\phi(x^*)) \le \delta^*(x^*, F) \quad \mu\text{-a.e.} \tag{4.2}$$

Podemos encontrar ahora un $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ tal que

$$-\delta^*(-x^*, F(t)) \le s(t)(x^*) \le \delta^*(x^*, F(t)) \quad \text{para cada } t \in E \text{ y cada } x^* \in C \tag{4.3}$$

Afirmación.- Para cada $t \in E$ existe un $f(t) \in F(t)$ tal que $x^*(f(t)) = s(t)(x^*)$ para todo $x^* \in C$. En efecto, como $\delta^*(\cdot, F(t))$ es τ_M-continua, la desigualdad (4.3) nos asegura que la restricción $s(t)|_C$ es τ_M-continua. Teniendo en cuenta que C es un $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial τ_M-denso en X^*, un argumento estándar permite extender $s(t)|_C$ a una aplicación lineal τ_M-continua definida en todo X^*. Por el teorema de Mackey-Arens, véase e.g. [Jar81, 8.5.5], existe un $f(t) \in X$ tal que $x^*(f(t)) = s(t)(x^*)$ para todo $x^* \in C$. El hecho de que $\overline{C}^{\tau_M} = X^*$ y la desigualdad (4.3) implican que $x^*(f(t)) \le \delta^*(x^*, F(t))$ para todo $x^* \in X^*$. Finalmente, el teorema de separación de Hahn-Banach garantiza que $f(t) \in F(t)$, como se quería demostrar.

Tomamos $f(t) \in F(t)$ arbitrario para cada $t \in \Omega \setminus E$. Entonces $f : \Omega \longrightarrow X$ es un selector *integrable Pettis* de F. En efecto, por la propia definición de f, para cada $x^* \in A$ se tiene $x^* \circ f = \rho(\phi(x^*))$ μ-a.e. Usando la Proposición 4.2.4 *(i)* deducimos que f es escalarmente medible y, como X es separable, el teorema de medibilidad de Pettis (Teorema 1.7.6) nos asegura que f es fuertemente medible. Por tanto, f es integrable Pettis, es decir, $f \in Q$.

Vamos a demostrar ahora que, para cada $x^* \in X^*$, se cumple la igualdad $\rho(\phi(x^*)) = x^* \circ f$ μ-a.e. Evidentemente, esto se tiene cuando $x^* \in C$. En general, dado $x^* \in X^*$, existe una red (x^*_β) contenida en C que es τ_M-convergente hacia x^*. En vista de (4.2), para cada β tenemos

$$-\delta^*(x^* - x^*_\beta, F) \leq \rho(\phi(x^*_\beta - x^*)) \leq \delta^*(x^*_\beta - x^*, F) \quad \mu\text{-a.e.}$$

Como C es contable, podemos encontrar un $G \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus G) = 0$ tal que

$$-\delta^*(x^* - x^*_\beta, F(t)) \leq x^*_\beta(f(t)) - \rho(\phi(x^*))(t) \leq \delta^*(x^*_\beta - x^*, F(t)) \quad \text{para todo } t \in G \text{ y todo } \beta.$$

Tomando límites deducimos que $\rho(\phi(x^*))(t) = x^*(f(t))$ para todo $t \in G$. Esto demuestra que $\phi \in \tilde{Q}$. Por tanto, $\tilde{Q}$ es cerrado en $(L^1(\mu)^{X^*}, \mathfrak{T})$.

Paso 3.- $\tilde{Q}$ es $\mathfrak{T}$-compacto. En efecto, para cada $x^* \in X^*$, la familia

$$C_{x^*} = \{h \in \mathscr{L}^1(\mu) : \ -\delta^*(-x^*, F) \leq h \leq \delta^*(x^*, F)\}$$

es un subconjunto uniformemente integrable de $\mathscr{L}^1(\mu)$ y, por el Teorema 1.2.2, su imagen canónica en $L^1(\mu)$, denotada por $C^\mu_{x^*}$, es débilmente relativamente compacta. Como $\tilde{Q} \subset \prod_{x^* \in X^*} C^\mu_{x^*}$ y $\tilde{Q}$ es $\mathfrak{T}$-cerrado (*Paso 2*), se sigue que $\tilde{Q}$ es $\mathfrak{T}$-compacto.

Paso 4.- Fijamos $E \in \Sigma$ y definimos una aplicación $T_E : \tilde{Q} \longrightarrow X$ mediante $T_E(\phi) = \nu_f(E)$, donde f es cualquier selector integrable Pettis de F cumpliendo $\rho(\phi(x^*)) = x^* \circ f$ μ-a.e. para todo $x^* \in X^*$. Evidentemente, T_E es $\mathfrak{T}$-w-continua, luego

$$T_E(\tilde{Q}) = \{\nu_f(E) : \ f : \Omega \longrightarrow X \text{ es un selector integrable Pettis de } F\}$$

es débilmente compacto. Además, $T_E(\tilde{Q})$ es convexo y, por tanto, pertenece a $cwk(X)$. Fijamos $x^* \in X^*$. Es evidente que $\delta^*(x^*, T_E(\tilde{Q})) \leq \int_E \delta^*(x^*, F)\, d\mu$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar la función integrable Pettis $g_{\varepsilon,x^*} : \Omega \longrightarrow X$ obtenida en la prueba del *Paso 1*. Entonces $\nu_{g_{\varepsilon,x^*}}(E) \in T_E(\tilde{Q})$ y

$$\begin{aligned} \delta^*(x^*, T_E(\tilde{Q})) \geq x^*(\nu_{g_{\varepsilon,x^*}}(E)) &= \int_E x^* \circ g_{\varepsilon,x^*}\, d\mu \\ &\geq \int_E (\delta^*(x^*, F) - \varepsilon)\, d\mu = \int_E \delta^*(x^*, F)\, d\mu - \mu(E)\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene $\delta^*(x^*, T_E(\tilde{Q})) = \int_E \delta^*(x^*, F)\, d\mu$. Esto demuestra que F es integrable Pettis, con $(P)\int_E F\, d\mu = T_E(\tilde{Q})$ para todo $E \in \Sigma$. La prueba del Teorema 4.2.3 ha finalizado. □

4.2.2. La integral de Pettis en términos de funciones univaluadas

En vista de la definición de la integral de Pettis para multi-funciones, es natural plantearse la siguiente pregunta: *¿una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Pettis si y sólo si $j \circ F$ es integrable Pettis?* Aparentemente, en la literatura no existe un estudio previo sobre esta cuestión. La siguiente proposición resume algunas respuestas parciales.

Proposición 4.2.7 ([CR04]). *Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Consideramos las siguientes condiciones:*

(i) $j\circ F$ es integrable Pettis;

(ii) F es integrable Pettis.

Entonces (i)⇒(ii) y, en tal caso, se tiene $j((P)\int_A F\,d\mu)=(\mathrm{Pettis})\int_A j\circ F\,d\mu$ para cada $A\in\Sigma$. Si $(F(\Omega),h)$ es separable (e.g. $F(\Omega)\subset ck(X)$), entonces (i) y (ii) son equivalentes.

Demostración. Supongamos que $j\circ F$ es integrable Pettis. Entonces $Z_{j\circ F}$ es un subconjunto uniformemente integrable de $\mathscr{L}^1(\mu)$ (Corolario 1.9.3) y lo mismo ocurre con $W_F\subset Z_{j\circ F}$. Utilizando el Teorema 4.2.3 concluimos que F es integrable Pettis. Además, para cada $A\in\Sigma$ y cada $x^*\in B_{X^*}$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle e_{x^*},\nu_{j\circ F}(A)\rangle &= \int_A \langle e_{x^*}, j\circ F\rangle\,d\mu\\ &= \int_A \delta^*(x^*,F)\,d\mu=\delta^*\Big(x^*,(P)\int_A F\,d\mu\Big)=\langle e_{x^*}, j\Big((P)\int_A F\,d\mu\Big)\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, $j((P)\int_A F\,d\mu)=\nu_{j\circ F}(A)$ para todo $A\in\Sigma$. Esto demuestra *(i)⇒(ii)*.

Supongamos ahora que $(F(\Omega),h)$ es separable y que F es integrable Pettis. Nótese que

$$Y=\overline{\mathrm{span}}((j\circ F)(\Omega))$$

es un subespacio cerrado *separable* de $\ell_\infty(B_{X^*})$ en el que $j\circ F$ toma valores. Además, el conjunto $B=\{e_{x^*}|_Y : x^*\in B_{X^*}\}\subset B_{Y^*}$ es normante. Como F es integrable Pettis, la familia $W_F=Z_{j\circ F,B}$ es uniformemente integrable (Teorema 4.2.3) y la Proposición 4.2.4 garantiza que $j\circ F$ es integrable Pettis, como se quería demostrar. □

El resto del apartado está dedicado a demostrar que la implicación *(ii)⇒(i)* de la proposición anterior es válida si debilitamos la hipótesis “$(F(\Omega),h)$ es separable” a “W_F es estable”. Las ideas son similares a las empleadas en el Apartado 2.3.2.

Lema 4.2.8. *Sean Y un espacio de Banach y $f:\Omega\longrightarrow Y$ una función tal que:*

(i) existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que, para cada n, la restricción $f|_{A_n}$ es integrable Pettis;

(ii) existe un conjunto normante $B\subset B_{Y^*}$ tal que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable.

Entonces f es integrable Pettis.

Demostración. Comenzamos observando que, *para cada $E\in\Sigma$, la serie $\sum_n \nu_{f|_{A_n}}(E\cap A_n)$ es incondicionalmente convergente.* En efecto, nótese que para cada conjunto finito $Q\subset\mathbb{N}$ se tiene

$$\Big\|\sum_{n\in Q}\nu_{f|_{A_n}}(E\cap A_n)\Big\|=\sup_{y^*\in B}\Big|\sum_{n\in Q} y^*\big(\nu_{f|_{A_n}}(E\cap A_n)\big)\Big|=\sup_{y^*\in B}\Big|\int_{E\cap(\bigcup_{n\in Q}A_n)} y^*\circ f\,d\mu\Big|. \qquad (4.4)$$

La convergencia incondicional de $\sum_n \nu_{f|_{A_n}}(E\cap A_n)$ se sigue ahora de la integrabilidad uniforme de la familia $Z_{f,B}$.

Definimos $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ mediante $\nu(E) = \sum_n \nu_{f|_{A_n}}(E \cap A_n)$. Vamos a demostrar que f es integrable Pettis y que $\nu_f(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \Sigma$. Es claro que f es escalarmente medible. Fijamos $y_0^* \in B_{Y^*}$. Entonces

$$\frac{1}{2}\Big(\int_{\bigcup_{k=1}^n A_k} |y_0^* \circ f|\, d\mu\Big) \leq \sup_{\substack{E\in\Sigma \\ E\subset \bigcup_{k=1}^n A_k}} \Big|\int_E y_0^* \circ f\, d\mu\Big| = \sup_{E\in\Sigma} \Big|\sum_{k=1}^n \int_{E\cap A_k} y_0^* \circ f\, d\mu\Big|$$
$$\leq \sup_{E\in\Sigma} \Big\|\sum_{k=1}^n \nu_{f|_{A_k}}(E \cap A_k)\Big\| \leq \sup_{y^*\in B} \int_\Omega |y^* \circ f|\, d\mu < +\infty \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

gracias a (4.4). Por tanto, $y_0^* \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ y f es integrable Dunford. Finalmente, nótese que

$$\int_E y^* \circ f\, d\mu = \sum_n y^*\big(\nu_{f|_{A_n}}(E \cap A_n)\big) = y^*(\nu(E)) \quad \text{para todo } y^* \in Y^* \text{ y todo } E \in \Sigma.$$

Esto demuestra que f es integrable Pettis, con $\nu_f(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \Sigma$. $\square$

Corolario 4.2.9. *Sean Y un espacio de Banach y $f : \Omega \longrightarrow Y$ una función tal que:*

(i) existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que, para cada n, la restricción $f|_{A_n}$ es acotada;

(ii) existe un conjunto normante $B \subset B_{Y^*}$ tal que $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y estable.

Entonces f es integrable Pettis y Z_f es estable.

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Como la familia $Z_{f|_{A_n},B}$ es uniformemente acotada y estable, un resultado de Talagrand (véase [Tal84, 11-2-1] o [Fre03, 465N]) nos asegura que $\mathrm{aco}(Z_{f|_{A_n},B}) = Z_{f|_{A_n},\mathrm{aco}(B)}$ también es estable y, por tanto, lo mismo ocurre con $\overline{Z_{f|_{A_n},\mathrm{aco}(B)}}^{\mathfrak{T}_p} = Z_f$. Como $f|_{A_n}$ es acotada, podemos aplicar el Teorema 1.9.4 para concluir que $f|_{A_n}$ es integrable Pettis. El resultado se sigue ahora del Lema 4.2.8. $\square$

Dada una multi-función escalarmente medible $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$, el siguiente lema nos garantiza que siempre es posible encontrar una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que, para cada n, la restricción $j \circ F|_{A_n}$ es acotada.

Lema 4.2.10. *Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función escalarmente medible. Entonces la función $\|j \circ F\|_\infty$ es medible.*

Demostración. Recordemos que la composición $j \circ F$ toma valores en $Y = C_b(B_{X^*}, \tau_M)$. En la prueba del Lema 4.1.15 hemos visto que existe un conjunto normante *contable* $B \subset B_{Y^*}$ tal que $Z_{j\circ F,B} \subset W_F$. Como la familia $Z_{j\circ F,B}$ está formada por funciones medibles y

$$\|j \circ F(t)\|_\infty = \sup_{y^*\in B} |\langle y^*, (j \circ F)(t)\rangle| \quad \text{para todo } t \in \Omega,$$

se sigue que $\|j \circ F\|_\infty$ es medible. $\square$

Ya estamos preparados para aplicar las técnicas de familias estables de funciones dentro del contexto de la integración de correspondencias.

Proposición 4.2.11. *Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función para la que existe un conjunto τ_M-denso $C\subset B_{X^*}$ tal que la familia*

$$W_{F,C}=\{\delta^*(x^*,F):\ x^*\in C\}\subset\mathbb{R}^\Omega$$

es uniformemente integrable y estable. Entonces $j\circ F$ es integrable Pettis y W_F es estable.

Demostración. En vista del Lema 4.2.10, existe una partición contable (A_n) de Ω en Σ tal que $j\circ F|_{A_n}$ está acotada para cada n. Definimos $Y=C_b(B_{X^*},\tau_M)$. Como C es τ_M-denso, el conjunto $B=\{e_{x^*}|_Y: x^*\in C\}\subset B_{Y^*}$ es normante. Por hipótesis, la familia $Z_{j\circ F,B}=W_{F,C}$ es uniformemente integrable y estable. El Corolario 4.2.9 nos asegura ahora que $j\circ F$ es integrable Pettis y que $Z_{j\circ F}\supset W_F$ es estable. □

Corolario 4.2.12. *Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función integrable Pettis tal que W_F es estable. Entonces $j\circ F$ es integrable Pettis.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior y el Teorema 4.2.3. □

Como se comentó en la Sección 1.9, *bajo el Axioma L*, cuando μ es perfecta toda familia contable y $\mathfrak{T}_p$-relativamente compacta de funciones medibles $\mathscr{H}\subset\mathbb{R}^\Omega$ es estable. Este hecho nos permite obtener el siguiente resultado.

Corolario 4.2.13. *(Axioma L) Supongamos que μ es perfecta. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Entonces F es integrable Pettis si y sólo si $j\circ F$ es integrable Pettis.*

Demostración. En vista de la Proposición 4.2.7, sólo nos queda demostrar el *sólo si*. Supongamos que F es integrable Pettis. Fijamos un conjunto *contable* y τ_M-denso $C\subset B_{X^*}$ (véase la prueba del Lema 4.1.15). Como $W_{F,C}$ está formada por funciones medibles y es $\mathfrak{T}_p$-relativamente compacta, es estable. Además, de la integrabilidad Pettis de F se sigue que $W_F\supset W_{F,C}$ es uniformemente integrable (Teorema 4.2.3). La Proposición 4.2.11 garantiza que $j\circ F$ es integrable Pettis. □

4.3. La integral de Birkhoff de multi-funciones

En esta sección estudiamos la extensión natural de la integral de Birkhoff al caso de multi-funciones con valores en $cwk(X)$. Para formular la definición seguimos los pasos de Debreu, reemplazando integrabilidad Bochner por integrabilidad Birkhoff.

