Topologías asociadas a subconjuntos normantes en espacios de Banach

Guillermo Manjabacas Tendero

1998

Índice general

Introducción

Esta memoria se dedica al estudio de la compacidad para topologías $\tau = \sigma(X, B)$ en un espacio de Banach X dadas por la convergencia puntual sobre los elementos de un subconjunto normante B de B_{X^*}, es decir, tal que la norma de cada elemento x de X es el supremo de $\{\, |b^*(x)| : b^* \in B \,\}$. Estas topologías no sólo tienen interés por sí mismas (las topologías débil y débil* son casos particulares) sino que, en ocasiones, pueden ser el sustituto natural de la topología débil cuando no se conoce una descripción manejable del espacio dual. Ejemplos de este tipo de topologías son: la topología de convergencia puntual sobre un compacto $(C(K), t_p(K))$; la topología de convergencia extremal $\sigma(X, \mathrm{ext}(B_{X^*}))$; ciertas topologías naturales en espacios de funciones integrables Bochner $\sigma(L^p(\mu, X), L^q(\mu, X^*))$ o más generalmente en espacios de Orlicz $\sigma(L^\Phi(\mu, X), L^\Psi(\mu, X^*))$; topologías naturales en un espacio de funciones integrables respecto a una medida vectorial (ver la sección 4.7); topologías en espacios de medidas numerablemente aditivas en un espacio medible (Ω, Σ) dadas por la convergencia sobre el conjunto de funciones Σ-simples, $\sigma(\mathrm{ca}(\Omega, \Sigma), S(\Sigma))$; así como ciertas topologías naturales en $\ell^1(\Gamma)$ (ver sección 4.3). Algunas propiedades interesantes de estas topologías pueden encontrarse en muchos artículos y monografías, por ejemplo en [38, 2, 13, 8, 26, 11, 33, 18, 76].

Principales resultados

En esta memoria hemos tratado fundamentalmente con tres tipos de cuestiones relativas a estas topologías $\sigma(X, B)$: la validez del teorema de Krein-Smulian, la fragmentabilidad de subconjuntos $\sigma(X, B)$-compactos respecto a la norma de X y la coincidencia de los compactos en las topologías débil y $\sigma(X, B)$ cuando B es una frontera de B_{X^*} (es decir, cada elemento de X alcanza su norma en un elemento de B). A continuación se especifican los problemas estudiados y los resultados más significativos.

Resultados de tipo Krein-Smulian

Estudiamos en qué condiciones la envoltura convexa y τ-cerrada de un subconjunto τ-compacto y acotado $H \subset X$ es τ-compacta y verifica

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\tau} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\| \|} \tag{1}$$

Por brevedad, en este caso diremos que (H, τ) verifica la propiedad fuerte de Krein-Smulian.

Es bien conocido que esta propiedad se cumple si τ es la topología débil ([28, chapter V]). Si τ es la topología débil*, la dificultad está en conseguir la igualdad (1). Haydon ([39]) probó que esta igualdad se verifica para todo conjunto débil*-compacto si, y sólo si, X no contiene una copia isomorfa de ℓ^1. Posteriormente Talagrand, en [76, chapter 7], localizó la propiedad anterior probando que los conjuntos de Pettis, que son una clase especial de subconjuntos débil*-compactos, verifican la ecuación (1). Daremos una breve idea de cómo demostrar resultados de tipo Krein-Smulian: dado un subconjunto acotado y τ-compacto H en X, para demostrar que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\tau}$ es τ-compacta, basta probar que cada probabilidad de Radon μ en (H, τ) tiene un baricentro x_μ en X, es decir,

$$x^*(x_\mu) = \int_H x^*|_H \, d\mu \quad \text{para cada } x^* \in X^* \tag{2}$$

Para que se cumpla lo anterior, existen básicamente dos problemas: primero, que el conjunto de restricciones $\{ x^*|_H : x^* \in B_{X^*} \}$ sea universalmente medible; y segundo, que el funcional en X^* dado por $x^* \to \int_H x^*|_H \, d\mu$ sea débil*-continuo en B_{X^*} para que defina el baricentro buscado. Para resolver estos problemas se requiere un fino análisis de los resultados sobre conjuntos puntualmente compactos de funciones medibles ([12, 76]) que es a lo que fundamentalmente se dedica el capítulo 1 y parte del 2, como comentaremos más adelante. Siguiendo estas ideas, en [18] se prueba que si (B_{X^*}, ω^*) es secuencialmente compacta, entonces cualquier subconjunto τ-compacto y acotado de X verifica la propiedad fuerte de Krein-Smulian. Nosotros probamos, dando un mayor alcance a las técnicas anteriores, que la propiedad fuerte de Krein-Smulian es satisfecha en espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$; más generalmente, H cumple la propiedad anterior si no contiene una familia que genere una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ (teorema 2.21). Nuestros resultados extienden y mejoran los que previamente se conocían en este sentido.

Fragmentabilidad

Se estudian condiciones suficientes bajo las que puede afirmarse que los subconjuntos τ-compactos son fragmentados por la norma. Siguiendo a Jayne y Rogers ([47]), se dice que un espacio topológico está fragmentado por una métrica ρ en X si cada subconjunto no vacío de X contiene abiertos relativos no vacíos con ρ-diámetro arbitrariamente pequeño. Es conocido que todo conjunto débilmente compacto es fragmentado por la norma ([54]); este resultado implica que todo subconjunto puntualmente compacto de $C(K)$ es fragmentado por la norma. Si τ es la topología débil*, todo subconjunto débil*-compacto es fragmentado por la norma si, y sólo si, X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym ([54]). En [54] también se pone de manifiesto que los subconjuntos débil*-compactos y fragmentados por la norma tienen la propiedad fuerte de Krein-Smulian. En el citado artículo, Namioka define los compactos de Radon-Nikodym como aquéllos que son homeomorfos a subconjuntos débil*-compactos de un dual que tiene la propiedad de Radon-Nikodym, los caracteriza como aquellos compactos que están fragmentados por una métrica inferiormente semicontinua, y prueba que contienen un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ denso y metrizable, y por lo tanto son secuencialmente compactos. Estas últimas propiedades son aplicables a subconjuntos τ-compactos y fragmentados por la norma de un espacio de Banach, debido a que la norma es inferiormente semicontinua respecto a la topología τ dada por un normante. Por último, en [18] se prueba, que si D es un conjunto denso en un compacto K y $t_p(D)$ es la topología en $C(K)$ de convergencia puntual en D, la fragmentabilidad por la norma de un subconjunto $t_p(D)$-compacto, acotado y convexo equivale a que verifique la propiedad de Radon-Nikodym. Nosotros demostramos el siguiente resultado (ver los teoremas 3.14 y 3.17 y los corolarios 3.14.2 y 3.16.1).

TEOREMA. Sea K compacto y D un subconjunto denso de K.

(1) Si $C(K)$ es puntualmente Lindelöf y $t_p(D)$ es la topología de convergencia puntual sobre D, entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ es fragmentado por la norma.

(2) Todo subconjunto puntualmente Lindelöf y $t_p(D)$-compacto H de $C(K)$ es fragmentado por la norma si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

   a) K no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$.

   b) H es débilmente Lindelöf.

   c) H es convexo.