Definición 4.3.1 ([CR04]). *Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Decimos que F es integrable Birkhoff si la composición $j\circ F:\Omega\longrightarrow\ell_\infty(B_{X^*})$ es integrable Birkhoff.*

Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función integrable Birkhoff. Entonces $j\circ F$ es integrable Pettis y el teorema de separación de Hahn-Banach garantiza que $\nu_{j\circ F}(\Omega)\in\mu(\Omega)\cdot\overline{\mathrm{co}((j\circ F)(\Omega))}$, véase e.g. [DU77, Corollary 8, p. 48]. Utilizando el Lema 4.1.4 deducimos que $\nu_{j\circ F}(\Omega)$ pertenece a $j(cwk(X))$ y, por tanto, existe un único $(B)\int_\Omega F\ d\mu \in cwk(X)$, la *integral de Birkhoff de* F, cumpliendo

$$j\Big((B)\int_\Omega F\ d\mu\Big) = \nu_{j\circ F}(\Omega).$$

Por otra parte, es claro que, para cada $A \in \Sigma$, la restricción $F|_A : A \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Birkhoff respecto de μ_A y su integral de Birkhoff, denotada por $(B)\int_A F\ d\mu$, satisface

$$j\Big((B)\int_A F\ d\mu\Big) = \nu_{j\circ F}(A).$$

Como consecuencia inmediata del Lema 4.1.4 y las Proposiciones 2.1.4 y 4.1.18, obtenemos la siguiente caracterización "intrínseca" de la integrabilidad Birkhoff.

Corolario 4.3.2 ([CR04]). *Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F es integrable Birkhoff;*

(ii) *existe un $C \in cwk(X)$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ de Ω en Σ tal que, para cada partición contable $\Gamma' = (A_n)$ de Ω en Σ más fina que Γ y cualquier elección $T' = (t_n)$ en Γ', la serie $\sum_n \mu(A_n)F(t_n)$ es incondicionalmente convergente y*

$$h\Big(\sum_n \mu(A_n)F(t_n), C\Big) \leq \varepsilon.$$

En tal caso, $C = (B)\int_\Omega F\ d\mu$.

Observación 4.3.3. En vista del corolario anterior y la Observación 4.1.19, las nociones de integrabilidad Birkhoff e integral de Birkhoff para multi-funciones no dependen de la inmersión particular de $cwk(X)$ en un espacio de Banach que hayamos utilizado, siempre que se cumplan las propiedades *(i)*-*(iv)* del Lema 4.1.4.

En los Apartados 4.3.1 y 4.3.2 vamos a discutir la relación que existe entre la integral de Birkhoff para multi-funciones y las integrales de Debreu y Pettis. Si X es separable, para una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se tiene:

$$F \text{ integrable Debreu } \Rightarrow\ F \text{ integrable Birkhoff } \Rightarrow\ F \text{ integrable Pettis.}$$

La primera (resp. segunda) implicación se convierte en una equivalencia si X tiene dimensión finita (resp. si F toma valores en $ck(X)$), véase el Teorema 4.3.7 (resp. Corolario 4.3.13). Por otra parte, cuando X tiene dimensión infinita y X^* es separable, los recíprocos de ambas implicaciones no son válidos en general, incluso para multi-funciones acotadas (Teoremas 4.3.10 y 4.3.15).

Para establecer algunos de estos resultados necesitamos reinterpretar, en el lenguaje de las multi-funciones, algunas de las caracterizaciones de la integrabilidad Birkhoff en términos de la propiedad de Bourgain (Sección 2.3.1).

Corolario 4.3.4. *Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función acotada. Entonces F es integrable Birkhoff si y sólo si W_F tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.3.2, teniendo en cuenta que $j\circ F$ es acotada y que $W_F = Z_{j\circ F,\mathscr{E}}$, donde $\mathscr{E}\subset B_{\ell_\infty(B_{X^*})^*}$ es normante. □

Corolario 4.3.5. *Supongamos que (B_{X^*},w^*) es separable. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) F es integrable Birkhoff;

(ii) W_F es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Demostración. Por el Lema 4.1.15, $(B_{C_b(B_{X^*},\tau_M)^*},w^*)$ es separable. El resultado se sigue aplicando el Corolario 2.3.28 a $j\circ F$, que toma valores en $C_b(B_{X^*},\tau_M)$. □

4.3.1. Relación con la integral de Debreu

Dado un espacio de Banach Y, sabemos que toda función integrable Bochner $f:\Omega\longrightarrow Y$ es integrable Birkhoff (Teorema 2.1.9), y que las correspondientes integrales coinciden. Por tanto, de las propias definiciones se deduce el siguiente

Corolario 4.3.6. *Toda multi-función integrable Debreu $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ es integrable Birkhoff y $(B)\int_\Omega F\,d\mu = (De)\int_\Omega F\,d\mu$.*

Al igual que ocurre para funciones univaluadas, el recíproco del Corolario 4.3.6 es cierto cuando X tiene dimensión finita.

Teorema 4.3.7 ([CR04]). *Supongamos que X tiene dimensión finita. Entonces una multi-función $F:\Omega\longrightarrow ck(X)$ es integrable Debreu si y sólo si es integrable Birkhoff.*

Demostración. Sólo tenemos que demostrar la condición suficiente. Supongamos que F es integrable Birkhoff. Como $\overline{\mathrm{span}(j(ck(X)))}$ es separable (Corolario 4.1.6) y $j\circ F$ es escalarmente medible, $j\circ F$ es fuertemente medible, por el teorema de medibilidad de Pettis (Teorema 1.7.6). En virtud de la Proposición 1.8.3, para ver que $j\circ F$ es integrable Bochner basta demostrar que

$$\int_\Omega \|j\circ F\|_\infty\,d\mu < +\infty.$$

Dado cualquier conjunto $A\subset\Omega$, escribimos $\mathbb{F}(A)=\bigcup_{t\in A}F(t)$. Nótese que

$$\|(j\circ F)(A)\| = \sup\{\|j(F(t))\|_\infty :\ t\in A\} = \sup\{\|F(t)\| :\ t\in A\} = \|\mathbb{F}(A)\|.$$

Como $j\circ F$ es integrable Birkhoff, existe una partición contable (A_m) de Ω en Σ tal que la restricción $j\circ F|_{A_m}$ está acotada cuando $\mu(A_m)>0$ y, para cada elección (t_m) en (A_m), la serie $\sum_m \mu(A_m)(j\circ F)(t_m)$ es incondicionalmente convergente. Por tanto, $\|\mathbb{F}(A_m)\|<+\infty$ cuando $\mu(A_m)>0$ y la serie de conjuntos $\sum_m \mu(A_m)\mathbb{F}(A_m)$ converge incondicionalmente (Proposición 4.1.18). En espacios de dimensión finita las nociones de convergencia incondicional y convergencia absoluta coinciden, luego

$$\int_\Omega \|j\circ F\|_\infty\,d\mu \leq \sum_{\mu(A_m)>0} \mu(A_m)\|(j\circ F)(A_m)\| = \sum_{\mu(A_m)>0} \mu(A_m)\|\mathbb{F}(A_m)\| < +\infty.$$

Esto completa la demostración. □

Es bien conocido que, para una función *acotada* con valores en un espacio de Banach *separable*, las nociones de integrabilidad Bochner e integrabilidad Birkhoff coinciden (basta combinar la Proposición 1.8.3 con el teorema de medibilidad de Pettis 1.7.6). En el Teorema 4.3.10 mostramos que, cuando se trabaja multi-funciones, esta equivalencia no es válida en general. Para la demostración necesitamos un par de lemas técnicos.

Lema 4.3.8 ([CR04]). *La familia uniformemente acotada*

$$\mathscr{Q} := \{\chi_{[0,s)} :\ s \in [0,1]\} \cup \{\chi_{[s,1]} :\ s \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$$

es de oscilación pequeña.

Demostración. En vista de la igualdad $\chi_{[s,1]} = \mathbf{1} - \chi_{[0,s)}$, $s \in [0,1]$, la familia $\mathscr{Q}$ es de oscilación pequeña si y sólo si ocurre lo mismo con $\{\chi_{[0,s)} : s \in [0,1]\}$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $2/n \leq \varepsilon$. Definimos $A_i := [(i-1)/n, i/n)$ para cada $1 \leq i \leq n-1$ y $A_n := [(n-1)/n, 1]$. Dados $t_i, t_i' \in A_i$, $1 \leq i \leq n$, para cada $s \in [0,1]$ tenemos

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\chi_{[0,s)}(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\chi_{[0,s)}(t_i')\Big| &= \frac{1}{n}\cdot\Big|\sum_{i=1}^{n}\big(\chi_{[0,s)}(t_i) - \chi_{[0,s)}(t_i')\big)\Big| \\ &= \frac{1}{n}\cdot\Big|\sum_{i=1}^{n}\big(\chi_{(t_i,1]}(s) - \chi_{(t_i',1]}(s)\big)\Big| \leq \frac{1}{n}\cdot\Big|\sum_{t_i<t_i'}\chi_{(t_i,t_i']}(s)\Big| + \frac{1}{n}\cdot\Big|\sum_{t_i>t_i'}\chi_{(t_i',t_i]}(s)\Big| \leq \frac{2}{n} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto demuestra que la familia $\{\chi_{[0,s)} : s \in [0,1]\}$ es de oscilación pequeña. □

Lema 4.3.9 ([CR04]). *Fijamos una enumeración* $\{q_1, q_2, \dots\}$ *de* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. *Dados* $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$, *definimos* $h_{b_1,\dots,b_N} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por la fórmula*

$$h_{b_1,\dots,b_N}(t) := \max\big(\{b_n :\ 1 \leq n \leq N,\ q_n \leq t\} \cup \{0\}\big).$$

Entonces, para cada $r > 0$, *la familia uniformemente acotada*

$$\mathscr{H}_r := \{h_{b_1,\dots,b_N} :\ b_1, \dots, b_N \in [0,r],\ N \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$$

es oscilación pequeña.

Demostración. Comenzamos probando que $\mathscr{H}_r \subset \operatorname{aco}(3r\mathscr{Q})$, donde $\mathscr{Q}$ es la familia definida en el Lema 4.3.8. Fijamos $b_1, \dots, b_N \in [0,r]$. Tomamos una permutación σ de $\{1, \dots, N\}$ tal que

$$q_{\sigma(1)} < q_{\sigma(2)} < \dots < q_{\sigma(N)}$$

y definimos

$$c_i := \max\big(\{b_{\sigma(j)} :\ 1 \leq j \leq i\} \cup \{0\}\big), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Nótese que $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N \leq r$ y que tenemos

$$h_{b_1,\ldots,b_N} = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \chi_{[q_{\sigma(i)},q_{\sigma(i+1)})} + c_N \chi_{[q_{\sigma(N)},1]} = \sum_{i=1}^{N-1} c_i (\chi_{[0,q_{\sigma(i+1)})} - \chi_{[0,q_{\sigma(i)})}) + c_N \chi_{[q_{\sigma(N)},1]}$$
$$= -c_1 \chi_{[0,q_{\sigma(1)})} + \sum_{i=2}^{N-1} (c_{i-1} - c_i) \chi_{[0,q_{\sigma(i)})} + c_{N-1} \chi_{[0,q_{\sigma(N)})} + c_N \chi_{[q_{\sigma(N)},1]}.$$

Además,

$$|-c_1| + \sum_{i=2}^{N-1} |c_{i-1} - c_i| + |c_{N-1}| + |c_N| = c_1 + \sum_{i=2}^{N-1} (c_i - c_{i-1}) + c_{N-1} + c_N = 2c_{N-1} + c_N \leq 3r.$$

Por tanto, $h_{b_1,\ldots,b_N} \in \mathrm{aco}(3r\mathscr{Q})$. Esto demuestra que $\mathscr{H}_r \subset \mathrm{aco}(3r\mathscr{Q})$.

Finalmente, como la familia $\mathscr{Q}$ es de oscilación pequeña (Lema 4.3.8), lo mismo ocurre con $3r\mathscr{Q}$ y, por tanto, con $\mathscr{H}_r \subset \mathrm{aco}(3r\mathscr{Q})$ (véase la prueba del Teorema 2.3.12). □

Teorema 4.3.10 ([CR04]). *Supongamos que X es de dimensión infinita y que X^* es separable. Entonces existe una multi-función acotada integrable Birkhoff $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ que no es integrable Debreu.*

Demostración. Utilizamos las notaciones introducidas en el Lema 4.3.9. Como en la prueba de la Proposición 4.1.10, podemos tomar una base de Markushevich de X, digamos $\{(x_n, x_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

- $r := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$ y $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| < +\infty$;
- $X^* = \overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$.

En vista de los Lemas 4.1.7 y 4.1.8, podemos definir una multi-función acotada

$$F : [0,1] \longrightarrow cwk(X), \quad F(t) := \overline{\mathrm{aco}\{x_n : \ q_n \leq t\}}.$$

En primer lugar, vamos a probar que F *no es integrable Debreu*. En efecto, para cualesquiera puntos $t \neq s$ en $[0,1]$, tenemos $\{n \in \mathbb{N} : q_n \leq t\} \neq \{n \in \mathbb{N} : q_n \leq s\}$ y, por tanto, $h(F(t), F(s)) \geq 1/M$ (Lema 4.1.7). Se sigue inmediatamente que $j \circ F$ no es fuertemente medible.

Por otra parte, F *es integrable Birkhoff*. Para verlo sólo tenemos que comprobar que W_F es una familia de oscilación pequeña (Corolario 4.3.4). Definimos

$$\mathscr{G} := \{\delta^*(x^*, F) : \ x^* \in B_{X^*} \cap \mathrm{span}\{x_m^* : m \in \mathbb{N}\}\}.$$

Se afirma que $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_r$. En efecto, dado cualquier $x^* = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n^* \in B_{X^*} \cap \operatorname{span}\{x_m^* : m \in \mathbb{N}\}$, se cumple $x^*(x_n) = a_n$ y $|a_n| \leq \|x_n\| \leq r$ para todo $1 \leq n \leq N$. Además, para cada $t \in [0,1]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta^*(x^*, F(t)) &= \sup\Big\{x^*(x) :\ x \in \operatorname{aco}\{x_m :\ q_m \leq t\}\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{n=1}^{N} \sum_{q_m \leq t} a_n \lambda_m \delta_{n,m} :\ \sum_{q_m \leq t} |\lambda_m| \leq 1,\ \lambda_m = 0 \text{ para todo } m \text{ salvo una cantidad finita}\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{\substack{n=1 \\ q_n \leq t}}^{N} a_n \lambda_n :\ \sum_{q_m \leq t} |\lambda_m| \leq 1,\ \lambda_m = 0 \ \text{ para todo } m \text{ salvo una cantidad finita}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Es claro ahora que

$$\delta^*(x^*, F(t)) = \text{máx}\big(\{|a_n| :\ 1 \leq n \leq N,\ q_n \leq t\} \cup \{0\}\big) = h_{|a_1|,\ldots,|a_N|}(t) \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Esto demuestra que $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_r$. Como consecuencia del Lema 4.3.9, deducimos que $\mathscr{G}$ es una familia de oscilación pequeña y, por tanto, $\overline{\mathscr{G}}^{\mathfrak{T}_p}$ también es de oscilación pequeña.

Para finalizar la prueba vamos a comprobar que $W_F \subset \overline{\mathscr{G}}^{\mathfrak{T}_p}$. Fijamos $x^* \in B_{X^*}$. Como

$$X^* = \overline{\operatorname{span}\{x_n^* :\ n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|},$$

existe una sucesión (y_n^*) contenida en $B_{X^*} \cap \operatorname{span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ que converge a x^* en norma. En particular, $\tau_M - \text{lím}_n y_n^* = x^*$ y, por tanto, para cada $t \in [0,1]$ tenemos $\text{lím}_n \delta^*(y_n^*, F(t)) = \delta^*(x^*, F(t))$. Se sigue que $\delta^*(x^*, F) \in \overline{\mathscr{G}}^{\mathfrak{T}_p}$, como se quería demostrar. □

Dados un subespacio cerrado $Z \subset X$ y una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(Z)$, es fácil comprobar que F es integrable Birkhoff (resp. Debreu) si y sólo si F es integrable Birkhoff (resp. Debreu) cuando se considera como multi-función con valores en $cwk(X)$ (en tal caso, las respectivas integrales coinciden). Por otra parte, ya hemos mencionado que *X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si todo subespacio cerrado separable de X tiene dual separable* (véase la Sección 1.4). En vista de todo esto, el Teorema 4.3.10 nos permite deducir el siguiente resultado.

Corolario 4.3.11 ([CR04]). *Supongamos que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) toda multi-función integrable Birkhoff $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Debreu;
(ii) toda multi-función acotada integrable Birkhoff $F : [0,1] \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Debreu;
(iii) X es de dimensión finita.

4.3.2. Relación con la integral de Pettis

Para funciones con valores en espacios de Banach separables, las nociones de integrabilidad Birkhoff e integrabilidad Pettis son equivalentes (Corolario 2.1.17). Combinando este hecho con la Proposición 4.2.7 y el Teorema 4.2.3, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.3.12 ([CR04]). *Supongamos que X es separable. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función integrable Birkhoff. Entonces:*

(i) F es integrable Pettis;
(ii) F admite selectores fuertemente medibles;
(iii) cada selector fuertemente medible de F es integrable Birkhoff;
(iv) para cada $A\in\Sigma$ se cumple la igualdad

$$(B)\int_A F\,d\mu=\{\nu_f(A):\ f:\Omega\longrightarrow X \text{ es un selector integrable Birkhoff de } F\}.$$

Corolario 4.3.13 ([CR04]). *Supongamos que X es separable. Sea $F:\Omega\longrightarrow cwk(X)$ una multi-función tal que $(F(\Omega),h)$ es separable (e.g. $F(\Omega)\subset ck(X)$). Entonces F es integrable Birkhoff si y sólo si F es integrable Pettis.*

Demostración. Nótese que $j\circ F$ toma valores en el espacio separable $\overline{\mathrm{span}}(j\circ F(\Omega))$. □

Durante el resto de la sección escribimos $\pi_n:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbb{R}$ para denotar la proyección en la n-ésima coordenada.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.2.8 aplicado a la sucesión $E_n=\{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}:\pi_n(z)=1\}$ en el espacio de probabilidad $(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mathscr{L}_1,\lambda_1)$. Sin embargo, hemos optado por incluir una prueba directa.

Lema 4.3.14 ([CR04]). *La familia $\{\pi_n:n\in\mathbb{N}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain respecto de λ_1.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\{\pi_n:n\in\mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de Bourgain. Entonces existen $A_1,\dots,A_m\in\Sigma$ con $\lambda_1(A_i)>0$ tales que $\mathbb{N}=\bigcup_{i=1}^m Q_i$, donde escribimos

$$Q_i=\{n\in\mathbb{N}:\ \mathrm{osc}(\pi_n|_{A_i})<1\}=\{n\in\mathbb{N}:\ \pi_n^{-1}(\{0\})\cap A_i=\emptyset\ \text{ ó }\ \pi_n^{-1}(\{1\})\cap A_i=\emptyset\}.$$

Por tanto, existe un $1\le i\le m$ tal que Q_i es infinito. Como $\pi_n(z)=\pi_n(z')$ para cada $z,z'\in A_i$ y cada $n\in Q_i$, deducimos que $A_i\subset\prod_{n=1}^{\infty}T_n$, donde $\#(T_n)=1$ para cada $n\in Q_i$ y $T_n=\{0,1\}$ para cada $n\in\mathbb{N}\setminus Q_i$. Como Q_i es infinito, se sigue que $\lambda_1(A_i)\le\lambda_1(\prod_{n=1}^{\infty}T_n)=0$, contradicción. □

Teorema 4.3.15 ([CR04]). *Supongamos que X es de dimensión infinita y que X^* es separable. Entonces existe una multi-función acotada integrable Pettis $F:[0,1]\longrightarrow cwk(X)$ que no es integrable Birkhoff.*

Demostración. Como $(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mathscr{L}_1,\lambda_1)$ y $([0,1],\mathscr{L},\lambda)$ son espacios de medida isomorfos (véase la Sección 1.1), basta encontrar una multi-función acotada integrable Pettis $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\longrightarrow cwk(X)$ que no sea integrable Birkhoff respecto de λ_1.

Como en la demostración del Teorema 4.3.10, fijamos una base de Markushevich $\{(x_n,x_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X con las siguientes propiedades:

- $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|<+\infty$ y $x_n^*\in B_{X^*}$ para cada $n\in\mathbb{N}$;
- $X^*=\overline{\mathrm{span}\{x_n^*:n\in\mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$.

Los Lemas 4.1.7 y 4.1.8 nos permiten definir una multi-función $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\longrightarrow cwk(X)$ por

$$F(z):=\begin{cases}\overline{\mathrm{aco}\{x_n:\ \pi_n(z)=1\}} & \text{si } z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\setminus\{\mathbf{0}\},\\ \{0\} & \text{si } z=\mathbf{0}:=(0,0,\ldots).\end{cases}$$

Comenzamos probando que F *no es integrable Birkhoff*. En efecto, para ello sólo necesitamos ver que la familia $\{\delta^*(x_n^*,F):n\in\mathbb{N}\}\subset W_F$ no tiene la propiedad de Bourgain (Corolario 4.3.4). Nótese que, para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos

$$\delta^*(x_n^*,F(z))=\sup\Big\{x_n^*(x):\ x\in\mathrm{aco}\{x_m:\ \pi_m(z)=1\}\Big\}=\pi_n(z)\quad\text{para todo } z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\setminus\{\mathbf{0}\}.$$

Por tanto, $\{\delta^*(x_n^*,F):n\in\mathbb{N}\}=\{\pi_n:n\in\mathbb{N}\}$ no tiene la propiedad de Bourgain (Lema 4.3.14).

Por otro lado, para demostrar que F *es integrable Pettis* sólo tenemos que comprobar que W_F es uniformemente integrable (Teorema 4.2.3). Como F es acotada, la familia W_F es uniformemente acotada y basta probar que $\delta^*(x^*,F)$ es medible para cada $x^*\in B_{X^*}$. Comenzamos con el siguiente caso particular.

Afirmación.- $\delta^*(x^*,F)$ es medible para cada $x^*\in\mathrm{span}\{x_n^*:n\in\mathbb{N}\}$. En efecto, fijamos un $x^*\in\mathrm{span}\{x_n^*:n\in\mathbb{N}\}$ y escribimos $x^*=\sum_{n=1}^N\alpha_n x_n^*$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$. Nótese que para cada $z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\setminus\{\mathbf{0}\}$ se tiene

$$\begin{aligned}\delta^*(x^*,F(z))&=\sup\Big\{x^*(x):\ x\in\mathrm{aco}\{x_m:\ \pi_m(z)=1\}\Big\}\\ &=\sup\Big\{\sum_{n=1}^N\sum_{\pi_m(z)=1}\alpha_n\lambda_m\delta_{n,m}:\ \sum_{\pi_m(z)=1}|\lambda_m|\le 1,\ \lambda_m=0 \text{ para todo } m \text{ salvo una cantidad finita}\Big\}\\ &=\sup\Big\{\sum_{\substack{n=1\\ \pi_n(z)=1}}^N\alpha_n\lambda_n:\ \sum_{\pi_m(z)=1}|\lambda_m|\le 1,\ \lambda_m=0 \text{ para todo } m \text{ salvo una cantidad finita}\Big\}.\end{aligned}$$

Es fácil ver ahora que

$$\delta^*(x^*,F(z))=\begin{cases}\max\{|\alpha_n|:\ 1\le n\le N,\ \pi_n(z)=1\} & \text{si } z\in A\\ 0 & \text{si } z\in\Omega\setminus A,\end{cases}$$

donde $A:=\bigcup_{n=1}^N\{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}:\pi_n(z)=1\}$. Por tanto, $\delta^*(x^*,F)$ es medible, como se quería demostrar.

Finalmente, fijamos un $x^*\in B_{X^*}$ arbitrario. Como $X^*=\overline{\mathrm{span}\{x_n^*:n\in\mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$, existe una sucesión (y_n^*) en $\mathrm{span}\{x_n^*:n\in\mathbb{N}\}$ que converge a x^* en norma y, en particular, en la topología de Mackey τ_M. Por tanto, para cada $z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tenemos $\lim_n\delta^*(y_n^*,F(z))=\delta^*(x^*,F(z))$. En virtud de la *Afirmación* anterior, $\delta^*(x^*,F)$ es medible. Esto completa la demostración. $\square$

Capítulo 5

Operadores absolutamente sumantes e integración vectorial

A lo largo de este capítulo X e Y son dos espacios de Banach y (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finito y completo.

Un operador $u : X \longrightarrow Y$ se dice *absolutamente sumante* si, para cada serie incondicionalmente convergente $\sum_n x_n$ en X, la serie $\sum_n u(x_n)$ es absolutamente convergente. Como los operadores absolutamente sumantes mejoran las propiedades de sumabilidad de las sucesiones, *"no es sorprendente que también mejoren la integrabilidad de las funciones vectoriales"*, [DJT95, p. 56]. Aparentemente, el primero en considerar este tipo de cuestiones fue Diestel [Die72], que probó el siguiente resultado. Escribimos $P_m(\mu,X)$ para denotar el espacio de las (clases de equivalencia escalar de) funciones fuertemente medibles e integrables Pettis de Ω en X.

Teorema 5.0.0 (Diestel). *Si un operador $u : X \longrightarrow Y$ es absolutamente sumante, entonces:*

(i) para cada función fuertemente medible e integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$, la composición $u\circ f$ es integrable Bochner;

(ii) la aplicación lineal

$$\tilde{u} : (P_m(\mu,X),\|\cdot\|_P) \longrightarrow (L^1(\mu,Y),\|\cdot\|_1), \quad f \mapsto u\circ f,$$

es continua.

Recíprocamente, si $\mu(\Omega) > 0$, μ no tiene átomos y $u : X \longrightarrow Y$ es un operador que satisface (i) y (ii), entonces u es absolutamente sumante.

Más adelante, Belanger y Dowling [BD88] demostraron que *si μ es perfecta, $u : X \longrightarrow Y$ es un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función acotada integrable Pettis, entonces $u\circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner*. Recientemente, Marraffa [Mar04] ha eliminado la hipótesis de acotación en el resultado anterior y ha probado el análogo del Teorema 5.0.0 para funciones integrables McShane definidas en un espacio de medida topológico de Radon y compacto. Cabe señalar aquí que Heiliö [Hei88] también estudió problemas similares en el contexto de las medidas de Baire en espacios de Banach.

En este capítulo pretendemos avanzar un poco más en el estudio de la composición de una función vectorial "integrable" con un operador absolutamente sumante. Nuestro análisis involucra clases especiales de espacios de Banach no separables, además de nociones como la estabilidad y la integrabilidad Birkhoff o McShane. Los resultados originales de este capítulo proceden de nuestro artículo [Roda].

5.1. Preliminares sobre operadores p-sumantes

El punto de partida de la teoría de los operadores p-sumantes se sitúa en el artículo pionero de Pietsch [Pie67] (aunque las raíces se remontan a algunos trabajos de Grothendieck de los años 50). En esta sección realizamos una breve introducción a esta clase de operadores y presentamos algunas de sus propiedades fundamentales, debidas en su mayoría al propio Pietsch. Nuestra referencia básica es el libro de Diestel, Jarchow y Tongue [DJT95].

Definición 5.1.1. *Sea $1 \leq p < +\infty$. Un operador $u : X \longrightarrow Y$ se dice p-sumante si existe una constante $C \geq 0$ tal que*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p\Big)^{1/p} \leq C \cdot \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p\Big)^{1/p} : \ x^* \in B_{X^*}\Big\}$$

para cada colección finita $x_1, \ldots, x_n \in X$. En tal caso, la menor constante $C \geq 0$ que cumple la desigualdad anterior se denota por $\pi_p(u)$.

Es bien conocido que la noción anterior coincide con la de operador absolutamente sumante cuando $p = 1$ (véase e.g. [DJT95, p. 34]).

Proposición 5.1.2. *Un operador $u : X \longrightarrow Y$ es absolutamente sumante si y sólo si es 1-sumante.*

Observación 5.1.3. Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\| \leq 2\pi_1(u) \cdot \sup\Big\{\Big\|\sum_{i \in S} x_i\Big\| : \ S \subset \{1, \ldots, n\}\Big\} \tag{5.1}$$

para cada colección finita $x_1, \ldots, x_n \in X$.

La siguiente proposición (véase e.g. [DJT95, 2.8]) relaciona los caracteres de p-sumabilidad y q-sumabilidad de un operador entre espacios de Banach.

Proposición 5.1.4. *Sean $1 \leq p < q < +\infty$. Entonces todo operador p-sumante $u : X \longrightarrow Y$ es q-sumante, con $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.*

A continuación presentamos dos resultados que muestran algunos ejemplos de operadores absolutamente sumantes de especial relevancia, véase e.g. [DJT95, 3.4] y [DJT95, 2.9 (b)].

Teorema 5.1.5 (Grothendieck). *Sean $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ dos espacios de medida (no necesariamente finita). Entonces todo operador $u : L^1(\mu_1) \longrightarrow L^2(\mu_2)$ es absolutamente sumante.*

Proposición 5.1.6. *Sean $1 \leq p < +\infty$, K un espacio topológico compacto Hausdorff y $\nu \in M^+(K)$. Consideramos el operador*

$$j_{p,\nu} : C(K) \longrightarrow L^p(\nu)$$

que envía cada función a su clase de equivalencia. Entonces $j_{p,\nu}$ es p-sumante.

El siguiente teorema (véase e.g. [DJT95, Theorem 2.13]), conocido habitualmente como *teorema de factorización* de Pietsch, nos dice que cualquier operador p-sumante "factoriza" a través de un operador de la forma $j_{p,\nu}$.

Dado un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$, escribimos i_K para denotar la inmersión isométrica lineal de X en $C(K)$ definida mediante $i_K(x)(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in K$.

Teorema 5.1.7 (Pietsch). *Sea $1 \leq p < +\infty$. Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador y $K \subset B_{X^*}$ un conjunto normante w^*-compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *u es p-sumante;*
(ii) *existen $\nu \in M^+(K)$, un subespacio cerrado Z de $L^p(\nu)$ y un operador $v : Z \longrightarrow Y$ tales que*
  - $j_{p,\nu}(i_K(X)) \subset Z$;
  - $v \circ j_{p,\nu} \circ i_K = u$.

Como consecuencia del teorema de factorización de Pietsch tenemos los siguientes corolarios, véase e.g. [DJT95, p. 48].

Corolario 5.1.8. *Sean $1 \leq p < +\infty$ y K un espacio topológico compacto Hausdorff. Un operador $u : C(K) \longrightarrow Y$ es p-sumante si y sólo si existen $\nu \in M^+(K)$ y un operador $v : L^p(\nu) \longrightarrow Y$ tales que $v \circ j_{p,\nu} = u$.*

Corolario 5.1.9. *Sea $K \subset B_{X^*}$ un conjunto normante w^*-compacto. Un operador $u : X \longrightarrow Y$ es 2-sumante si y sólo si existen $\nu \in M^+(K)$ y un operador $v : L^2(\nu) \longrightarrow Y$ tales que $v \circ j_{2,\nu} \circ i_K = u$.*

Finalizamos la sección con dos aplicaciones bien conocidas del teorema de factorización de Pietsch que serán fundamentales más adelante. El lector puede encontrar las demostraciones en [DJT95, 2.17] y [DJT95, 2.19], respectivamente.

Teorema 5.1.10. *Todo operador p-sumante $u : X \longrightarrow Y$ es débilmente compacto, i.e. $u(B_X)$ es débilmente relativamente compacto.*

Proposición 5.1.11. *Sea $u : X \longrightarrow Y$. Entonces u es p-sumante si y sólo si el segundo adjunto $u^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ es p-sumante.*

5.2. Equivalencia escalar con funciones integrables Bochner

El objetivo principal de esta sección es extender el resultado de Belanger y Dowling [BD88] mencionado en la introducción al caso de funciones integrables Dunford, sin suponer que μ es perfecta (Teorema 5.2.3). Como aplicación proporcionamos una respuesta afirmativa a un problema propuesto por Heiliö en [Hei88] (Proposición 5.2.5). Además, también estudiamos la continuidad del operador "composición" $f \mapsto u \circ f$ (Corolarios 5.2.7 y 5.2.8).

Comenzamos probando el siguiente lema elemental.