En [18] se prueba que si X es débilmente Lindelöf y (B_{X^*}, ω^*) es secuencialmente compacta, los τ-compactos son fragmentados por la norma. Nosotros mejoramos este resultado con el siguiente teorema (3.16).

Teorema. Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto $\sigma(X, B)$-compacto y débilmente Lindelöf de X. Entonces $(H, \sigma(X, B))$ está fragmentado por la norma, y en consecuencia, es un compacto de Radon-Nikodym.

Como aplicación de los resultados anteriores se prueba que si $C(K)$ es puntualmente Lindelöf, toda función $t_p(D)$-continua $f : T \to C(K)$, donde T es métrico completo, es de la primera clase de Baire (proposición 3.19). En los teoremas 3.20, 3.21 y 3.24 se demuestra lo siguiente.

Teorema. Sea K un espacio compacto y separable.

(1) Si $C(K)$ es puntualmente Lindelöf entonces K es metrizable si, y sólo si, existe un subconjunto denso y numerable D en K tal que $C(K)$ es $t_p(D)$-analítico.

(2) Si K es un compacto de Rosenthal, K es metrizable si, y sólo si, $C(K)$ es puntualmente Lindelöf.

Teorema. Si K es un compacto tal que $C(K)$ es puntualmente Lindelöf, $D \subset K$ es denso y T es un espacio topológico que contiene un subconjunto denso Cěch-analítico de Baire, entonces toda función $t_p(D)$-continua $f : T \to C(K)$ es continua en norma en un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ denso de T.

Problema de la frontera

Estudiamos el siguiente problema que aparece en [23, problem I.2].

> Sea X un espacio de Banach y B una frontera de B_{X^*}. Sea H un subconjunto acotado por la norma de X. ¿Es cierto que H es $\sigma(X, B)$-compacto si, y sólo si, H es débilmente compacto?

Antes de este trabajo se conocían algunas respuestas parciales positivas de este problema. Un primer antecedente es el conocido teorema de Grothendieck, [38], que afirma que los subconjuntos acotados y puntualmente compactos de $C(K)$ son débilmente compactos. En el contexto de los espacios de Banach generales, la respuesta al problema de la frontera es positiva si H es τ-secuencialmente compacto ([71]), convexo ([31, 8.3]) o fragmentado por la norma ([18]); o bien, para cualquier H si X no contiene una copia isomorfa de ℓ^1 ([36]) o si (B_{X^*}, ω^*) es secuencialmente compacta ([18]). Durante la elaboración de esta tesis, en [15], se ha demostrado que el problema tiene solución positiva para $X = C(K)$.

Aquí probamos que también tiene solución positiva para espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$, corolario 4.7.1, caso que engloba a las clases de espacios de Banach anteriores salvo el caso del $C(K)$ (el alcance de este resultado puede quedar más claro teniendo en cuenta el cuadro de la sección A.2.3). Más generalmente demostramos el siguiente resultado (teorema 4.7).

TEOREMA. Si B es una frontera de B_{X^*}, y H es un subconjunto acotado en norma y $\sigma(X, B)$-compacto, entonces H es débilmente compacto si, y sólo si, H no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$.

También se demuestra el siguiente teorema (4.6) donde se presentan los casos localizados conocidos ampliándolos con alguna condición nueva como es, por ejemplo, el caso en que H es débilmente Lindelöf.

TEOREMA. Sea X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto de X acotado en norma y $\sigma(X, B)$-compacto. Son equivalentes:

(1) (H, ω) es compacto.

(2) (H, ω) es K-analítico.

(3) (H, ω) es numerablemente determinado.

(4) (H, ω) es Lindelöf.

(5) $(H, \sigma(X, B))$ está fragmentado por la norma de X.

(6) $(H, \sigma(X, B))$ es secuencialmente compacto.

(7) Cada sucesión (b_n^*) en B_{X^*} posee una subsucesión $(b_{n_j}^*)$ tal que $(b_{n_j}^*(h))$ converge para cada $h \in H$.

(8) Cada sucesión (b_n^*) en B posee una subsucesión $(b_{n_j}^*)$ tal que $(b_{n_j}^*(h))$ converge para cada $h \in H$.

(9) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es $\sigma(X, B)$-compacto.

(10) Cada subconjunto $\sigma(X, B)$-separable de H es débilmente separable.

Debido a que el problema de la frontera está resuelto si H es convexo o si H es fragmentado por la norma, nuestro enfoque general para enfrentarnos al problema ha sido el de utilizar los resultados de tipo Krein-Smulian y de fragmentabilidad.

Aplicaciones

Se estudia el problema de la frontera en los siguientes espacios: el espacio de funciones integrables $L^1(\mu)$ respecto a una medida vectorial, el espacio $C(K,E)$ de funciones continuas de un compacto K en un espacio de Banach E y el ε-producto $E\varepsilon F$ de dos espacios de Banach, donde se dan algunas respuestas parciales al problema. En el caso del espacio $L^1(\mu)$ los resultados obtenidos mejoran otros de Okada ([56]) relativos al concepto de convergencia σ-débil de Diestel. Se da una demostración nueva de que el problema de la frontera tiene solución positiva en el espacio $\ell^1(\Gamma)$ para Γ arbitrario, resultado que contrasta con la solución en espacios que no contienen una copia de $\ell^1(c)$. También se incluye una aplicación de los resultados anteriores al caso de un espacio de Orlicz vectorial con la topología $\sigma(L^\Phi(\mu,X),L^\Psi(\mu,X^*))$.

Contenido de cada capítulo

Capítulo 1

Se estudia un importante teorema de Bourgain, Fremlin, Rosenthal y Talagrand (BFRT) en el que se dan diversas condiciones equivalentes al hecho de que cada sucesión de un subconjunto uniformemente acotado Z de $C(K)$ tenga una subsucesión puntualmente convergente. Concretamente en el teorema 1.14 se añaden dos condiciones equivalentes a las ya conocidas en [12, theorem 2F], [76, theorem 14-1-7] y [27, theorem 3.11]. Una de ellas es que se verifique la propiedad de Bourgain respecto a todas las probabilidades de Radon en K (definición 1.2). La utilidad de esta condición radica en que si Z cumple la propiedad de Bourgain respecto a una medida μ, entonces todo elemento de la clausura puntual de Z es μ-medible y además es el límite en casi todo punto de una sucesión en Z. Estas propiedades resultan ser la clave para demostrar la validez de la fórmula baricéntrica (2), ya que resuelven los problemas de medibilidad y continuidad a los que se hace referencia. La segunda condición equivalente que se añade al teorema es que para cada sucesión de Z, su clausura puntual no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$. Esta propiedad resulta ser clave para probar resultados de tipo Krein-Smulian en espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ ya que, según un resultado de Talagrand, un espacio de Banach no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ si, y sólo si, (B_{X^*},ω^*) no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. Estas dos condiciones nuevas son las que han permitido por un lado, dar mayor alcance a los resultados obtenidos inicialmente en [18], y por otro, simplificar algunas pruebas de dicho artículo.