Lema 5.2.1. *Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Si $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida finitamente aditiva con rango acotado, entonces la composición $u \circ \nu$ es una medida finitamente aditiva con variación acotada.*

Demostración. Dada cualquier partición finita de Ω en Σ, digamos $\{E_1,\dots,E_n\}$, la desigualdad (5.1) nos permite deducir

$$\sum_{i=1}^{n}\|u\circ\nu(E_i)\| \leq 2\pi(u)\cdot\sup\left\{\left\|\sum_{i\in S}\nu(E_i)\right\| :\ S\subset\{1,\dots,n\}\right\}$$
$$\leq 2\pi(u)\cdot\sup\{\|\nu(A)\| :\ A\in\Sigma\} < +\infty.$$

Por tanto, $u\circ\nu$ tiene variación acotada. □

El siguiente resultado nos dice, en particular, que a la hora de estudiar la integrabilidad Bochner de la composición de una función integrable Dunford con un operador absolutamente sumante, basta analizar si dicha composición es fuertemente medible.

Lema 5.2.2 ([Roda]). *Sean $u: X\longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante, $f:\Omega\longrightarrow X$ una función integrable Dunford y $g:\Omega\longrightarrow Y$ una función escalarmente equivalente a $u\circ f$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) g es integrable Bochner;
(ii) g es fuertemente medible.

En particular, $u\circ f$ es integrable Bochner si y sólo si es fuertemente medible.

Demostración. Supongamos que g es fuertemente medible. Como f es integrable Dunford, la composición $u\circ f$ también lo es, con $\nu_{u\circ f} = u^{**}\circ\nu_f$. Por tanto, g es integrable Dunford y $\nu_g = \nu_{u\circ f} = u^{**}\circ\nu_f$. Por otra parte, u^{**} es absolutamente sumante (Proposición 5.1.11) y podemos aplicar el Lema 5.2.1 a ν_f y u^{**} para deducir que $u^{**}\circ\nu_f = \nu_g$ tiene variación acotada. En vista del Corolario 1.8.12, g es integrable Bochner, como se quería demostrar. □

Teorema 5.2.3 ([Roda]). *Sean $u: X\longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f:\Omega\longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Entonces $u\circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner $g:\Omega\longrightarrow Y$.*

Demostración. Como u es un operador débilmente compacto (Teorema 5.1.10), el espacio de Banach $\overline{u(X)}$ es débilmente compactamente generado y, en particular, compacto en medida con su topología débil (véase la Sección 1.4). Por tanto, la función escalarmente medible $u\circ f$ (que toma valores en $\overline{u(X)}$) es escalarmente equivalente a una función fuertemente medible $g:\Omega\longrightarrow Y$ (Corolario 1.7.12). El Lema 5.2.2 nos asegura ahora que g es integrable Bochner. □

Durante la revisión final de esta memoria, observamos que el Teorema 5.2.3 había sido demostrado anteriormente por Lewis [Lew] en un trabajo sin publicar.

A continuación mostramos una aplicación del Teorema 5.2.3 dentro del contexto de las medidas de Baire en espacios de Banach. En concreto, vamos a considerar la clase de las medidas débilmente sumables introducidas por Heiliö en [Hei88].

Definición 5.2.4 ([Hei88]). *Sea ϑ una medida no negativa y finita en* $\mathrm{Baire}(X,w)$*. Decimos que*

(i) *ϑ es débilmente sumable si la función "identidad" $I_X : X \longrightarrow X$ es integrable Dunford respecto de la completación de ϑ;*

(ii) *ϑ es absolutamente sumable si es débilmente sumable y existe una medida no negativa y finita $\tilde{\vartheta}$ en* $\mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$ *tal que*

- $\tilde{\vartheta}|_{\mathrm{Baire}(X,w)} = \vartheta$;
- *I_X es integrable Bochner respecto de la completación de $\tilde{\vartheta}$.*

Heiliö demostró en [Hei88, 8.2.4] que, dados un operador absolutamente sumante $u : X \longrightarrow Y$ y una medida (no negativa y finita) débilmente sumable ϑ en $\mathrm{Baire}(X,w)$, la medida imagen ϑu^{-1} inducida en $\mathrm{Baire}(Y,w)$ es absolutamente sumable *si I_X es integrable Pettis respecto de la completación de ϑ y su integral indefinida tiene rango relativamente compacto en norma*. En [Hei88, 8.2.5] se plantea la cuestión de si ocurre lo mismo para cualquier medida débilmente sumable. Ahora podemos proporcionar una respuesta afirmativa a dicha pregunta.

Proposición 5.2.5 ([Roda]). *Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y ϑ una medida no negativa y finita en* $\mathrm{Baire}(X,w)$*. Si ϑ es débilmente sumable, entonces la medida imagen ϑu^{-1} en* $\mathrm{Baire}(Y,w)$ *es absolutamente sumable.*

Demostración. Es claro que ϑu^{-1} es débilmente sumable. Escribimos (X,Σ,μ) para denotar la completación de $(X,\mathrm{Baire}(X,w),\vartheta)$. Aplicando el Teorema 5.2.3 a la función I_X y al operador u deducimos que $u = u \circ I_X$ es escalarmente equivalente (respecto de μ) a una función integrable Bochner $g : X \longrightarrow Y$. Como g es fuertemente medible, sabemos que g es Σ-$\mathrm{Borel}(Y,\|\cdot\|)$-medible y que existe un subespacio cerrado separable $Y_0 \subset Y$ tal que $\mu(g^{-1}(Y_0)) = 1$ (Teorema 1.7.8). Consideramos la medida imagen $\tilde{\vartheta} = \mu g^{-1}$ en $\mathrm{Borel}(Y,\|\cdot\|)$. En vista del teorema de medibilidad de Pettis 1.7.6, la función escalarmente medible I_Y es fuertemente medible respecto de la completación de $\tilde{\vartheta}$. Por otra parte, como u y g son escalarmente equivalentes (respecto de μ), tenemos la igualdad $\mu(u^{-1}(E)) = \mu(g^{-1}(E))$ para cada $E \in \mathrm{Baire}(Y,w)$ (Lema 1.7.10), es decir, $\tilde{\vartheta}|_{\mathrm{Baire}(Y,w)} = \vartheta u^{-1}$. Finalmente, utilizando un cambio de variable estándar deducimos

$$\int_Y \|I_Y\|\, d\tilde{\vartheta} = \int_X \|g\|\, d\mu < +\infty.$$

Por tanto, I_Y es integrable Bochner respecto de la completación de $\tilde{\vartheta}$ (Proposición 1.8.3). Esto demuestra que ϑu^{-1} es absolutamente sumable. $\square$

Vamos a finalizar la sección analizando la continuidad del operador "composición" $f \mapsto u \circ f$ inducido por un operador absolutamente sumante $u : X \longrightarrow Y$.

Escribimos $D(\mu,X)$ para denotar el espacio normado obtenido a partir de $(\mathscr{D}(\mu,X),\|\cdot\|_P)$ (el espacio de todas las funciones integrables Dunford de Ω en X, con la seminorma de Pettis) mediante el proceso de identificación usual:

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \|f-g\|_P = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ y } g \text{ son escalarmente equivalentes.}$$

Dada $f \in \mathscr{D}(\mu,X)$, escribimos $f^\bullet$ para denotar la clase de equivalencia de f en $D(\mu,X)$. Si $\mathscr{M}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{D}(\mu,X)$, utilizamos la notación $\mathscr{M}^\bullet$ para representar el subespacio vectorial de $D(\mu,X)$ formado por todas las clases de equivalencia de elementos de $\mathscr{M}$.

Como ya hemos mencionado en la Sección 3.4, los espacios normados $D(\mu,X)$ y $P_m(\mu,X)$ no son completos en general. Sin embargo, un resultado de Díaz, Fernández, Florencio y Paúl [DFFP95] afirma que dichos espacios siempre son ultrabornológicos y, en particular, tonelados. Por tanto, el "teorema de la gráfica cerrada" es válido para aplicaciones lineales definidas en $D(\mu,X)$ ó $P_m(\mu,X)$ con valores en un espacio de Banach (Teorema 3.4.2). El siguiente lema nos va a permitir aplicar dicho teorema al operador "composición" $f \mapsto u \circ f$.

Lema 5.2.6 ([Roda]). *Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador y $\mathscr{M}$ un subespacio vectorial de $\mathscr{D}(\mu,X)$ tal que, para cada $f \in \mathscr{M}$, la composición $u \circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner $u_f : \Omega \longrightarrow Y$. Consideramos la aplicación lineal*

$$\tilde{u}_{\mathscr{M}} : (\mathscr{M}^\bullet, \|\cdot\|_P) \longrightarrow (L^1(\mu,Y), \|\cdot\|_1)$$

que envía cada $f^\bullet \in \mathscr{M}^\bullet$ a la clase de equivalencia de u_f. Entonces $\tilde{u}_{\mathscr{M}}$ tiene gráfica cerrada.

Demostración. Sean $h_1, h_2 : \Omega \longrightarrow Y$ dos funciones fuertemente medibles y escalarmente equivalentes. Por el teorema de medibilidad de Pettis 1.7.6, existen $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ y un subespacio cerrado separable $Z \subset Y$ tales que $h_1(E) \cup h_2(E) \subset Z$. Como $h_1|_E$ y $h_2|_E$ son escalarmente equivalentes y (B_{Z^*}, w^*) es separable, se sigue que $h_1 = h_2$ μ-a.e. En vista de esto, la aplicación $\tilde{u}_{\mathscr{M}}$ está bien definida, no depende de la elección de las u_f's y es lineal.

Para ver que $\tilde{u}_{\mathscr{M}}$ tiene gráfica cerrada, fijamos una sucesión (f_n) en $\mathscr{M}$ tal que

- $\text{lím}_n \|f_n\|_P = 0$;
- existe una función integrable Bochner $h : \Omega \longrightarrow Y$ con $\text{lím}_n \|u_{f_n} - h\|_1 = 0$.

Pasando a una subsucesión apropiada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que (u_{f_n}) converge a h μ-a.e., véase e.g. [Din67, Proposition 14, p. 130]. Como h es fuertemente medible, para demostrar que $h = 0$ μ-a.e. basta comprobar que para cada $y^* \in Y^*$ tenemos $y^* \circ h = 0$ μ-a.e. Fijamos $y^* \in Y^*$. Como $\text{lím}_n \|f_n\|_P = 0$, se tiene

$$\text{lím}_n \int_\Omega |y^* \circ u_{f_n}| \, d\mu = \text{lím}_n \int_\Omega |y^* \circ u \circ f_n| \, d\mu = 0,$$

y el lema de Fatou nos asegura que $\int_\Omega |y^* \circ h| \, d\mu = 0$. Por tanto, $y^* \circ h = 0$ μ-a.e. Esto completa la demostración. □

Corolario 5.2.7 ([Roda]). *Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces la aplicación lineal*

$$\tilde{u}_{\mathscr{D}(\mu,X)} : (D(\mu,X), \|\cdot\|_P) \longrightarrow (L^1(\mu,Y), \|\cdot\|_1)$$

es continua.

La segunda parte del siguiente resultado fue probada por Diestel [Die72] utilizando la continuidad de $\tilde{u}_{\mathscr{P}_m(\mu,X)}$ (Teorema 5.0.0). Nosotros hemos optado por incluir una prueba más directa.

Corolario 5.2.8 ([Roda]). *Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach tal que $u \circ f$ es integrable Bochner para cada $f \in \mathscr{P}_m(\mu, X)$. Entonces la aplicación lineal*

$$\tilde{u}_{\mathscr{P}_m(\mu,X)} : (P_m(\mu,X), \|\cdot\|_P) \longrightarrow (L^1(\mu,Y), \|\cdot\|_1)$$

es continua. Si, además, $\mu(\Omega) > 0$ y μ no tiene átomos, entonces u es absolutamente sumante.

Demostración. Sólo nos queda demostrar la última afirmación. Supongamos que $\mu(\Omega) > 0$ y que μ no tiene átomos. Entonces podemos encontrar una sucesión disjunta (E_n) en Σ tal que $\mu(E_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijamos una sucesión (x_n) en X tal que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente. Definimos una función fuertemente medible $f : \Omega \longrightarrow X$ mediante

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(E_n)} x_n \chi_{E_n}.$$

Sabemos que f es integrable Pettis (véase la prueba del Corolario 1.8.8). Por tanto, la composición $u \circ f$ es integrable Bochner y, así, $\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\| = \int_{\Omega} \|u \circ f\| \, d\mu < +\infty$. Esto prueba que u es absolutamente sumante. $\square$

5.3. Integrabilidad Bochner de la composición

En esta sección estudiamos bajo qué condiciones la composición $u \circ f$ de una función integrable Dunford $f : \Omega \longrightarrow X$ con un operador absolutamente sumante $u : X \longrightarrow Y$ es *integrable Bochner*. Nótese que, en virtud del Lema 5.2.2, esto ocurre si (y sólo si) $u \circ f$ es fuertemente medible y, en particular, si $u(X)$ es separable (gracias al teorema de medibilidad de Pettis 1.7.6). Por tanto, es natural preguntarse cuándo un espacio de Banach X satisface que todo operador absolutamente sumante definido en X (con valores en cualquier otro espacio de Banach) tiene rango separable. Dedicamos el Apartado 5.3.1 a analizar esta cuestión, mostrando que una amplia clase de espacios de Banach (que incluye, por ejemplo, a los débilmente numerablemente $\mathscr{K}$-determinados y a los de Asplund) cumple dicha propiedad.

En el Apartado 5.3.2 aplicamos dentro de este contexto las técnicas de familias estables de funciones (en el sentido de Talagrand). Como consecuencia de nuestro resultado principal (Teorema 5.3.2), deducimos que $u \circ f$ *es integrable Bochner si la familia* $Z_f = \{x^* \circ f : x^* \in B_{X^*}\}$ *es estable*. En particular, la composición de una función integrable Birkhoff con un operador absolutamente sumante siempre es integrable Bochner.

El Apartado 5.3.3 se dedica a establecer la integrabilidad Bochner de la composición de un operador absolutamente sumante y una función *integrable McShane*, definida en un espacio de medida topológico quasi-Radon.

Finalmente, en el Apartado 5.3.4 incluimos un par de ejemplos que muestran que la composición de una función integrable Dunford con un operador absolutamente sumante no es integrable Bochner en general.

5.3.1. Operadores absolutamente sumantes con rango separable

La siguiente clase de espacios topológicos compactos aparece de manera natural al estudiar cuándo tienen rango separable todos los operadores absolutamente sumantes definidos en un espacio de Banach de la forma $C(K)$.

Definición 5.3.1 ([DK95]). *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Se dice que K pertenece a la clase MS si $L^1(\nu)$ es separable para cada $\nu \in M^+(K)$.*

Corolario 5.3.2. *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces K pertenece a la clase MS si y sólo si, para cada espacio de Banach Z, todo operador absolutamente sumante de $C(K)$ en Z tiene rango separable.*

Demostración. El *sólo si* es una consecuencia inmediata del Corolario 5.1.8. Para el recíproco basta tener en cuenta que el operador $j_{1,\nu} : C(K) \longrightarrow L^1(\nu)$ es absolutamente sumante (Proposición 5.1.6) y tiene rango denso, véase e.g. [Coh93, Proposition 7.4.2]. $\square$

La clase *MS* es cerrada para subespacios, productos contables (véase [DK95]) e imágenes continuas (como consecuencia de la Proposición 1.3.4), y contiene a los siguientes espacios:

(a) *Compactos metrizables*. En efecto, basta recordar que, dada una medida no negativa y finita definida en una σ-álgebra contablemente generada, el espacio L^1 asociado a dicha medida siempre es separable, véase e.g. [Coh93, Proposition 3.4.5].

(b) *Compactos de Corson con la propiedad (M)*. Necesitamos recordar el siguiente concepto.

Definición 5.3.3. *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Se dice que K tiene la propiedad (M) si $\mathrm{supp}(\nu)$ es separable para cada $\nu \in M^+(K)$.*

Por tanto, teniendo en cuenta (a) y el hecho elemental de que todo compacto de Corson separable es metrizable, es claro que *MS* contiene a todos los compactos de Corson con la propiedad (M). Recordamos que éstos son exactamente aquellos compactos de Corson K para los que $C(K)$ es WLD (equivalentemente, $C(K)$ es débilmente Lindelöf o tiene la propiedad (C)), véase [AMN88, Theorem 3.5]. En particular, todos los compactos de Gul'ko (e.g. compactos de Eberlein) pertenecen a *MS*.

(c) *Compactos de Rosenthal* (i.e. subconjuntos compactos de un espacio de funciones reales de la primera clase de Baire, definidas en un espacio polaco, con la topología de la convergencia puntual). El lector puede encontrar en [Tod99, Theorem 2] una prueba de este resultado de Bourgain.

(d) *Compactos linealmente ordenados*, véase [DK95, Theorem 1.0].

(e) *Compactos cero-dimensionales K tales que $C(K)$ es débilmente Lindelöf*, véase [FPRN01, Lemma 3.5].

(f) *Compactos de Radon-Nikodým*, como mostramos a continuación.

Lema 5.3.4 ([Roda]). *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Si K es de Radon-Nikodým, entonces K pertenece a la clase MS.*

Demostración. Denotamos por $\mathfrak{T}$ la topología original de K. Como K es de Radon-Nikodým, existe una métrica d en K inferiormente semicontinua, más fina que $\mathfrak{T}$, tal que K está *fragmentado* por d, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto (no vacío) $H \subset K$, existe un conjunto relativamente abierto (no vacío) de H con d-diámetro menor que ε (véase la Sección 1.4).

Fijamos $\nu \in M^+(K)$ y $n \in \mathbb{N}$. En virtud de un resultado de Jayne, Namioka y Rogers, [JNR90, Theorem 4.1], existe un conjunto d-compacto $F_n \subset K$ tal que $\nu(K \setminus F_n) \leq 1/n$. Como la topología inducida por d es más fina que $\mathfrak{T}$, el conjunto F_n es compacto y metrizable cuando se considera equipado con la restricción de $\mathfrak{T}$. Por tanto, $L^1(\nu_{F_n})$ es separable y, en consecuencia,

$$E_n := \{h\chi_{F_n} : \ h \in L^1(\nu)\}$$

es un subconjunto separable de $L^1(\nu)$. Se sigue que $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ es separable. Por otra parte, como $\lim_n \nu(K \setminus F_n) = 0$, el conjunto $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ es denso en $L^1(\nu)$ y, por tanto, $L^1(\nu)$ es separable. $\square$

Bajo axiomas adicionales de la teoría de conjuntos se pueden decir más cosas sobre la clase *MS*. Por ejemplo, Fremlin mostró en [Fre97] que, *asumiendo el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo*, un compacto K pertenece a la clase *MS* si (y sólo si) no existe una aplicación continua y suprayectiva de K en $[0,1]^{\omega_1}$. Por tanto, en esta axiomática, la clase *MS* contiene a todos los compactos con *"tightness" contable* (es decir, aquellos compactos K tales que, para cualesquiera $A \subset K$ y $t \in \overline{A}$, existe un conjunto contable $B \subset A$ tal que $t \in \overline{B}$) y, en particular, a todos los compactos angélicos, así como a todos los compactos K para los que $C(K)$ tiene la propiedad (C) (véase [Pol80]).

Por otra parte, *bajo la Hipótesis del Continuo*, existen compactos de Corson que no pertenecen a la clase *MS*, véase e.g. [Neg84, §5] (el compacto de Kunen-Haydon-Talagrand) y [AMN88, Section 3]. Para más información sobre medidas de Radon cuyo espacio L^1 es separable y cuestiones relacionadas, remitimos al lector a [AMN88, DK95, FPRN01, Fre97, KvM95, Ple02] y las referencias que allí se proporcionan.

A continuación introducimos la contrapartida de la clase *MS* en el marco de los espacios de Banach.

Definición 5.3.5 ([Roda]). *Decimos que un espacio de Banach Z pertenece a la clase $\mathscr{MS}$ si existe un espacio topológico compacto Hausdorff L en la clase MS tal que Z es isomorfo a un subespacio cerrado de $C(L)$.*

Teniendo en cuenta que todo espacio de Banach Z es isomorfo a un subespacio de $C(B_{Z^*})$, el ejemplo (b) garantiza que si Z es débilmente numerablemente $\mathscr{K}$-determinado (e.g. débilmente compactamente generado), entonces pertenece a la clase $\mathscr{MS}$ (porque, en este caso, (B_{Z^*}, w^*) es un compacto de Gul'ko, véase e.g. [Fab97, Theorem 7.1.9]). Por otra parte, en vista de (f) y el hecho de que (B_{Z^*}, w^*) es de Radon-Nikodým cuando Z es Asplund generado (véase la Sección 1.4), deducimos que todo subespacio cerrado de un espacio de Banach Asplund generado pertenece a $\mathscr{MS}$.

Vamos a concluir el apartado probando que todo operador absolutamente sumante definido en un espacio de Banach en la clase $\mathscr{MS}$ tiene rango separable. Para ello necesitamos la siguiente observación elemental.

Lema 5.3.6. *Sean L un espacio topológico compacto Hausdorff y Z un subespacio cerrado de $C(L)$. Entonces existen un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{Z^*}$ y una aplicación continua y suprayectiva de L en K.*

Demostración. Nótese que $B := \{\delta_t : t \in L\}$ es un subconjunto w^*-compacto de $B_{C(L)^*}$ que es homeomorfo a L. La aplicación "restricción" $r : B_{C(L)^*} \longrightarrow B_{Z^*}$ es w^*-w^*-continua y

$$K := r(B) = \{\delta_t|_Z : t \in L\} \subset B_{Z^*}$$

es un conjunto normante w^*-compacto. Por tanto, existe una aplicación continua y suprayectiva de L en K. La prueba ha finalizado. □

Corolario 5.3.7 ([Roda]). *Si X pertenece a la clase $\mathscr{MS}$, entonces cada operador absolutamente sumante definido en X con valores en otro espacio de Banach tiene rango separable.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es un subespacio cerrado de $C(L)$, donde L es un espacio topológico compacto Hausdorff en la clase MS. Por el Lema 5.3.6, existen un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ y una aplicación continua y suprayectiva de L en K. Como la clase MS es cerrada para imágenes continuas, K pertenece a MS. El resultado se sigue ahora del teorema de factorización de Pietsch 5.1.7. □

Corolario 5.3.8 ([Roda]). *Supongamos que X pertenece a la clase $\mathscr{MS}$. Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner para cada $f \in \mathscr{D}(\mu, X)$.*

5.3.2. Estabilidad y operadores absolutamente sumantes

Inspirados por algunas de las ideas de Belanger y Dowling [BD88], en el Teorema 5.3.9 vamos a aplicar los resultados de Talagrand que relacionan estabilidad y medibilidad conjunta (véase la Sección 1.9) para discutir la integrabilidad Bochner de la composición de una función vectorial con un operador absolutamente sumante.

Teorema 5.3.9 ([Roda]). *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Consideramos las siguientes afirmaciones:*

(i) Existe un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ tal que, para cada $\nu \in M^+(K)$, la familia $\{x^* \circ f : x^* \in \operatorname{supp}(\nu)\}$ es estable.

(ii) Existe un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ tal que, para cada $\nu \in M^+(K)$, la función

$$f_K : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_K(t, x^*) := (x^* \circ f)(t),$$

es $\mu \times \nu$-medible.

(iii) Para cada operador absolutamente sumante u definido en X con valores en otro espacio de Banach, la composición $u \circ f$ es integrable Bochner.

Entonces (i)⇒(ii)⇒(iii). Más todavía, bajo el Axioma L, todas estas condiciones son equivalentes si μ es perfecta (en tal caso, (i) y (ii) se cumplen para cualquier conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$).

Demostración. *(i)⇒(ii)* Fijamos $\nu \in M^+(K)$ y escribimos $F := \mathrm{supp}(\nu)$. Evidentemente, la restricción $f_K|_{\Omega\times F} : \Omega \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible en la primera variable y continua en la segunda. Además, la familia $\{f_K|_{\Omega\times F}(\cdot, x^*) : \ x^* \in F\} = \{x^* \circ f : \ x^* \in F\}$ es estable. Por el Teorema 1.9.5, $f_K|_{\Omega\times F}$ es $\mu \times \nu_F$-medible y, por tanto, f_K es $\mu \times \nu$-medible, como se quería demostrar.

(ii)⇒(iii) Fijamos un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ en las condiciones de *(ii)* y consideramos un operador absolutamente sumante $u : X \longrightarrow Y$. En vista del Lema 5.2.2, para demostrar que $u \circ f$ es integrable Bochner basta comprobar que $u \circ f$ es fuertemente medible.

El teorema de factorización de Pietsch 5.1.7 nos permite encontrar $\nu \in M^+(K)$, un subespacio cerrado $Z \subset L^1(\nu)$ y un operador $v : Z \longrightarrow Y$ tales que $j_{1,\nu}(i_K(X)) \subset Z$ y $u = v \circ j_{1,\nu} \circ i_K$. Escribimos $F := \mathrm{supp}(\nu)$ y consideramos

- el operador "restricción" $R : C(K) \longrightarrow C(F)$;
- un isomorfismo isométrico $I : L^1(\nu_F) \longrightarrow L^1(\nu)$ tal que $j_{1,\nu} = I \circ j_{1,\nu_F} \circ R$.

Evidentemente, la composición $g := R \circ i_K \circ f : \Omega \longrightarrow C(F)$ es integrable Pettis. Por tanto, $\nu_g(\Sigma)$ es débilmente relativamente compacto (Teoremas 1.8.7 y 1.6.6). Por otra parte, como F es el soporte de ν, un resultado de Rosenthal [Ros70], véase e.g. [Tal84, Theorem 12-1-5], asegura que todo subconjunto débilmente compacto de $C(F)$ es separable. Por tanto, $\nu_g(\Sigma)$ es separable y, en virtud del Teorema 1.8.14, existe una sucesión de funciones simples $s_n : \Omega \longrightarrow C(F)$ tal que

(α) $\{h \circ s_n : \ h \in B_{C(F)^*}, \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable;
(β) para cada $h \in C(F)^*$ tenemos $\lim_n h \circ s_n = h \circ g$ μ-a.e.

Definimos $g_n = g - s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que la familia $\mathscr{F} := \{\delta_{x^*} \circ g_n : \ x^* \in F, \ n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, como consecuencia de (α) y del hecho de que Z_g es uniformemente integrable (Corolario 1.9.3).

Como f_K es $\mu \times \nu$-medible, la restricción $f_K|_{\Omega\times F}$ es $\mu \times \nu_F$-medible. Por otra parte, dado $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que la función

$$\Omega \times F \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x^*) \mapsto (\delta_{x^*} \circ s_n)(t),$$

es $\mu \times \nu_F$-medible. Por tanto, lo mismo ocurre con la función

$$\Omega \times F \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x^*) \mapsto (\delta_{x^*} \circ g_n)(t) = f_K|_{\Omega\times F}(t, x^*) - (\delta_{x^*} \circ s_n)(t).$$

Como la familia $\mathscr{F}$ es $\|\cdot\|_1$-acotada, tenemos

$$\int_F \Big(\int_\Omega |(\delta_{x^*} \circ g_n)(t)| \, d\mu(t) \Big) \, d\nu(x^*) < +\infty$$

y podemos aplicar el teorema de Fubini para obtener

$$\int_F \Big(\int_\Omega |(\delta_{x^*} \circ g_n)(t)| \, d\mu(t) \Big) \, d\nu(x^*) = \int_\Omega \Big(\int_F |(\delta_{x^*} \circ g_n)(t)| \, d\nu(x^*) \Big) \, d\mu(t) \tag{5.2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $G_n \in \mathscr{L}^1(\nu_F)$ mediante $G_n(x^*) = \int_\Omega |(\delta_{x^*} \circ g_n)(t)| \, d\mu(t)$. Como

- $\mathscr{F}$ es uniformemente integrable y

- para cada $x^* \in F$ se tiene $\lim_n \delta_{x^*} \circ g_n = 0$ μ-a.e. (por (β)),

el teorema de convergencia de Vitali asegura que (G_n) converge puntualmente a 0. Aplicando ahora el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue a la sucesión uniformemente acotada (G_n), deducimos que $\lim_n \|G_n\|_1 = 0$. La igualdad (5.2) nos permite concluir

$$\lim_n \int_\Omega \left(\int_F |(\delta_{x^*} \circ g_n)(t)| \, d\nu(x^*) \right) d\mu(t) = 0.$$

Por tanto, la sucesión (H_n) en $\mathscr{L}^1(\mu)$ definida por $H_n(t) = \int_F |(\delta_{x^*} \circ g_n)(t)| \, d\nu(x^*)$ converge a 0 en la norma $\|\cdot\|_1$ y, en particular, existe a subsucesión (H_{n_k}) que converge a 0 μ-a.e.

Consideramos el operador $Q := I \circ j_{1,\nu_F} : C(F) \longrightarrow L^1(\nu)$. Nótese que

$$\|(Q \circ g_{n_k})(t)\| = \int_F |(\delta_{x^*} \circ g_{n_k})(t)| \, d\nu(x^*) = H_{n_k}(t) \quad \text{para todo } t \in \Omega \text{ y todo } k \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que $\lim_k \|Q \circ s_{n_k} - Q \circ g\| = 0$ μ-a.e. y, por tanto, $Q \circ g$ es fuertemente medible. Como $Q \circ g$ toma valores en Z, la composición $u \circ f = v \circ Q \circ g$ también es fuertemente medible. La prueba de *(ii)*$\Rightarrow$*(iii)* ha finalizado.

Finalmente, supongamos que f satisface la condición *(iii)*. Fijamos *cualquier* conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ y tomamos $\nu \in M^+(K)$. Definimos $F := \mathrm{supp}(\nu)$ y consideramos el operador “restricción” $R : C(K) \longrightarrow C(F)$. La composición $j_{1,\nu_F} \circ R \circ i_K$ es absolutamente sumante, luego $g := j_{1,\nu_F} \circ R \circ i_K \circ f : \Omega \longrightarrow L^1(\nu_F)$ es fuertemente medible. Si, además, μ es perfecta y suponemos que se cumple el Axioma L, entonces podemos aplicar el criterio del Teorema 1.9.6 a $f_K|_{\Omega \times F}$, deduciendo que la familia $\{x^* \circ f : x^* \in F\}$ es estable. Esto completa la demostración. $\square$

Corolario 5.3.10 ([Roda]). *Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función.*

(i) Si Z_f es estable, entonces $u \circ f$ es fuertemente medible.
(ii) Si Z_f es estable y f es integrable Dunford, entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.

Demostración. Supongamos que Z_f es estable. La medibilidad escalar de f asegura la existencia de una función medible $h : \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ de manera que, para cada $x^* \in B_{X^*}$, se tiene $|x^* \circ f| \leq h$ μ-a.e. (Lema 1.8.9). Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos $A_n = \{t \in \Omega : n-1 \leq h(t) < n\} \in \Sigma$. Entonces la familia $Z_{f|_{A_n}}$ es estable y uniformemente integrable, luego $f|_{A_n}$ es integrable Pettis (Teorema 1.9.4). En virtud del Teorema 5.3.9, la composición $u \circ f|_{A_n}$ es fuertemente medible. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, $u \circ f$ *es fuertemente medible*. Si, además, f es integrable Dunford, el Lema 5.2.2 nos permite deducir que $u \circ f$ es integrable Bochner. $\square$

Corolario 5.3.11 ([Roda]). *Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Talagrand. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.*

Ya hemos mencionado (Sección 1.9) que, bajo el Axioma L y para μ perfecta, toda familia contable y $\mathfrak{T}_p$-relativamente compacta de funciones medibles $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ es estable. Combinando este hecho con el Corolario 5.3.10, deducimos el siguiente

Corolario 5.3.12 ([Roda]). *(Axioma L) Supongamos que μ es perfecta y que (B_{X^*}, w^*) es separable. Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner para cada $f \in \mathscr{D}(\mu, X)$.*

En la Proposición 5.3.14 aislamos otra aplicación del Teorema 5.3.9. Para la prueba necesitamos el siguiente resultado de Pol [Pol80] (véase e.g. [FHH$^+$01, Exercise 12.31]).

Lema 5.3.13 (Pol). *Sea L un espacio topológico compacto Hausdorff. Si $C(L)$ tiene la propiedad (C), entonces L tiene la propiedad (M).*

Demostración. Fijamos $\nu \in M^+(L)$ y $n \in \mathbb{N}$. Dado $t \in \operatorname{supp}(\nu)$, definimos

$$C_t^n = \Big\{ h \in C(L) : \int_L h \, d\nu \geq \frac{1}{n} \text{ y } h(t) = 0 \Big\}.$$

Evidentemente, cada C_t^n es convexo y cerrado. Como $\bigcap_{t \in \operatorname{supp}(\nu)} C_t^n = \emptyset$, existe un subconjunto contable $F_n \subset \operatorname{supp}(\nu)$ tal que $\bigcap_{t \in F_n} C_t^n = \emptyset$.