Capítulo 2

Se estudian los subconjuntos de un espacio $C(K)$ que tienen la propiedad $P(D)$ (definición 2.1). Esta terminología procede de [18]. La base de este concepto es que si un subconjunto $t_p(D)$-compacto $H \subset C(K)$ verifica la propiedad $P(D)$, entonces $Z = \{\delta_x|_H : x \in D\}$ cumple las condiciones del teorema de BFRT. El trabajo del primer capítulo permite dar nuevas caracterizaciones de la propiedad $P(D)$. Los subconjuntos débil*-compactos del dual de un Banach que no contiene una copia isomorfa de ℓ^1, o más generalmente, los conjuntos de Pettis de un dual, cumplen la propiedad $P(D)$ ([76, chapter 7]). Nosotros demostramos que un conjunto τ-compacto y acotado de un espacio de Banach que no contiene una familia que genere $\ell^1(c)$ tiene la propiedad $P(D)$ (teorema 2.14).

Los conjuntos con la propiedad $P(D)$ tienen las siguientes propiedades.

- Verifican la propiedad fuerte de Krein-Smulian ([18]). Aquí damos una demostración más sencilla que la dada en [18] (teoremas 2.17 y 2.20): utilizamos la propiedad de Bourgain en vez de la estabilidad en medida para resolver los problemas de medibilidad y continuidad que se plantean cuando se quiere trasladar la demostración clásica del teorema de Krein-Smulian a la topología dada por un normante, como hemos comentado anteriormente.

- Si son convexos, verifican la propiedad débil de Radon-Nikodym. Además, esto caracteriza la propiedad $P(D)$ ([18]).

- Si son convexos, verifican el teorema de Krein-Milman, es decir, coinciden con la envoltura cerrada en norma y convexa de sus puntos extremales. Además si se exige esta propiedad (o bien que se verifique la ecuación (1)) para todos sus subconjuntos convexos y cerrados, se caracteriza la propiedad $P(D)$ (ver sección 2.2.4).

- Son homeomorfos a subconjuntos débil*-compactos del dual de un espacio de Banach que no contiene a ℓ^1, es decir, de un dual con la propiedad débil de Radon-Nikodym (proposición 2.33). Esta propiedad es más general que la que cumplen los compactos de Radon-Nikodym de [54] que son homeomorfos a subconjuntos débil*-compactos de un dual con la propiedad de Radon-Nikodym.

Capítulo 3

La primera parte del tercer capítulo se dedica a probar que si $C(K)$ es puntualmente Lindelöf entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$, con D denso en K, es fragmentado por la norma (sección 3.2). Posteriormente se demuestran los casos localizados cuando sólo se exige que H es puntualmente Lindelöf (sección 3.3). El resto del capítulo se dedica a dar las aplicaciones ya comentadas en la sección anterior. En la sección 3.5 se demuestra que las propiedades de Radon-Nikodym y de Krein-Milman son equivalentes en subconjuntos acotados y τ-compactos, apoyándonos en el caso conocido de los duales y mejorando un resultado de James, [42, theorem 3.2], donde se prueba la misma propiedad en el caso en que B es numerable.

Capítulo 4

En el cuarto capítulo se desarrollan los resultados relativos al problema de la frontera ya comentados. Aparte de los dos teoremas mencionados en la sección anterior, se da una caracterización de la compacidad débil de un subconjunto τ-compacto H a través de la topología en X^* de convergencia uniforme sobre sucesiones de H (teorema 4.18) para lo que se utiliza un resultado sobre intercambio de límites de Grothendieck, teorema 4.17. Además

- Se prueba que $\ell^1(\Gamma)$, con Γ arbitrario, con la topología de convergencia sobre una frontera de $B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ es angélico (teorema 4.15). Se resuelve el problema de la frontera en $\ell^1(\Gamma)$ de modo distinto a como se hace en [15].

- En un espacio $C(K, E)$ de funciones continuas de un compacto K en un espacio de Banach E estudiamos algunas condiciones suficientes sobre subconjuntos normantes del dual que aseguren que se verifique la propiedad fuerte de Krein-Smulian (proposición 4.24), la solución positiva del problema de la frontera (4.27 y 4.27.1) y la angelicidad del espacio (4.29).

- En la sección 4.6 se da una condición suficiente para que el problema de la frontera en un espacio ε-producto de dos espacios de Banach tenga solución positiva para cierto tipo de fronteras.

- En el espacio de funciones integrables $L^1(\mu)$ respecto a una medida vectorial $\mu : \Sigma \to X$, se demuestra que el problema de la frontera tiene solución positiva siempre. En los casos en que o bien X tiene la propiedad de Schur o bien el recorrido de μ es relativamente compacto en norma, el conjunto normante B definido en la ecuación (4.17) es una frontera (teoremas 4.38 y 4.39), de modo que los conjuntos $\sigma(L^1(\mu), B)$-compactos y acotados son débilmente compactos.

- El espacio de Orlicz vectorial $L^\Phi(\mu, X)$, con la topología $\sigma(L^\Phi(\mu, X), L^\Psi(\mu, X^*))$, es angélico, y además sus compactos son de Eberlein, verifican la propiedad fuerte de Krein-Smulian, son fragmentados por la norma y cumplen la propiedad de Radon-Nikodym si son convexos (sección 4.8).

Apéndice

Finalmente, por su importancia en este trabajo, se ha incluido un apéndice en el que se recopilan algunos resultados conocidos referentes a cuándo $\beta\mathbb{N}$ puede sumergirse en un espacio compacto, y cuándo $\ell^1(c)$ puede sumergirse de manera isomorfa en un espacio de Banach.

El contexto de un espacio $C(K)$

En buena parte de esta memoria se trabaja en el contexto de un espacio de funciones continuas sobre un compacto, $C(K)$. Esta situación es lo suficientemente general para gran parte de los objetivos, ya que todo espacio de Banach X puede mirarse como un subconjunto de $C(B_{X^*}, \omega^*)$, y las topologías de la norma y de la convergencia puntual de $C(B_{X^*})$ inducen en X, respectivamente, las topologías de la norma original y la débil; además, la topología $\tau = \sigma(X, B)$ dada por un normante está inducida por la convergencia puntual en un subconjunto denso $D \subset B_{X^*}$ (proposición 2.12). Por otro lado, en el caso del $C(K)$ se dispone de las topologías $t_p(D)$, débil y $t_p(K)$. Esta última no tiene su análogo en el caso de un espacio de Banach general. Hay algunas diferencias notables entre los resultados que se obtienen en los casos $C(K)$ y un espacio de Banach genérico, como son:

- La propiedad fuerte de Krein-Smulian se cumple en todo espacio de Banach que no contenga una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ para una topología dada por un conjunto normante. Para un espacio $C(K)$, basta que $C(K)$ no contenga una copia isométrica de $\ell^1(c)$ para que la topología $t_p(D)$ tenga la misma propiedad.

- La condición de Lindelöf en la topología débil asegura que todo subconjunto τ-compacto es fragmentado por la norma. En el caso del espacio $C(K)$, la fragmentabilidad de un subconjunto $t_p(D)$-compacto H se obtiene si $C(K)$ es puntualmente Lindelöf, o bien si H es puntualmente Lindelöf y convexo.