Se afirma que $\operatorname{supp}(\nu) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty F_n}$. En efecto, fijamos $t_0 \in L \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^\infty F_n}$. Utilizando el lema de Urysohn podemos encontrar una función continua $h : L \longrightarrow [0,1]$ tal que $h(t_0) = 1$ y $h(t) = 0$ para todo $t \in \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\bigcap_{t \in F_n} C_t^n = \emptyset$, luego $\int_L h \, d\nu < 1/n$. Deducimos que $\int_L h \, d\nu = 0$, es decir, $\nu(\{t \in L : h(t) > 0\}) = 0$. Por tanto, $\operatorname{supp}(\nu) \subset \{t \in L : h(t) = 0\}$, luego t_0 no pertenece a $\operatorname{supp}(\nu)$. Esto demuestra que $\operatorname{supp}(\nu) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty F_n}$ y, así, $\operatorname{supp}(\nu)$ es separable. □

Proposición 5.3.14 ([Roda]). *Sea L un espacio topológico compacto Hausdorff tal que $C(L)$ es débilmente Lindelöf. Supongamos que X es isomorfo a un subespacio cerrado de $C(L)$. Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner para cada $f \in \mathscr{D}(\mu, X)$.*

Demostración. Obviamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es un subespacio cerrado de $C(L)$. El Lema 5.3.6 nos permite encontrar un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ y una aplicación continua suprayectiva de L en K. Como $C(K)$ es isomorfo a un subespacio cerrado de $C(L)$, deducimos que $C(K)$ también tiene la propiedad (C) y, por tanto, K tiene la propiedad (M) (Lema 5.3.13).

Fijamos $f \in \mathscr{D}(\mu, X)$. Como $C(L)$ es débilmente Lindelöf, X también lo es y, en consecuencia, (X, w) es compacto en medida. Por tanto, la función escalarmente medible f es escalarmente equivalente a una función fuertemente medible $h : \Omega \longrightarrow X$ (Corolario 1.7.12). Por el Lema 5.2.2, la composición $u \circ h$ es integrable Bochner. Para finalizar la prueba basta comprobar que $u \circ (f - h)$ es integrable Bochner. Definimos $h' = f - h : \Omega \longrightarrow X$ y observamos que cada subconjunto contable de $Z_{h'}$ es estable (porque h' es escalarmente nula). Como la estabilidad se conserva al tomar $\mathfrak{T}_p$-clausuras y K tiene propiedad (M), se sigue que h' satisface la condición *(i)* del Teorema 5.3.9 y, por tanto, $u \circ h'$ es integrable Bochner. La prueba ha finalizado. □

Ya sabemos que la familia Z_f asociada a una función integrable Birkhoff $f : \Omega \longrightarrow X$ es estable (Proposiciones 2.2.5 y 2.3.1). Por tanto, en virtud del Corolario 5.3.10, para cualquier operador absolutamente sumante $u : X \longrightarrow Y$, la composición $u \circ f$ es integrable Bochner. A continuación incluimos una prueba directa y más elemental de este hecho.

Proposición 5.3.15 ([Roda]). *Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Birkhoff. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.*

Demostración. Por el Lema 5.2.2, basta comprobar que $u \circ f$ es fuertemente medible. Para ello vamos a aplicar el criterio del Lema 1.7.4. Fijamos $\varepsilon > 0$ y $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$. Como la restricción $f|_A$ es integrable Birkhoff, existe una partición contable (A_n) de A en Σ_A tal que

$$2\pi_1(u) \cdot \left\| \sum_{n=1}^{m} \left(\mu(A_n) f(t_n) - \mu(A_n) f(t'_n) \right) \right\| < \frac{\mu(A)}{2} \cdot \varepsilon$$

para cualesquiera elecciones $t_n, t'_n \in A_n$ y cada $m \in \mathbb{N}$. La desigualdad (5.1) (página 192) nos asegura que

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) \|(u \circ f)(t_n) - (u \circ f)(t'_n)\| < \frac{\mu(A)}{2} \cdot \varepsilon$$

para cualesquiera elecciones $t_n, t'_n \in A_n$ y cada $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, existe algún A_n con $\mu(A_n) > 0$ para el que $\operatorname{osc}(u \circ f|_{A_n}) \leq \varepsilon$. Esto completa la demostración. □

5.3.3. El caso de las funciones integrables McShane

La *integral de McShane variacional*, definida a continuación, aparece de modo natural a la hora de estudiar la composición de una función integrable McShane con un operador absolutamente sumante. *A lo largo de esta sección $(T, \mathfrak{T}, \mathscr{S}, \theta)$ es un espacio de medida topológico quasi-Radon.*

Definición 5.3.16 ([DPM01]). *Una función $f : T \longrightarrow X$ es integrable McShane variacionalmente si es integrable Pettis y para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre δ en $(T, \mathfrak{T})$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\theta(E_i) f(s_i) - \nu_f(E_i)\| \leq \varepsilon$$

para cada partición de McShane $\{(E_i, s_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de T subordinada a δ.

Esta noción de integrabilidad ha sido ampliamente estudiada en [DPM01], donde se prueba que, para una función $f : T \longrightarrow X$, se tiene:

f integrable Bochner $\Rightarrow$ f integrable McShane variacionalmente

$\Rightarrow$ f fuertemente medible e integrable Pettis.

Los recíprocos no son ciertos en general, aunque integrabilidad Bochner e integrabilidad McShane variacional coinciden cuando $(T, \mathfrak{T})$ es compacto, véase [DPM01].

Para la conveniencia del lector, a continuación incluimos una prueba de que toda función integrable McShane variacionalmente es fuertemente medible. Este hecho va a jugar un papel fundamental para demostrar que la composición de una función integrable McShane con un operador absolutamente sumante siempre es integrable Bochner (Proposición 5.3.18).

Lema 5.3.17 (Di Piazza-Musial). *Sea $f : T \longrightarrow X$ una función integrable McShane variacionalmente. Entonces f es fuertemente medible.*

Demostración. Como f es integrable McShane, $\nu_f(\mathscr{S})$ es relativamente compacto en norma (Corolario 3.3.23) y, por tanto, $H = \overline{\mathrm{span}(\nu_f(\mathscr{S}))}$ es un subespacio cerrado *separable* de X. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos

$$A_n = \Big\{ t \in T : \inf_{x \in H} \| f(t) - x \| \geq \frac{1}{n} \Big\}.$$

Consideramos el espacio de medida topológico quasi-Radon $(A_n, \mathfrak{T}|_{A_n}, \mathscr{S}_{A_n}, \theta_{A_n})$ y fijamos $B_n \in \mathscr{S}$ tal que $A_n \subset B_n$ y $\theta^*(A_n) = \theta(B_n)$. No es difícil comprobar que la restricción $f|_{A_n}$ es integrable McShane variacionalmente respecto de θ_{A_n}, con $\nu_{f|_{A_n}}(E \cap A_n) = \nu_f(E \cap B_n)$ para cada $E \in \mathscr{S}$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar una partición de McShane $\{(E_i, s_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de A_n tal que

$$\sum_{\theta_{A_n}(E_i)>0} \theta_{A_n}(E_i) \Big\| f(s_i) - \frac{\nu_{f|_{A_n}}(E_i)}{\theta_{A_n}(E_i)} \Big\| \leq \varepsilon.$$

Teniendo en cuenta que $\nu_{f|_{A_n}}(E_i) \in H$ para cada $i \in \mathbb{N}$, la definición de A_n y la anterior desigualdad nos permiten concluir que $\theta^*(A_n)/n \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\theta^*(A_n) = 0$.

Se sigue que $\theta^*(\{t \in T : f(t) \notin H\}) = \theta^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. El teorema de medibilidad de Pettis 1.7.6 nos asegura ahora que f es fuertemente medible, como se quería demostrar. □

Proposición 5.3.18 ([Roda]). *Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : T \longrightarrow X$ una función integrable McShane. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.*

Demostración. Vamos a demostrar que $u \circ f$ es integrable McShane variacionalmente. En efecto, por un lado, $u \circ f$ es integrable McShane y, en particular, integrable Pettis. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, el lema de Henstock-Saks, véase [Fre95, 2B], asegura la existencia de un calibre δ en $(T, \mathfrak{T})$ tal que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{q} \big(\theta(F_i) f(t_i) - \nu_f(F_i)\big) \Big\| \leq \varepsilon$$

para cada partición parcial de McShane $\{(F_i, t_i) : 1 \leq i \leq q\}$ de T subordinada a δ. Utilizando la desigualdad (5.1) (página 192) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{p} \Big\| \theta(E_i)(u \circ f)(s_i) - \nu_{u \circ f}(E_i) \Big\| = \sum_{i=1}^{p} \Big\| u\big(\theta(E_i) f(s_i) - \nu_f(E_i)\big) \Big\| \leq 2\pi_1(u) \cdot \varepsilon$$

para cada partición parcial de McShane $\{(E_i, s_i) : 1 \leq i \leq p\}$ de T subordinada a δ. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $u \circ f$ es integrable McShane variacionalmente y, en particular, fuertemente medible (Lema 5.3.17). El Lema 5.2.2 nos permite deducir ahora que $u \circ f$ es integrable Bochner. □

Como ya hemos comentado en el Apartado 3.3.3, Fremlin demostró en [Fre95, 3C] que si $f : T \longrightarrow X$ es una función integrable McShane, entonces cualquier subconjunto contable de Z_f es estable. Combinando la Proposición 5.3.18 con el Teorema 5.3.9 podemos deducir la siguiente extensión de dicho resultado.

Corolario 5.3.19 ([Roda]). *(Axioma L) Supongamos que μ es perfecta. Sea $f : T \longrightarrow X$ una función integrable McShane. Entonces, para cada $\nu \in M^+(B_{X^*})$, la familia $\{x^* \circ f : x^* \in \mathrm{supp}(\nu)\}$ es estable.*

Finalizamos el apartado con una aplicación del teorema de Di Piazza y Preiss [DPP03] (Teorema 3.3.4) sobre la coincidencia de las integrales de Pettis y McShane para funciones con valores en espacios de Banach super-reflexivos.

Proposición 5.3.20 ([Roda]). *Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces $u \circ f$ es integrable McShane para cada $f \in \mathscr{D}(\theta, X)$.*

Demostración. Fijamos una función integrable Dunford $f : T \longrightarrow X$. Como u es absolutamente sumante, u también es 2-sumante (Proposición 5.1.4) y, por tanto, existen $\nu \in M^+(B_{X^*})$ y un operador $v : L^2(\nu) \longrightarrow Y$ tales que $u = v \circ j_{2,\nu} \circ i_{B_{X^*}}$ (Corolario 5.1.9). La composición $j_{2,\nu} \circ i_{B_{X^*}} \circ f$ es integrable Dunford. Como $L^2(\nu)$ es reflexivo, $j_{2,\nu} \circ i_{B_{X^*}} \circ f$ es, de hecho, integrable Pettis. Por el Teorema 3.3.4, $j_{2,\nu} \circ i_{B_{X^*}} \circ f$ es integrable McShane y, por tanto, lo mismo ocurre con $u \circ f$, como se quería demostrar. $\square$

5.3.4. Ejemplos

Vamos a concluir el capítulo con dos ejemplos que dejan claro que, *en general, la composición de una función integrable Dunford con un operador absolutamente sumante no es integrable Bochner*.

El primer ejemplo se apoya en una función (construida por Fremlin y Talagrand en [FT79]) integrable Pettis cuya integral indefinida no tiene rango relativamente compacto en norma. Antes necesitamos recordar la definición del llamado *espacio de medida de Talagrand* [Tal80], que vamos a denotar por $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma_T, \mu_T)$. Para un estudio completo de este espacio, remitimos al lector a [Fre03, §464] y [Tal84, Chapter 13]. Identificamos $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mediante la biyección $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada por $\psi((a_n)) := \{n \in \mathbb{N} : \ a_n = 1\}$. La σ-álgebra Σ_T contiene a $\mathscr{L}_1$ y está formada por todos los conjuntos $A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ para los que existen un $B \in \mathscr{L}_1$ y un filtro no principal y no medible $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tales que $\psi(A) \cap \mathscr{F} = \psi(B) \cap \mathscr{F}$. La medida μ_T es la única extensión de λ_1 a Σ_T que cumple $\mu_T(A) = \lambda_1(B)$ para cualesquiera $A \in \Sigma_T$ y $B \in \mathscr{L}_1$ tales que existe un filtro no principal y no medible $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ de manera que $\psi(A) \cap \mathscr{F} = \psi(B) \cap \mathscr{F}$. Nótese que μ_T es completa y que $\psi^{-1}(\mathscr{U}) \in \Sigma_T$ para cada ultrafiltro no principal $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

El siguiente lema (véase [FT79, 1J]) se puede aplicar, por ejemplo, a la medida finitamente aditiva $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\vartheta(a) = \lim_n \frac{\#(\{m \in a : \ m \leq n\})}{n},$$

véase e.g. [Fre03, 464J(b)].

Lema 5.3.21 (Fremlin-Talagrand). *Sea $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ una medida finitamente aditiva con las siguientes propiedades:*

- *la composición $\vartheta \circ \psi$ es $\mathscr{L}_1$-medible;*
- *$\vartheta(P) = 0$ para cada conjunto finito $P \subset \mathbb{N}$.*

Entonces, para cada $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, se tiene

$$\vartheta(\psi(\cdot) \cap \psi(b)) = \frac{\vartheta(\psi(b))}{2} \quad \lambda_1\text{-a.e.}$$

Ejemplo 5.3.22 ([Roda]). *Existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ), una función integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow \ell^\infty$ y un operador absolutamente sumante u definido en ℓ^∞ con valores en otro espacio de Banach, tales que la composición $u \circ f$ no es integrable Bochner.*

Demostración. Sea (Ω, Σ, μ) la completación del espacio de probabilidad producto

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma_T \otimes \Sigma_T, \mu_T \times \mu_T).$$

Fremlin y Talagrand [FT79] (véase e.g. [Tal84, Theorem 4-2-5]) mostraron que la función

$$f : \Omega \longrightarrow \ell^\infty, \quad f((a_n),(b_n)) := (a_n - b_n),$$

es integrable Pettis respecto de μ.

Fijamos cualquier medida finitamente aditiva $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ con las propiedades mencionadas en el Lema 5.3.21 y tal que $\vartheta(\mathbb{N}) = 1$. Denotamos por $\beta\mathbb{N}$ la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$ (equipado con la topología discreta) e identificamos $C(\beta\mathbb{N})$ y ℓ_∞ de la manera habitual, es decir, mediante el siguiente isomorfismo isométrico:

$$\phi : C(\beta\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_\infty, \quad \phi(h) = (h(1), h(2), \ldots).$$

Sea ν el único elemento de $M^+(\beta\mathbb{N})$ tal que $\int_{\beta\mathbb{N}} \phi^{-1}(a)\, d\nu = \vartheta(\psi(a))$ para cada $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Consideramos el operador absolutamente sumante $u = j_{1,\nu} \circ \phi^{-1} : \ell^\infty \longrightarrow L^1(\nu)$. Vamos a demostrar que *la composición $u \circ f$ no es fuertemente medible respecto de μ*. Fijamos $A \in \Sigma_T \otimes \Sigma_T$ con $(\mu_T \times \mu_T)(A) = 1$. Entonces existe un $d \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mu_T(A^d) = 1$, donde

$$A^d = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \ (a,d) \in A\}.$$

En vista de la definición de μ_T, existen $B \in \mathscr{L}_1$ y un filtro no principal y no medible $\mathscr{F} \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tales que $\psi(A^d) \cap \mathscr{F} = \psi(B) \cap \mathscr{F}$ y $\lambda_1(B) = \mu_T(A^d) = 1$. Nótese que $\lambda_1^*(B \cap \psi^{-1}(\mathscr{F})) = 1$, ya que $\lambda_1^*(\psi^{-1}(\mathscr{F})) = 1$ (véase la Sección 1.1).

Afirmación.- Existe un conjunto $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset B \cap \psi^{-1}(\mathscr{F})$ tal que

$$\vartheta\Big(\bigcap_{\alpha \in I} \psi(a_\alpha)\Big) = \frac{1}{2^{\#(I)}} \quad \text{para cada conjunto (no vacío) finito } I \subset \omega_1. \tag{5.3}$$

En efecto, procedemos por inducción transfinita. Supongamos que $\beta < \omega_1$ y que ya hemos construido un conjunto $\{a_\alpha : \alpha < \beta\} \subset B \cap \psi^{-1}(\mathscr{F})$ tal que $\vartheta(\bigcap_{\alpha\in I}\psi(a_\alpha)) = 2^{-\#(I)}$ para cada conjunto (no vacío) finito $I \subset \beta$. Escribimos $\mathscr{W}$ para denotar la familia de todos los subconjuntos (no vacíos) finitos de β. Dado $I \in \mathscr{W}$, el Lema 5.3.21 nos permite encontrar $E_I \in \mathscr{L}_1$ con $\lambda_1(E_I) = 1$ tal que

$$\vartheta\Big(\psi(a) \cap \bigcap_{\alpha\in I}\psi(a_\alpha)\Big) = \frac{1}{2}\cdot\vartheta\Big(\bigcap_{\alpha\in I}\psi(a_\alpha)\Big) = \frac{1}{2^{\#(I)+1}} \quad \text{y} \quad \vartheta(\psi(a)) = \frac{1}{2}$$

para todo $a \in E_I$. Como $\mathscr{W}$ es contable (porque $\beta < \omega_1$), el conjunto $\bigcap_{I\in\mathscr{W}} E_I$ pertenece a $\mathscr{L}_1$ y $\lambda_1(\bigcap_{I\in\mathscr{W}} E_I) = 1$. Teniendo en cuenta que $\lambda_1^*(B \cap \psi^{-1}(\mathscr{F})) = 1$, deducimos que

$$B \cap \psi^{-1}(\mathscr{F}) \cap \bigcap_{I\in\mathscr{W}} E_I \neq \emptyset.$$

Tomamos un $a_\beta \in B \cap \psi^{-1}(\mathscr{F}) \cap \bigcap_{I\in\mathscr{W}} E_I \neq \emptyset$. Es claro que a_β cumple las propiedades deseadas y la prueba de la *Afirmación* ha finalizado.

Finalmente, dados $\alpha, \beta < \omega_1$, $\alpha \neq \beta$, tenemos $(a_\alpha, d), (a_\beta, d) \in A$ y la igualdad (5.3) asegura que

$$\begin{aligned}
\|(u\circ f)(a_\alpha, d) - (u\circ f)(a_\beta, d)\| &= \int_{\beta\mathbb{N}} |\phi^{-1}(a_\alpha - d) - \phi^{-1}(a_\beta - d)|\, d\nu \\
= \int_{\beta\mathbb{N}} |\phi^{-1}(a_\alpha - a_\beta)|\, d\nu &= \int_{\beta\mathbb{N}} \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(\psi(a_\alpha)\triangle\psi(a_\beta))\big)\, d\nu = \vartheta(\psi(a_\alpha)\triangle\psi(a_\beta)) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $(u\circ f)(A)$ no es separable. Como A ha sido escogido arbitrariamente entre todos los elementos de $\Sigma_T \otimes \Sigma_T$ de medida 1, se sigue que $u\circ f$ no es fuertemente medible respecto de μ. □

El segundo ejemplo está basado en una función que no es integrable Pettis y se construye suponiendo la existencia de un cardinal que no es de medida cero.

Ejemplo 5.3.23 ([Roda]). *Supongamos que existe un cardinal κ que no es de medida cero. Entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ), una función integrable Dunford $f : \Omega \longrightarrow \ell^1(\kappa)$ y un operador absolutamente sumante $u : \ell^1(\kappa) \longrightarrow \ell^2(\kappa)$, tales que la composición $u\circ f$ no es integrable Bochner.*

Demostración. Tomamos una medida de probabilidad μ en $\mathscr{P}(\kappa)$ tal que $\mu(\{\alpha\}) = 0$ para cada $\alpha < \kappa$. Definimos $f : \kappa \longrightarrow \ell^1(\kappa)$ por $f(\alpha) = e_\alpha$. Claramente, f es acotada y escalarmente medible, luego integrable Dunford. Por otro lado, el operador “identidad” $u : \ell^1(\kappa) \longrightarrow \ell^2(\kappa)$ es absolutamente sumante (Teorema 5.1.5)

Finalmente, nótese que $\|(u\circ f)(\alpha) - (u\circ f)(\beta)\| = \sqrt{2}$ para cualesquiera $\alpha, \beta < \kappa$ distintos. Por tanto, para cada $A \subset \kappa$ con $\mu(A) > 0$, el conjunto $(u\circ f)(A)$ no es separable (porque A no es contable). Se sigue que $u\circ f$ no es fuertemente medible. Esto completa la prueba. □

Observación 5.3.24. La función f construida en la prueba del ejemplo anterior *no* es integrable Pettis. En efecto, para cada $\alpha < \kappa$, escribimos e'_α para denotar el elemento de $\ell_\infty(\kappa)$ dado por

$e'_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\nu_f(\kappa) \in \ell^1(\kappa)$. Entonces existe un $E \subset \kappa$ contable tal que $\langle \nu_f(\kappa), e'_\alpha \rangle = 0$ para todo $\alpha \in \kappa \setminus E$. Nótese que

$$\mu(\kappa \setminus E) = \int_\kappa \chi_{\kappa \setminus E} \, d\mu = \int_\kappa \langle \chi_{\kappa \setminus E}, f \rangle \, d\mu = \langle \nu_f(\kappa), \chi_{\kappa \setminus E} \rangle = \sum_{\alpha \in E} \langle \nu_f(\kappa), e'_\alpha \rangle \cdot \chi_{\kappa \setminus E}(\alpha) = 0.$$

Como E es contable, obtenemos $\mu(\kappa) = \mu(\kappa \setminus E) = 0$, una contradicción.

Bibliografía

[AF90] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Systems & Control: Foundations & Applications, vol. 2, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. MR 1048347 (91d:49001)

[AMN88] S. Argyros, S. Mercourakis, and S. Negrepontis, *Functional-analytic properties of Corson-compact spaces*, Studia Math. **89** (1988), no. 3, 197–229. MR 956239 (90e:46020)

[Amr98] A. Amrani, *Lemme de Fatou pour l'intégrale de Pettis*, Publ. Mat. **42** (1998), no. 1, 67–79. MR 1628138 (99h:28027)

[And85] K. T. Andrews, *Universal Pettis integrability*, Canad. J. Math. **37** (1985), no. 1, 141–159. MR 777045 (86j:46040)

[Aum65] R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 1–12. MR 0185073 (32 #2543)

[Bar56] R. G. Bartle, *A general bilinear vector integral*, Studia Math. **15** (1956), 337–352. MR 0080721 (18,289a)

[BD88] A. Belanger and P. N. Dowling, *Two remarks on absolutely summing operators*, Math. Nachr. **136** (1988), 229–232. MR 952474 (89g:47024)

[BDPM00] B. Bongiorno, L. Di Piazza, and K. Musiał, *An alternate approach to the McShane integral*, Real Anal. Exchange **25** (1999/00), no. 2, 829–848. MR 1778536 (2001h:28012)

[BDS55] R. G. Bartle, N. Dunford, and J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. **7** (1955), 289–305. MR 0070050 (16,1123c)

[BFT78] J. Bourgain, D. H. Fremlin, and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), no. 4, 845–886. MR 509077 (80b:54017)

[BH98] A. Barbati and C. Hess, *The largest class of closed convex valued multifunctions for which Effros measurability and scalar measurability coincide*, Set-Valued Anal. **6** (1998), no. 3, 209–236. MR 1669791 (2000b:26033)

[Bir35] G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 2, 357–378. MR 1501815

[Boc33] S. Bochner, *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fund. Math. **20** (1933), 262–270.

[Bou] J. Bourgain, *Martingales in conjugate Banach spaces*, (unpublished).

[Bou83] R. D. Bourgin, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodým property*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 993, Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR 704815 (85d:46023)

[BP58] C. Bessaga and A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. **17** (1958), 151–164. MR 0115069 (22 #5872)

[Byr78] C. L. Byrne, *Remarks on the set-valued integrals of Debreu and Aumann*, J. Math. Anal. Appl. **62** (1978), no. 2, 243–246. MR 485918 (80a:28006)

[CB87] P. Pérez Carreras and J. Bonet, *Barrelled locally convex spaces*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 131, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 113. MR 880207 (88j:46003)

[Cho66] G. Choquet, *Topology*, Translated from the French by Amiel Feinstein. Pure and Applied Mathematics, Vol. XIX, Academic Press, New York, 1966. MR 0193605 (33 #1823)

[Coh93] D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993, Reprint of the 1980 original. MR 1454121 (98b:28001)

[Cos] A. Costé, *Contribution à la théorie de l'intégration multivoque*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1977.

[CR04] B. Cascales and J. Rodríguez, *Birkhoff integral for multi-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), no. 2, 540–560, Special issue dedicated to John Horváth. MR 2088679 (2005f:26021)

[CR05] ———, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 259–279. MR 2115456

[Cur92] G. P. Curbera, *Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices*, Math. Ann. **293** (1992), no. 2, 317–330. MR 1166123 (93b:46083)

[Cur94] ———, *When L^1 of a vector measure is an AL-space*, Pacific J. Math. **162** (1994), no. 2, 287–303. MR 1251903 (94k:46070)

[Cur95] ———, *Banach space properties of L^1 of a vector measure*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 12, 3797–3806. MR 1285984 (96b:46060)

[CV77] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580. MR 0467310 (57 #7169)

[Deb67] G. Debreu, *Integration of correspondences*, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1, Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967, pp. 351–372. MR 0228252 (37 #3835)

[DFFP95] S. Díaz, A. Fernández, M. Florencio, and P. J. Paúl, *A wide class of ultrabornological spaces of measurable functions*, J. Math. Anal. Appl. **190** (1995), no. 3, 697–713. MR 1318592 (96a:46073)

[DFP92] L. Drewnowski, M. Florencio, and P. J. Paúl, *The space of Pettis integrable functions is barrelled*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), no. 3, 687–694. MR 1107271 (92f:46045)

[DGJ00] S. J. Dilworth, M. Girardi, and W. B. Johnson, *Geometry of Banach spaces and biorthogonal systems*, Studia Math. **140** (2000), no. 3, 243–271. MR 1784153 (2001i:46013)

[Die72] J. Diestel, *An elementary characterization of absolutely summing operators*, Math. Ann. **196** (1972), 101–105. MR 0306956 (46 #6077)

[Die84] ———, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 737004 (85i:46020)

[Din67] N. Dinculeanu, *Vector measures*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 95, Pergamon Press, Oxford, 1967. MR 0206190 (34 #6011b)

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 1342297 (96i:46001)

[DK95] M. Džamonja and K. Kunen, *Properties of the class of measure separable compact spaces*, Fund. Math. **147** (1995), no. 3, 261–277. MR 1348722 (96m:28013)

[DM85] I. Dobrakov and P. Morales, *On integration in Banach spaces. VI*, Czechoslovak Math. J. **35(110)** (1985), no. 2, 173–187. MR 787123 (86h:46073)

[Dob70a] I. Dobrakov, *On integration in Banach spaces. I*, Czechoslovak Math. J. **20(95)** (1970), 511–536. MR 0365138 (51 #1391)

[Dob70b] ———, *On integration in Banach spaces. II*, Czechoslovak Math. J. **20(95)** (1970), 680–695. MR 0365139 (51 #1392)

[Dob71] ———, *On representation of linear operators on $C_0(T, \mathrm{X})$*, Czechoslovak Math. J. **21 (96)** (1971), 13–30. MR 0276804 (43 #2544)

[Dob88] ———, *On integration in Banach spaces. VII*, Czechoslovak Math. J. **38(113)** (1988), no. 3, 434–449. MR 950297 (89f:28023)

[DP04] I. Dobrakov and T. V. Panchapagesan, *A generalized Pettis measurability criterion and integration of vector functions*, Studia Math. **164** (2004), no. 3, 205–229. MR 2079949 (2005f:28025)

[DPM01] L. Di Piazza and K. Musiał, *A characterization of variationally McShane integrable Banach-space valued functions*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 279–289. MR 1849999 (2002i:28016)

[DPP03] L. Di Piazza and D. Preiss, *When do McShane and Pettis integrals coincide?*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 1177–1187. MR 2036997 (2005a:28023)

[DR50] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36** (1950), 192–197. MR 0033975 (11,525a)

[Dre76] L. Drewnowski, *Additive and countably additive correspondences*, Comment. Math. Prace Mat. **19** (1976), no. 1, 25–54. MR 0422564 (54 #10550)

[DS88] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication. MR 1009162 (90g:47001a)

[DU77] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15. MR 0453964 (56 #12216)

[Dul89] D. van Dulst, *Characterizations of Banach spaces not containing l^1*, CWI Tract, vol. 59, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989. MR 1002733 (90h:46037)

[Dun35] N. Dunford, *Integration in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), no. 3, 441–453. MR 1501796

[Dun36] ———, *Integration and linear operations*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), no. 3, 474–494. MR 1501886

[Dun37] ———, *Integration of vector-valued functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 24.

[DW78] M. De Wilde, *Closed graph theorems and webbed spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 19, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1978. MR 518869 (81j:46013)

[EAH00] K. El Amri and C. Hess, *On the Pettis integral of closed valued multifunctions*, Set-Valued Anal. **8** (2000), no. 4, 329–360. MR 1802239 (2002e:26025)

[Edg77] G. A. Edgar, *Measurability in a Banach space*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 4, 663–677. MR 0487448 (58 #7081)

[Edg79] ———, *Measurability in a Banach space. II*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), no. 4, 559–579. MR 542944 (81d:28016)

[Eng77] R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. MR 58 #18316b

[ES92] G. A. Edgar and L. Sucheston, *Stopping times and directed processes*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 47, Cambridge University Press, Cambridge, 1992. MR 1191395 (94a:60064)

[Fab97] M. Fabian, *Gâteaux differentiability of convex functions and topology. Weak Asplund spaces*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997. MR 1461271 (98h:46009)

[FGV99] F. J. Freniche and J. C. García-Vázquez, *The Bartle bilinear integration and Carleman operators*, J. Math. Anal. Appl. **240** (1999), no. 2, 324–339. MR 1731648 (2000k:46057)

[FHH$^+$01] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 8, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 1831176 (2002f:46001)

[Flo80] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 576235 (82b:46001)

[FM94] D. H. Fremlin and J. Mendoza, *On the integration of vector-valued functions*, Illinois J. Math. **38** (1994), no. 1, 127–147. MR 1245838 (94k:46083)

[FMN$^+$05] A. Fernández, F. Mayoral, F.Ñaranjo, C. Sáez, and E. A. Sánchez-Pérez, *Vector measure Maurey-Rosenthal-type factorizations and l-sums of L^1-spaces*, J. Funct. Anal. **220** (2005), no. 2, 460–485. MR 2119287 (2005k:46065)

[FPRN01] R. Frankiewicz, G. Plebanek, and C. Ryll-Nardzewski, *Between Lindelöf property and countable tightness*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 1, 97–103. MR 1695139 (2001c:46042)

[Frea] D. H. Fremlin, *Four problems in measure theory*, version of 30.7.03 available at URL http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/preprints.htm.

[Freb] ______, *The McShane and Birkhoff integrals of vector-valued functions*, University of Essex Mathematics Department Research Report 92-10, version of 13.10.04 available at URL http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/preprints.htm.

[Frec] ______, *Problem ET*, version of 27.10.04 available at URL http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/problems.htm.

[Fre15] M. Frechet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France **43** (1915), 248–265.

[Fre84] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's axiom*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 84, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. MR 780933 (86i:03001)

[Fre94] ______, *Integration of vector-valued functions*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **42** (1994), no. 1, 205–211. MR 1282336 (95e:28006)

[Fre95] ______, *The generalized McShane integral*, Illinois J. Math. **39** (1995), no. 1, 39–67. MR 1299648 (95j:28008)

[Fre97] ______, *On compact spaces carrying Radon measures of uncountable Maharam type*, Fund. Math. **154** (1997), no. 3, 295–304. MR 1475869 (99d:28019)

[Fre01] ______, *Measure Theory. Volume 2: Broad Foundations*, Torres Fremlin, Colchester, 2001.