- El problema de la frontera se ha resuelto positivamente en $C(K)$ ([15]), mientras que en el caso general sólo se han obtenido respuestas parciales.

Bibliografía básica

El principal punto de partida de este trabajo son los artículos de B. Cascales y G. Vera, [18] y [19]. En realidad, gran parte de lo que aquí se hace son mejoras de los resultados de dichos artículos. También han sido de gran ayuda los artículos de Bourgain, Fremlin y Talagrand [12], Farmaki [30], Godefroy y Talagrand [37], Jayne, Namioka y Rogers [45], Namioka [54], Rosenthal [61], Talagrand [74, 75, 76] y el trabajo de Bourgain publicado en [60]. Parte de los resultados de este trabajo han sido publicados en [17] y [16].

Terminología y definiciones

La notación y terminología que utilizamos es estándar. Como referencias generales señalamos los siguientes libros: [25], [26], [6], [77] y [21].

Sea X un espacio de Banach dotado de la norma $\| \quad \|$. Denotaremos por B_X a la bola unidad del espacio, es decir, $B_X = \{ x \in X : \|x\| \leq 1 \}$, y por S_X a la esfera unidad, $\{ x \in X : \|x\| = 1 \}$. X^* representa al conjunto de aplicaciones lineales y continuas de X en $\mathbb{R}$ dotado de la norma usual: si $f \in X^*$, $\|f\|$ es el supremo de $\{ |f(x)| : x \in B_X \}$. En X consideraremos la topología débil, $\sigma(X, X^*)$, que denotaremos también como ω. En general, si B es un subconjunto de X^*, la topología $\sigma(X, B)$ en X es la de convergencia puntual sobre los elementos de B. La topología débil* en X^* es la topología $\sigma(X^*, X)$, que denotaremos también como ω^*. Si dos espacios de Banach X e Y son isomorfos (linealmente homeomorfos) escribiremos $X \cong Y$. Si Y contiene una copia isomorfa de X, escribiremos $X \subset Y$.

Si Γ es un conjunto, una familia acotada $\{ x_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ de un espacio de Banach $(X, \| \quad \|)$ se dice equivalente a la base canónica de $\ell^1(\Gamma)$ si existe una constante $M > 0$ tal que para cada subconjunto finito $A \subset \Gamma$ y cada familia de números reales $\{ a_i : i \in A \}$, se cumple

$$M \sum_{i \in A} |a_i| \leq \left\| \sum_{i \in A} a_i x_i \right\|$$

X contiene una familia equivalente a la base de $\ell^1(\Gamma)$ si, y sólo si, X contiene un subespacio isomorfo a $\ell^1(\Gamma)$. En el caso en que $\Gamma = \mathbb{N}$, llamaremos ℓ^1-sucesiones a las sucesiones equivalentes a la base de $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N})$.

Si K es un espacio topológico compacto y Hausdorff, denotaremos por $C(K)$ al espacio de funciones reales continuas definidas en K. $C(K)$ es un espacio de Banach cuando se le dota de la norma del supremo, $\| \quad \|_\infty$ (o simplemente $\| \quad \|$ si no hay lugar a confusión); a los subconjuntos acotados en esta norma los llamaremos uniformemente acotados. La topología de convergencia puntual en $C(K)$ se denotará por $t_p(K)$. Si D es un subconjunto de K, $t_p(D)$ es la topología en $C(K)$ de convergencia puntual sobre los elementos de D.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, denotaremos por $M(\mu)$ al conjunto de funciones μ-medibles, es decir, medibles respecto a la compleción Σ_μ de Σ respecto a μ. Σ^+ será el subconjunto de Σ formado por los conjuntos de medida μ positiva. Trabajaremos siempre con medidas finitas. Para cada p con $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por $\mathcal{L}^p(\mu)$ al subconjunto de $M(\mu)$ formado por las funciones cuya norma $\| \ \|_p$ sea finita. Si $1 \leq p < \infty$, la norma $\| \ \|_p$ viene dada por

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega \|f\|^p \, d\mu$$

y si $p = \infty$ la norma $\|f\|_\infty$ es el supremo μ-esencial de $|f|$. Denotaremos por $L^p(\mu)$ el espacio cociente formado a partir de $\mathcal{L}^p(\mu)$ donde se identifican las funciones que coinciden en casi todo punto. En general no distinguiremos por su notación a una función de $\mathcal{L}^p(\mu)$ de su correspondiente clase de equivalencia, pero si es necesario, denotaremos la clase de $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ como $[f] \in L^p(\mu)$. $(L^p(\mu), \| \ \|_p)$ es un espacio de Banach para cada $p \in [1, \infty]$. Diremos que un conjunto de funciones μ-medibles A es uniformemente acotado si existe $M > 0$ tal que $|f(\omega)| \leq M$ para cada $\omega \in \Omega$ y cada $f \in A$.

En $M(\mu)$ también consideraremos la topología de convergencia en medida, t_m, definida por la pseudo-métrica:

$$d(f, g) = \int_\Omega (|f - g| \wedge 1) \, d\mu$$

($a \wedge b$ es el mínimo de a y b). Para subconjuntos Z uniformemente integrables de $L^1(\mu)$, las topologías t_m y $\| \ \|_1$ coinciden (recordemos que Z es uniformemente integrable si es $\| \ \|_1$-acotado y para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(B) < \delta$ entonces $\int_B |f| \, d\mu < \varepsilon$ para cada $f \in Z$). En particular, si Z es uniformemente acotado, en Z coinciden las topologías t_m y $\| \ \|_1$.

Dado un conjunto A denotaremos su cardinal por $\mathrm{card}(A)$ o por $|A|$. Por c representaremos o bien el cardinal del continuo, o bien un conjunto con dicho cardinal, dependiendo del contexto. Representaremos por $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de partes de A.

Si dos espacios topológicos X e Y son homeomorfos escribiremos $X \approx Y$. En este contexto, $X \subset Y$ significará que Y contiene una copia homeomorfa de X.

Para un espacio topológico T, y un espacio de Banach X, $B_1(T, X)$ es el espacio de funciones de la primera clase de Baire, es decir, funciones que son el límite puntual de una sucesión de funciones norma-continuas de T en X. Si $X = \mathbb{R}$, entonces escribiremos $B_1(T)$ en vez de $B_1(T, \mathbb{R})$. $B_r(T)$ denotará el conjunto de funciones $f : T \to \mathbb{R}$ tales que para cada cerrado no vacío L de T, la restricción $f|_L$ tiene algún punto de continuidad. Si T es un espacio polaco, es decir, homeomorfo a un espacio separable, métrico y completo, un teorema clásico de Baire asegura que $B_1(T) = B_r(T)$ (ver [7]).

Capítulo 1

Resultados preliminares: compacidad puntual y medibilidad

1.1. Un teorema de Bourgain, Fremlin, Rosenthal y Talagrand

El siguiente teorema es el resultado del trabajo de varios matemáticos. Su precursor fue Rosenthal ([61, 62]) quien dio una caracterización de los espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de ℓ^1 poniendo de manifiesto el papel que desempeñan en ello las sucesiones independientes. Este trabajo dio pie a otras extensiones de diferente naturaleza que se formulan en términos de compacidad puntual en espacios de funciones con algún tipo de regularidad (por ejemplo, medibilidad universal, estabilidad en medida, etc) que culminó en [12, theorem 2.F] y en el siguiente teorema que aparece en [76, theorem 14-1-7] (ver también [27, theorem 3.11]). La definición de sucesión independiente de funciones puede verse en la página 9 como definición 1.7; la definición de conjunto μ-estable puede verse en la página 4 como definición 1.3; el resto de definiciones necesarias aparece en las notas sobre terminología.

Teorema 1.1 (Bourgain, Fremlin, Rosenthal, Talagrand) *Si K es un espacio compacto y Hausdorff y Z un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) Cada sucesión en Z tiene una subsucesión $t_p(K)$-convergente.

(2) Z no contiene ninguna ℓ^1-sucesión.

(3) Z no contiene ninguna sucesión independiente en K.

(4) Z es relativamente $t_p(K)$-compacto en $B_r(K)$.

(5) Para cada medida de Radon μ en K, Z es relativamente $t_p(K)$-compacto en el espacio de funciones μ-medibles, $M(\mu)$.

(6) Z es μ-estable para cada medida de Radon μ en K.

La μ-estabilidad es un concepto técnico que implica el de compacidad relativa en $M(\mu)$ para la topología puntual (ver proposición 1.4). El concepto de μ-estabilidad tiene gran interés, entre otras razones, porque si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y Z es un subconjunto de $\mathbb{R}^\Omega$ que es μ-estable, entonces la aplicación identidad $id : (Z, t_p) \to (Z, t_m)$ es continua (ver [76, theorem 9-5-2]). Esta propiedad es la que se utilizó en [18] para establecer la validez de la fórmula baricéntrica, y obtener teoremas de tipo Krein-Smulian.

En este primer capítulo, añadiremos en el teorema 1.1 dos nuevas propiedades equivalentes que serán de utilidad en lo que sigue. Una de ellas es la propiedad de Bourgain respecto a todas las medidas de Radon en K, que tiene la ventaja de ser más manejable que la μ-estabilidad. Permite dar una demostración sencilla de la continuidad de la aplicación identidad $id : (Z, t_p) \to (Z, t_m)$. La segunda condición equivalente que añadiremos en el teorema anterior trata sobre la ausencia en Z de sucesiones cuya clausura puntual sea homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$.

Como los principales resultados de esta tesis se basan en la incorporación de estas dos nuevas condiciones, hemos creído conveniente detallar algunos resultados conocidos con la intención de que quede claro el papel que juegan los diferentes conceptos involucrados, al tiempo que mostramos un camino alternativo para una prueba razonablemente autocontenida del teorema 1.14 donde se incorporan las dos nuevas condiciones. La prueba de este teorema es autocontenida con las siguientes excepciones: los resultados clásicos de [61], la implicación (8) $\Rightarrow$ (5) del teorema para la que nos remitimos a [12, theorem 2F] y la proposición 1.11, que esencialmente se debe a Talagrand, [76]. Todos los resultados, salvo el teorema 1.13 que es original, aparecen más o menos dispersos en las referencias que se citan.

1.1.1. La propiedad de Bourgain

La propiedad que nosotros consideramos aquí como propiedad de Bourgain aparece recogida en unas notas no publicadas del propio Bourgain, aunque parece ser que la primera reseña se encuentra en [60], donde se relaciona con la integrabilidad Pettis. Para una función real $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y para un subconjunto B de Ω, denotaremos por $\operatorname{osc}(f|_B)$ a la oscilación de f en el conjunto B, es decir,

$$\operatorname{osc}(f|_B) = \sup\{\, |f(x) - f(y)| : x, y \in B \,\}$$

Definición 1.2 (Propiedad de Bourgain) *Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, se dice que un subconjunto Z de $\mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain respecto a μ si para cada conjunto A de Σ^+ y cada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de subconjuntos de A, $A_1, \ldots, A_k \in \Sigma^+$ tal que para cada $f \in Z$ existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $\operatorname{osc}(f|_{A_i}) \leq \varepsilon$.*

La siguiente definición aparece en [76, 9-1-1]

Definición 1.3 *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita y completo,* Z *un subconjunto* $t_p(K)$*-acotado de* $M(\mu)$ *y* $A \in \Sigma^+$. *Se dice que* A *es un conjunto* μ*-crítico para* Z *cuando existen escalares* $\alpha < \beta$ *en* $\mathbb{R}$ *tales que:*

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \qquad \mu^*_{k+l}\left(\bigcup_{f \in Z} \left(\left(\{f < \alpha\}^k \times \{f > \beta\}^l\right) \cap A^{k+l}\right)\right) = (\mu(A))^{k+l} \tag{1.1}$$

Se dice que Z *es* μ*-estable si no existe ningún conjunto* μ*-crítico para* Z.

La siguiente proposición se debe a Talagrand ([76, chapter 9]).

Proposición 1.4 *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de probabilidad completo, y* Z *un subconjunto* μ*-estable de* $M(\mu)$. *Entonces* Z *es relativamente* $t_p(K)$*-compacto en* $M(\mu)$.

Demostración. Si Z no fuera relativamente $t_p(K)$-compacto en $M(\mu)$ existiría una función h no medible que sería un punto de acumulación de Z para la topología $t_p(K)$. Ahora bien para una tal función no medible, existen números reales $\alpha < \beta$ y un conjunto $A \in \Sigma^+$ tal que $U = \{\, h < \alpha \,\} \cap A$ y $V = \{\, h > \beta \,\} \cap A$ verifican $\mu^*(U) = \mu^*(V) = \mu(A)$ (ver [76, 1-1-5]). Por tanto $\forall k, l \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\mu^*_{k+l}(U^k \times V^l) = (\mu(A))^{k+l} \tag{1.2}$$

Por otro lado, como existe una red en Z que $t_p(K)$-converge a h, para cada k y l en $\mathbb{N}$ se verifica:

$$U^k \times V^l \subset \bigcup_{f \in Z} \left(\{f < \alpha\}^k \times \{f > \beta\}^l\right)$$

Este contenido, combinado con la igualdad (1.2) nos lleva a que se debe satisfacer la ecuación (1.1), de donde A sería μ-crítico para Z, y por tanto Z no sería μ-estable. ■

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general, aunque sí se verifica para medidas perfectas y conjuntos numerables ([27, proposition 2.4]). Es más, si Ω es un espacio topológico compacto y Hausdorff, μ una medida de Radon en Ω y Z un subconjunto de $C(\Omega)$ que es relativamente puntualmente compacto en $\mathbb{R}^\Omega$, entonces Z es relativamente puntualmente compacto en $M(\mu)$ si, y sólo si, cada subconjunto numerable de Z es μ-estable ([76, theorem 9-4-2]; ver también [27, proposition 2.5]).

La siguiente caracterización de la propiedad de Bourgain que recuerda, en cierta forma, la condición de μ-estabilidad, aparece enunciada en [60].