[Fre02] ______, *Measure Theory. Volume 3: Measure Algebras*, Torres Fremlin, Colchester, 2002.

[Fre03] ______, *Measure Theory. Volume 4: Topological Measure Spaces*, Torres Fremlin, Colchester, 2003.

[FT79] D. H. Fremlin and M. Talagrand, *A decomposition theorem for additive set-functions, with applications to Pettis integrals and ergodic means*, Math. Z. **168** (1979), no. 2, 117–142. MR 544700 (80k:28004)

[Gel36] I. M. Gel'fand, *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, Comm. Inst. Sci. Math. Méc. Univ. de Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff **13** (1936), no. 4, 35–40.

[GGMS87] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **70** (1987), no. 378, iv+116. MR 912637 (89h:46024)

[Gor90] R. A. Gordon, *The McShane integral of Banach-valued functions*, Illinois J. Math. **34** (1990), no. 3, 557–567. MR 1053562 (91m:26010)

[Gor91] ______, *Riemann integration in Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991), no. 3, 923–949. MR 1138145 (92k:28017)

[Gor94] ______, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. MR 1288751 (95m:26010)

[Gra27] L. M. Graves, *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), no. 1, 163–177. MR 1501382

[GS81] N. Ghoussoub and E. Saab, *On the weak Radon-Nikodým property*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), no. 1, 81–84. MR 589141 (81j:46068)

[Gul77] S. P. Gul'ko, *On properties of subsets of $\sum$-products*, Soviet Math., Dokl. **18** (1977), 1438–1442. MR 0461410 (57 #1395)

[Hay76] R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing l_1*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **80** (1976), no. 2, 269–276. MR 0423047 (54 #11031)

[Hei88] M. Heiliö, *Weakly summable measures in Banach spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes (1988), no. 66. MR 938371 (89e:46048)

[Hen63] R. Henstock, *Theory of integration*, Butterworths, London, 1963. MR 0158047 (28 #1274)

[Hes02] C. Hess, *Set-valued integration and set-valued probability theory: an overview*, Handbook of measure theory, Vol. I, II, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 617–673. MR 1954624 (2004g:60020)

[Hil53] T. H. Hildebrandt, *Integration in abstract spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 111–139. MR 0053191 (14,735c)

[Him75] C. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. **87** (1975), 53–72. MR 0367142 (51 #3384)

[HJ85] J. Hoffmann-Jørgensen, *The law of large numbers for nonmeasurable and nonseparable random elements*, Astérisque (1985), no. 131, 299–356, Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983). MR 816753 (88a:60014)

[HU77] F. Hiai and H. Umegaki, *Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions*, J. Multivariate Anal. **7** (1977), no. 1, 149–182. MR 0507504 (58 #22463)

[HZ02] C. Hess and H. Ziat, *Théorème de Komlós pour des multifonctions intégrables au sens de Pettis et applications*, Ann. Sci. Math. Québec **26** (2002), no. 2, 181–198. MR 1980843 (2004i:28023)

[ITIT69] A. Ionescu Tulcea and C. Ionescu Tulcea, *Topics in the theory of lifting*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 48, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 0276438 (43 #2185)

[Jan79] L. Janicka, *Some measure-theoretical characterization of Banach spaces not containing l_1*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **27** (1979), no. 7-8, 561–565 (1980). MR 581552 (81i:28012)

[Jar81] H. Jarchow, *Locally convex spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981, Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. MR 632257 (83h:46008)

[JK77] L. Janicka and N. J. Kalton, *Vector measures of infinite variation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), no. 3, 239–241. MR 0444889 (56 #3235)

[JNR90] J. E. Jayne, I. Namioka, and C. A. Rogers, *Norm fragmented weak* compact sets*, Collect. Math. **41** (1990), no. 1, 133–163. MR 1149650 (93d:46035)

[JO98] B. Jefferies and S. Okada, *Bilinear integration in tensor products*, Rocky Mountain J. Math. **28** (1998), no. 2, 517–545. MR 1651584 (2000f:28012)

[Joh70] W. B. Johnson, *No infinite dimensional P space admits a Markuschevich basis*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 467–468. MR 0265916 (42 #825)

[JR03] B. Jefferies and P. Rothnie, *Bilinear integration with positive vector measures*, J. Aust. Math. Soc. **75** (2003), no. 2, 279–293. MR 2000434 (2004f:28021)

[Kel75] J. L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1975, Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27. MR 0370454 (51 #6681)

[KK76] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1976, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 20, Notas de Matemática, No. 58. [Notes on Mathematics, No. 58]. MR 0499068 (58 #17033)

[KK97] M. I. Kadets and V. M. Kadets, *Series in Banach spaces*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 94, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, Conditional and unconditional convergence, Translated from the Russian by Andrei Iacob. MR 1442255 (98a:46016)

[Kol30] A. N. Kolmogorov, *Untersuchungen über Integralbegriff*, Math. Ann. **103** (1930), 654–696.

[KRN65] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **13** (1965), 397–403. MR 0188994 (32 #6421)

[KSS$^+$02] V. Kadets, B. Shumyatskiy, R. Shvidkoy, L. Tseytlin, and K. Zheltukhin, *Some remarks on vector-valued integration*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **9** (2002), no. 1, 48–65. MR 1911073 (2003g:28026)

[KT84] E. Klein and A. C. Thompson, *Theory of correspondences*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, Including applications to mathematical economics, A Wiley-Interscience Publication. MR 752692 (86a:90012)

[KT00] V. M. Kadets and L. M. Tseytlin, *On "integration" of non-integrable vector-valued functions*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **7** (2000), no. 1, 49–65. MR 1760946 (2001e:28017)

[Kur57] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czechoslovak Math. J. **7 (82)** (1957), 418–449. MR 0111875 (22 #2735)

[KvM95] K. Kunen and J. van Mill, *Measures on Corson compact spaces*, Fund. Math. **147** (1995), no. 1, 61–72. MR 1330107 (96c:54040)

[Lew] D. R. Lewis, *Weak integrals in Lebesgue spaces*, (unpublished).

[Lew70] ______, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. **33** (1970), 157–165. MR 0259064 (41 #3706)

[Lew72] ______, *On integrability and summability in vector spaces*, Illinois J. Math. **16** (1972), 294–307. MR 0291409 (45 #502)

[LT77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92. MR 0500056 (58 #17766)

[Mah58] D. Maharam, *On a theorem of von Neumann*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 987–994. MR 0105479 (21 #4220)

[Mar04] V. Marraffa, *A characterization of absolutely summing operators by means of McShane integrable functions*, J. Math. Anal. Appl. **293** (2004), no. 1, 71–78. MR 2052532 (2004m:47038)

[Mat83] M. Matsuda, *On Sierpiński's function and its applications to vector measures*, Math. Japon. **28** (1983), no. 5, 549–560. MR 724568 (85i:46057)

[McS69] E. J. McShane, *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 88, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969. MR 0265527 (42 #436)

[McS83] ______, *Unified integration*, Pure and Applied Mathematics, vol. 107, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. MR 740710 (86c:28002)

[MR77] E. Michael and M. E. Rudin, *A note on Eberlein compacts*, Pacific J. Math. **72** (1977), no. 2, 487–495. MR 0478092 (57 #17584a)

[MRN78] K. Musiał and C. Ryll-Nardzewski, *Liftings of vector measures and their applications to RNP and WRNP*, Vector space measures and applications (Proc. Conf., Univ. Dublin, Dublin, 1977), II, Lecture Notes in Math., vol. 644, Springer, Berlin, 1978, pp. 162–171. MR 502438 (81d:46053)

[MS48] E. Marczewski and R. Sikorski, *Measures in non-separable metric spaces*, Colloquium Math. **1** (1948), 133–139. MR 0025548 (10,23f)

[Mus79] K. Musiał, *The weak Radon-Nikodým property in Banach spaces*, Studia Math. **64** (1979), no. 2, 151–173. MR 537118 (80h:46065)

[Mus83] ______, *The weak Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces*, Banach space theory and its applications (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 991, Springer, Berlin, 1983, pp. 182–187. MR 714185 (85d:46024)

[Mus84] ______, *The weak Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces*, Proceedings of the conference Topology and measure, IV, Part 2 (Trassenheide, 1983) (Greifswald), Wissensch. Beitr., Ernst-Moritz-Arndt Univ., 1984, pp. 163–168. MR 824022 (87e:46031)

[Mus91] ______, *Topics in the theory of Pettis integration*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **23** (1991), no. 1, 177–262 (1993), School on Measure Theory and Real Analysis (Grado, 1991). MR 1248654 (94k:46084)

[Mus94] ______, *A few remarks concerning the strong law of large numbers for non-separable Banach space valued functions*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **26** (1994), no. suppl., 221–242 (1995), Workshop on Measure Theory and Real Analysis (Italian) (Grado, 1993). MR 1408951 (97f:60016)

[Mus02] ______, *Pettis integral*, Handbook of measure theory, Vol. I, II, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 531–586. MR 1954622 (2004d:28026)

[Nam87] I. Namioka, *Radon-Nikodým compact spaces and fragmentability*, Mathematika **34** (1987), no. 2, 258–281. MR 933504 (89i:46021)

[Neg84] S. Negrepontis, *Banach spaces and topology*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1045–1142. MR 776642 (86i:46018)

[OP75] R. I. Ovsepian and A. Pełczyński, *On the existence of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence in every separable Banach space, and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in* L^2, Studia Math. **54** (1975), no. 2, 149–159. MR 0394137 (52 #14942)

[OSV91] J. Orihuela, W. Schachermayer, and M. Valdivia, *Every Radon-Nikodým Corson compact space is Eberlein compact*, Studia Math. **98** (1991), no. 2, 157–174. MR 1100920 (92h:46025)

[Pan95] T. V. Panchapagesan, *On the distinguishing features of the Dobrakov integral*, Divulg. Mat. **3** (1995), no. 1, 79–114. MR 1374668 (97b:28011)

[PdLB98] R. Pallu de La Barrière, *Integration of vector functions with respect to vector measures*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **43** (1998), no. 2, 55–93. MR 1855339 (2002f:46074)

[Pet38] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 2, 277–304. MR 1501970

[Phi40] R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 114–145. MR 0002707 (2,103c)

[Pie67] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. **28** (1966/1967), 333–353. MR 0216328 (35 #7162)

[Ple98] G. Plebanek, *On Pettis integral and Radon measures*, Fund. Math. **156** (1998), no. 2, 183–195. MR 1611933 (99c:46043)

[Ple02] ______, *Convex Corson compacta and Radon measures*, Fund. Math. **175** (2002), no. 2, 143–154. MR 1969632 (2004d:28027)

[Pli82] A. N. Plichko, *On projective resolutions of the identity operator and Markushevich bases*, Soviet Math. Dokl. **25** (1982), no. 2, 386–389. MR 650360 (83d:46014)

[Pol80] R. Pol, *On a question of H. H. Corson and some related problems*, Fund. Math. **109** (1980), no. 2, 143–154. MR 597061 (82a:46022)

[Råd52] H. Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 165–169. MR 0045938 (13,659c)

[Ric98] W. J. Ricker, *Rybakov's theorem in Fréchet spaces and completeness of L^1-spaces*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **64** (1998), no. 2, 247–252. MR 1619807 (99h:28023)

[Roda] J. Rodríguez, *Absolutely summing operators and integration of vector-valued functions*, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[Rodb] ______, *The Bourgain property and convex hulls*, submitted (2005).

[Rodc] ______, *On integration of vector functions with respect to vector measures*, to appear in Czechoslovak Math. J.

[Rodd] ______, *Spaces of vector functions that are integrable with respect to vector measures*, to appear in J. Aust. Math. Soc.

[Rode] ______, *Universal Birkhoff integrability in dual Banach spaces*, to appear in Quaestiones Math.

[Rod05] ______, *On the existence of Pettis integrable functions which are not Birkhoff integrable*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 4, 1157–1163. MR 2117218 (2005k:28021)

[Roi90] J. Roitman, *Introduction to modern set theory*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, A Wiley-Interscience Publication. MR 1028781 (91h:03003)

[Ros70] H. P. Rosenthal, *On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measure μ*, Acta Math. **124** (1970), 205–248. MR 0257721 (41 #2370)

[Ros74] ______, *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413. MR 0358307 (50 #10773)

[RS85] L. H. Riddle and E. Saab, *On functions that are universally Pettis integrable*, Illinois J. Math. **29** (1985), no. 3, 509–531. MR 786735 (86i:28012)

[RSU83] L. H. Riddle, E. Saab, and J. J. Uhl, Jr., *Sets with the weak Radon-Nikodým property in dual Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 4, 527–541. MR 703283 (84h:46028)

[Ryb70] V. I. Rybakov, *On the theorem of Bartle, Dunford and Schwartz on vector-valued measures*, Mat. Zametki **7** (1970), 247–254. MR 0260971 (41 #5591)

[Saa88] E. Saab, *On the weak*-Radon Nikodým property*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), no. 3, 323–332. MR 943434 (89f:46040)

[SF93] S. Shelah and D. H. Fremlin, *Pointwise compact and stable sets of measurable functions*, J. Symbolic Logic **58** (1993), no. 2, 435–455. MR 1233919 (94h:03101)

[Sho75] J. R. Shoenfield, *Martin's axiom*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 610–617. MR 0373887 (51 #10087)

[Sie39] W. Sierpinski, *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables*, Fund. Math. **30** (1939), 96–99.

[Ste91] C. Stegall, *More facts about conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodým property. II*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **32** (1991), no. 2, 47–54. MR 1146766 (92k:46025)

[Ste01] G. F. Stefánsson, *Integration in vector spaces*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 3, 925–938. MR 1879244 (2002j:46049)

[Swa97] C. Swartz, *Beppo Levi's theorem for the vector-valued McShane integral and applications*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **4** (1997), no. 5, 589–599. MR 1600292 (99b:46054)

[Swa01] ______, *Barrelledness of the space of Dobrakov integrable functions*, Math. Slovaca **51** (2001), no. 5, 521–528. MR 1899273 (2003b:46050)

[Swa98] ______, *Uniform integrability and mean convergence for the vector-valued McShane integral*, Real Anal. Exchange **23** (1997/98), no. 1, 303–311. MR 1609766 (99d:28015)

[Tal80] M. Talagrand, *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*, Studia Math. **67** (1980), no. 1, 13–43. MR 579439 (82e:28009)

[Tal84] ______, *Pettis integral and measure theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **51** (1984), no. 307, ix+224. MR 756174 (86j:46042)

[Tal87] ______, *The Glivenko-Cantelli problem*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 3, 837–870. MR 893902 (88h:60012)

[Tho76] G. E. F. Thomas, *Totally summable functions with values in locally convex spaces*, Measure theory (Proc. Conf., Oberwolfach, 1975), Springer, Berlin, 1976, pp. 117–131. Lecture Notes in Math., Vol. 541. MR 0450505 (56 #8799)

[Tik91] V. M. Tikhomirov (ed.), *Selected works of A. N. Kolmogorov. Vol. I: Mathematics and Mechanics*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 25, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, With commentaries by V. I. Arnol′d, V. A. Skvortsov, P. L. Ul′yanov et al. Translated from the Russian original by V. M. Volosov. MR 1175399 (93d:01096)

[Tod99] S. Todorčević, *Compact subsets of the first Baire class*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 1179–1212. MR 1685782 (2000d:54028)

[Val91] M. Valdivia, *Simultaneous resolutions of the identity operator in normed spaces*, Collect. Math. **42** (1991), no. 3, 265–284 (1992). MR 1203185 (94e:46047)

[Ver96] G. Vera, *Pointwise compactness and continuity of the integral*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **9** (1996), 221–245, Special Issue, suppl. MR 1435784 (97k:28010)

[VWZ94] J. Vanderwerff, J. H. M. Whitfield, and V. Zizler, *Markuševič bases and Corson compacta in duality*, Canad. J. Math. **46** (1994), no. 1, 200–211. MR 1260344 (94m:46030)

[Zia97] H. Ziat, *Convergence theorems for Pettis integrable multifunctions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **45** (1997), no. 2, 123–137. MR 1466838 (98i:46035)

[Zia00] ______, *On a characterization of Pettis integrable multifunctions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **48** (2000), no. 3, 227–230. MR 1779005 (2001d:46063)

[Ziz03] V. Zizler, *Nonseparable Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1743–1816. MR 1999608 (2004g:46030)

Índice terminológico