Lema 1.5 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y Z un subconjunto de $\mathbb{R}^{\Omega}$. Si Z cumple la propiedad de Bourgain, entonces Z verifica la siguiente condición:*

> *Para cada $A \in \Sigma^+$ y cada $\alpha < \beta$, existen subconjuntos de A, $A_1, \dots, A_k$ en Σ^+ tales que si $f \in Z$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que o bien $\inf(f|_{A_i}) \geq \alpha$ o bien $\sup(f|_{A_i}) \leq \beta$.*

Además, el recíproco es cierto si Z es uniformemente acotado.

Demostración.
Si Z cumple la condición de Bourgain, dados $A \in \Sigma^+$ y $\alpha < \beta$, podemos obtener subconjuntos de A, $A_1, \dots, A_k \in \Sigma^+$ de modo que para cada f en Z se cumple que

$$\text{osc }(f|_{A_i}) \leq \varepsilon = \beta - \alpha$$

para algún $i \leq n$. Es obvio entonces que para ese i, o bien $\inf(f|_{A_i}) \geq \alpha$ o bien $\sup(f|_{A_i}) \leq \beta$.

Recíprocamente, si Z es uniformemente acotado, supongamos dados el conjunto A de Σ^+ y $\varepsilon > 0$. Sean

$$M(A, Z) = \sup\{\, f(\omega) : \ f \in Z, \omega \in A \,\} \qquad \text{y}$$

$$m(A, Z) = \inf\{\, f(\omega) : \ f \in Z, \omega \in A \,\}$$

Si $M(A, Z) = m(A, Z)$, el resultado es obvio. En caso contrario, sean

$$\alpha = \frac{2}{3} m(A, Z) + \frac{1}{3} M(A, Z) \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{3} m(A, Z) + \frac{2}{3} M(A, Z)$$

Por hipótesis, existirán subconjuntos de A, $A_1^1, \dots, A_{n_1}^1 \in \Sigma^+$ que verifiquen la condición del enunciado para los α y β dados. Definimos $\mathcal{B}_1^1$ como el subconjunto de Z formado por las funciones f tales que o bien $\inf(f|_{A_1^1}) \geq \alpha$ o bien $\sup(f|_{A_1^1}) \leq \beta$; definimos $\mathcal{B}_2^1$ como el subconjunto de $Z \setminus \mathcal{B}_1^1$ formado por las funciones f tales que o bien $\inf(f|_{A_2^1}) \geq \alpha$ o bien $\sup(f|_{A_2^1}) \leq \beta$, y así sucesivamente. De esta forma, se obtiene una partición finita de Z en subconjuntos $\mathcal{B}_i^1$ con $1 \leq i \leq n_1$ tales que

$$M(A_i^1, \mathcal{B}_i^1) - m(A_i^1, \mathcal{B}_i^1) \leq \frac{2}{3} \left(M(A, Z) - m(A, Z) \right)$$

donde $M(A_i^1, \mathcal{B}_i^1)$ y $m(A_i^1, \mathcal{B}_i^1)$ son el supremo e ínfimo en A_i^1 tomado en los elementos de $\mathcal{B}_i^1$. Si a cada uno de estos conjuntos A_j^1 le aplicamos nuevamente el mismo proceso que al A inicial, con la familia de funciones $\mathcal{B}_j^1$ en lugar de Z, y procedemos sucesivamente, obtenemos la condición de Bourgain para Z en un número finito de pasos. ■

En la siguiente proposición se recogen unos resultados básicos sobre la propiedad de Bourgain. Las tres primeras propiedades pueden encontrarse en [60, theorem 11]. La propiedad (4) fue enunciada por Talagrand en [76, 9-5-4].

Proposición 1.6 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $Z \subset \mathbb{R}^\Omega$ un conjunto de funciones con la propiedad de Bourgain respecto a μ. Entonces se cumple:*

(1) $\overline{Z}^{t_p}$ verifica la propiedad de Bourgain respecto a μ.

(2) $\overline{Z}^{t_p} \subset M(\mu)$.

(3) Cada elemento de $\overline{Z}^{t_p}$ es el límite en casi todo punto de una sucesión en Z.

(4) Z es μ-estable.

Demostración.
(1) Supongamos que $Z \subset \mathbb{R}^\Omega$ cumple la propiedad de Bourgain. Entonces, dado A en Σ^+ y $\varepsilon > 0$, tomamos los subconjuntos de A, $A_1, \dots A_k \in \Sigma^+$ dados por la definición de la condición de Bourgain. Si existe $f \in \overline{Z}^{t_p}$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ se cumple $\operatorname{osc}(f|_{A_i}) > \varepsilon$, entonces tomando una red (f_α) en Z que converge puntualmente a f, tendríamos que $\operatorname{osc}(f_\alpha|_{A_i}) > \varepsilon$ para cada $i = 1, \dots, k$ y cada $\alpha \geq \alpha_0$, en contradicción con la hipótesis.

(2) La condición anterior nos asegura que basta demostrar que si Z cumple la propiedad de Bourgain, entonces $Z \subset M(\mu)$. Sea $g \in Z$. Para cada $A \in \Sigma^+$ y $\varepsilon > 0$ consideramos el conjunto definido por

$$Z(A\,;\,\varepsilon) = \{\, f \in Z : \operatorname{osc}(f|_A) \leq \varepsilon \,\} \tag{1.3}$$

Por cumplir Z la condición de Bourgain, sabemos que si $A \in \Sigma^+$, entonces existe $B \subset A$, $B \in \Sigma^+$ tal que $g \in Z(B\,;\,\varepsilon)$. Para $\varepsilon > 0$ fijo, formamos una familia maximal $\mathcal{F}_\varepsilon$ de conjuntos disjuntos de medida positiva B tales que $g \in Z(B, \varepsilon)$. Nótese que si denotamos $\mathcal{B}_\varepsilon = \bigcup\{\, B : B \in \mathcal{F}_\varepsilon \,\}$, se cumple que $\mu(\Omega \setminus \mathcal{B}_\varepsilon) = 0$ debido a la maximalidad de $\mathcal{F}_\varepsilon$. Por otra parte, $\mathcal{F}_\varepsilon$ es necesariamente una familia numerable.

Para cada número natural m consideramos una enumeración $(A_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}_{\frac{1}{m}}$, y consideramos el conjunto

$$C := \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$$

que verifica $\mu(\Omega \setminus C) = 0$; vamos a demostrar que cierta sucesión de funciones μ-medibles converge uniformemente a g en C, lo que nos proporcionará la μ-medibilidad de g. En efecto, para cada par de números naturales m y n elegimos un punto $x_{m,n} \in A_{m,n}$ y definimos la función

$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_{m,n}) \cdot \chi_{A_{m,n}}$$

que es una función medible para cada $m \in \mathbb{N}$. Dado $x \in C$, se cumple que para cada m fijo existe n tal que $x \in A_{m,n}$, luego

$$|f_m(x) - g(x)| = |g(x_{m,n}) - g(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \text{ya que} \quad \operatorname{osc}\left(g|_{A_{m,n}}\right) \leq \frac{1}{m}$$

Por tanto, (f_m) converge a g uniformemente en C, y g es μ-medible.

(3) Dada $h \in \overline{Z}^{t_p}$, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en Z tal que h es un t_p-punto de acumulación de $\mathcal{U}$. Como Z verifica la propiedad de Bourgain, dados $A \in \Sigma^+$ y $\varepsilon > 0$, existen subconjuntos de A, $A_1, \dots A_k \in \Sigma^+$ tales que se cumple $Z = \bigcup_{i=1}^{k} Z(A_i\,;\,\varepsilon)$, donde los $Z(A_i\,;\,\varepsilon)$ se definen como en la ecuación (1.3). Esto significa que cierto $Z(A_j\,;\,\varepsilon)$, con $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ está en $\mathcal{U}$ (en caso contrario, al ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en Z, tendríamos que $Z \setminus Z(A_i\,;\,\varepsilon)$ está en $\mathcal{U}$ para $i \leq k$, y por lo tanto la intersección de todos ellos—que es vacía—también estaría en $\mathcal{U}$). Podemos razonar así como en el apartado (2) y considerar para cada $\varepsilon > 0$ la familia maximal $\mathcal{F}_\varepsilon$ de conjuntos B mutuamente disjuntos de medida positiva tales que $Z(B\,;\,\varepsilon) \in \mathcal{U}$. Para cada $\varepsilon > 0$, la familia $\mathcal{F}_\varepsilon$ es numerable, y si llamamos $\mathcal{B}_\varepsilon = \bigcup_{B\in\mathcal{F}_\varepsilon} B$, se cumple que $\mu(\Omega \setminus \mathcal{B}_\varepsilon) = 0$, por la maximalidad de la familia $\mathcal{F}_\varepsilon$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos de nuevo por $(A_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathcal{F}_{\frac{1}{m}}$, tomamos $x_{m,n}$ en $A_{m,n}$ y consideramos el conjunto $C = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$ que verifica $\mu(\Omega \setminus C) = 0$. Elegiremos ahora una sucesión de funciones de Z que convergerá puntualmente a h en C. Para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{n=1}^{m} Z(A_{i,n}\,;\,\frac{1}{i})$ está en $\mathcal{U}$, y por la elección de $\mathcal{U}$, podemos considerar una

función h_m en $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{n=1}^{m} Z(A_{i,n}\,;\,\frac{1}{i})$ tal que se cumple

$$|h_m(x_{i,n}) - h(x_{i,n})| < \frac{1}{i} \quad \text{para cada } i, n \text{ en } \{\,1, \ldots, m\,\} \tag{1.4}$$

Entonces, dado $x \in C$ sabemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{m,k}$. Así se tiene:

$$|h_m(x) - h(x)| \leq |h_m(x) - h_m(x_{m,k})| + |h_m(x_{m,k}) - h(x_{m,k})| + |h(x_{m,k}) - h(x)|$$

El primer sumando es menor que $\frac{1}{m}$ ya que $\operatorname{osc}\left(h_m|_{A_{m,k}}\right) \leq \frac{1}{m}$. El segundo sumando también es menor que $\frac{1}{m}$ por la desigualdad (1.4). Por último, el tercer sumando es menor o igual que $\frac{1}{m}$ debido a que $h \in \overline{Z(A_{m,k}\,;\,\frac{1}{m})}$, y la oscilación de las funciones de $Z(A_{m,k}\,;\,\frac{1}{m})$ en $A_{m,k}$ es menor o igual que $\frac{1}{m}$. Esto prueba que h es el t_p-límite en casi todo punto de una sucesión en Z.

(4) Hay que demostrar que no existe un conjunto μ-crítico para Z. Sean $A \in \Sigma^+$ y $\alpha < \beta$ arbitrarios. Por el lema 1.5, podemos tomar subconjuntos de A, $A_1, \ldots A_k$ en Σ^+ tales que para cada f en Z existe un subíndice $i \leq n$ tal que o bien $\inf\,(f|_{A_i}) \geq \alpha$ o bien $\sup\,(f|_{A_i}) \leq \beta$. Sean $k = l = n$. Consideramos así el subconjunto

$$D := (A_1 \times \cdots \times A_n \times A_1 \times \cdots \times A_n) \subset A^{k+l}$$

que es μ_{k+l}-medible con medida positiva. Si denotamos por

$$D_{k,l} = \bigcup_{f \in Z} \left(\left(\{\, \omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha \,\}^k \times \{\, \omega \in \Omega : f(\omega) > \beta \,\}^l \right) \cap A^{k+l} \right)$$

se tiene que $D_{k,l}$ es disjunto con D, luego será $\mu^*_{k+l}(D_{k,l}) < \mu_{k+l}(A^{k+l})$, es decir, A no es μ-crítico para Z.

$\blacksquare$

El recíproco de la propiedad (4) en la proposición anterior no es cierto (ver [76, 9-5-4]), aunque sí se cumple que la μ-estabilidad para todas las medidas de Radon equivale a la propiedad de Bourgain para todas las medidas de Radon si Z es un conjunto de funciones continuas sobre un compacto de Hausdorff (ver el teorema 1.14 en la página 15).

Una consecuencia inmediata del apartado (3) de la proposición anterior es el siguiente

Corolario 1.6.1 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $Z \subset \mathbb{R}^\Omega$ un conjunto con la propiedad de Bourgain. Entonces la identidad*

$$id : (Z, t_p) \to (Z, t_m)$$

es continua. Si además Z es un subconjunto uniformemente integrable de $L^1(\mu)$, entonces $id : (Z, t_p) \to (Z, \| \ \|_1)$ es continua.

Demostración. Basta demostrar que para cada $A \subset Z$, cualquier punto de acumulación de A en la topología t_p es un punto de acumulación de A en la topología t_m. Ahora bien, si $f \in \overline{A}^{t_p}$, el apartado (3) de la proposición 1.6 nos permite asegurar que existe una sucesión en A que converge a f puntualmente en casi todo punto. Pero en espacios de medida finita esto nos dice que tal sucesión converge a f en t_m.

La segunda parte del enunciado se deduce del hecho ya comentado que para subconjuntos uniformemente integrables de $L^1(\mu)$, coinciden las topologías de convergencia en medida, t_m, y de la norma, $\| \ \|_1$. ■

Otra demostración, aunque más complicada, del corolario anterior se basa en utilizar el teorema 9-5-2 de [76], donde se demuestra la continuidad de la identidad en Z respecto a las topologías t_p y t_m si Z es μ-estable, junto con el apartado (4) de la proposición 1.6.

1.1.2. Sucesiones delgadas y sucesiones independientes de funciones

Sucesiones independientes

La siguiente definición aparece en [61].

Definición 1.7 *Sea I un conjunto y $(A_i, B_i)_{i \in I}$ una familia de pares de subconjuntos de un conjunto Ω. Se dice que dicha familia es independiente cuando se cumplen las siguientes condiciones:*

- *$A_i \cap B_i = \emptyset$ para cada $i \in I$.*
- *Para cada par de conjuntos finitos y disjuntos $P, Q \subset I$ se verifica*

$$\left(\bigcap_{i \in P} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in Q} B_i \right) \neq \emptyset$$

Una familia $(f_i)_{i\in I}$ de funciones en $\mathbb{R}^\Omega$ se dice que es independiente sobre $A \subset \Omega$ si existen dos números reales $\alpha < \beta$ tales que para cada par de conjuntos finitos disjuntos $P, Q \subset I$ se cumple

$$\left(\bigcap_{i\in P}\{\omega \in A : f_i(\omega) < \alpha\}\right) \cap \left(\bigcap_{i\in Q}\{\omega \in A : f_i(\omega) > \beta\}\right) \neq \emptyset$$

Si $I = \mathbb{N}$, se habla de sucesión independiente de funciones.

Rosenthal fue el primero en estudiar las sucesiones independientes al caracterizar los espacios de Banach que no contienen copias isomorfas de ℓ^1 ([61]). Este concepto resultó ser fundamental en la demostración del teorema 1.1 en [12]. Como hemos señalado, nuestro interés está en añadir dos nuevas condiciones en el teorema 1.1. El primer paso será relacionar la propiedad de Bourgain con la compacidad relativa en $B_r(K)$. Necesitaremos un lema que aparece en [76, 14-1-1].

Lema 1.8 *Si K es un espacio compacto de Hausdorff y f es una función real definida en K, son equivalentes:*

(1) $f \in \mathcal{B}_r(K)$.

(2) Para cada subconjunto cerrado no vacío L de K y cada par de números reales $\alpha < \beta$, al menos uno de los conjuntos $L \cap \{\, f < \alpha \,\}$ o $L \cap \{\, f > \beta \,\}$ no es denso en L.

Si μ es una medida de Radon en K se cumple que $B_r(K) \subset M(\mu)$.

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es inmediata. Para el recíproco, sea L un subconjunto cerrado no vacío de K y (α_n, β_n) una enumeración de pares de números racionales con $\alpha_n < \beta_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos

$$A_n = L \cap \{\, f < \alpha_n \,\}, \quad B_n = L \cap \{\, f > \beta_n \,\} \text{ y } \quad L_n = \overline{A_n} \cap \overline{B_n}$$

Cada L_n es un cerrado nunca denso en L, es decir, el interior de L_n es vacío; en efecto, si $U \subset L_n$ es un abierto, se comprueba que $\overline{U} = \overline{A_n \cap U} = \overline{B_n \cap U}$, de modo que por la hipótesis, el conjunto cerrado $\overline{U}$ ha de ser vacío. Aplicando el teorema de la categoría de Baire (válido en el compacto L), tenemos que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(L \setminus L_n) = G$ es un $\mathcal{G}_\delta$ denso en L. En particular G contiene algún punto. Ahora bien, $f|_L$ es continua en cada punto de G; en efecto, si $f|_L$ es discontinua en x_0, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada entorno $U(x_0)$ existe $y \in U(x_0)$ con $|f(x_0) - f(y)| > \varepsilon$. Por lo tanto, se cumple que, o bien $x_0 \in \overline{L \cap \{ f > f(x_0) + \varepsilon \}}$ o bien $x_0 \in \overline{L \cap \{ f < f(x_0) - \varepsilon \}}$. En el primer caso, si elegimos números racionales α_n y β_n tales que

$$f(x_0) < \alpha_n < \beta_n < f(x_0) + \varepsilon$$

se tiene que $x_0 \in \overline{A_n} \cap \overline{B_n} = L_n$ y así x_0 no está en G. El segundo caso se razona de forma análoga.

Finalmente, para la segunda parte del lema, si existiese una función h en $\mathcal{B}_r(K)$ que no fuera μ-medible para una medida de Radon μ en K, tendríamos que existe un subconjunto A con medida positiva tal que para ciertos $\alpha < \beta$ se tiene

$$\mu^*(A \cap \{ f < \alpha \}) = \mu^*(A \cap \{ f > \beta \}) = \mu(A) \tag{1.5}$$

(ver [76, 1-1-5]). Puede suponerse que A es compacto y que coincide con el soporte de la medida restricción $\mu|_A$. Así se cumple que $\{ f < \alpha \} \cap A$ y $\{ f > \beta \} \cap A$ son ambos densos en A, lo que contradice el hecho de ser $f \in B_r(X)$. ■

Proposición 1.9 *Sea T un espacio topológico Hausdorff, μ una medida de Radon sobre T y Z un subconjunto uniformemente acotado de $C(T)$ que no contiene sucesiones independientes sobre T. Entonces se cumple:*

(1) Z tiene la propiedad de Bourgain respecto a μ.

(2) Si T es compacto, $\overline{Z}^{t_p} \subset \mathcal{B}_r(T)$.

Demostración.
(1) Por reducción al absurdo, suponemos que Z no cumple la propiedad de Bourgain respecto a μ. Entonces, la proposicion 1.5 nos asegura que existirán un subconjunto $A \in \Sigma^+$ y números reales $\alpha < \beta$ tales que para cada familia finita de subconjuntos de A, $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Sigma^+$, existe $f \in Z$ tal que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se cumple:

$$\inf (f|_{A_i}) < \alpha \quad \text{y} \quad \sup (f|_{A_i}) > \beta \tag{1.6}$$

Llamamos L al soporte de $\mu|_A$, que es un cerrado no vacío de T tal que cada subconjunto U no vacío y abierto relativo a L verifica $\mu(U) > 0$. Vamos a construir inductivamente una sucesión independiente en L. Para $n = 1$ tomamos $U_1 = L$. Por la ecuación (1.6), sabemos que existe $f_1 \in Z$ tal que

$$U_1 \cap \{f_1 < \alpha\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad U_1 \cap \{f_1 > \beta\} \neq \emptyset$$

Supuesto que hemos obtenido $f_1, \ldots, f_n$ una sucesión finita independiente (en L), consideramos los conjuntos

$$U_P = \left(\bigcap_{k \in P} \{f_k < \alpha\}\right) \cap \left(\bigcap_{k \notin P} \{f_k > \beta\}\right)$$

para cada $P \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ (hay 2^n abiertos de esta forma). Por la independencia de $f_1, \ldots, f_n$, sabemos que $U_P \cap L$ es un abierto no vacío en L para cada P, luego $\mu(U_P \cap L) > 0$. De nuevo, por la ecuación (1.6), existe $f_{n+1} \in Z$ tal que toma valores menores que α y mayores que β en cada abierto de L de la forma $U_P \cap L$. Entonces $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ forman una sucesión independiente en L. El proceso repetido por inducción da la sucesión buscada.

(2) Si suponemos que Z no es relativamente t_p-compacto en $B_r(T)$, existirá una función $h \in \overline{Z}^{t_p} \setminus B_r(T)$. El lema 1.8 nos asegura la existencia de un subconjunto L cerrado no vacío de T tal que para ciertos números reales $\alpha < \beta$ se cumple

$$\overline{L \cap \{h < \alpha\}} = \overline{L \cap \{h > \beta\}} = L \tag{1.7}$$

El cerrado no vacío L verifica

> Para cada familia finita de abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de L, existe $f \in Z$ tal que $\inf(f|_{U_i}) < \alpha$ y $\sup(f|_{U_i}) > \beta$ para $1 \leq i \leq n$.

En efecto, por la ecuación (1.7) se cumpliría que $\inf(h|_{U_i}) < \alpha$ y $\sup(h|_{U_i}) > \beta$ para cada $1 \leq i \leq n$, y bastaría tener en cuenta que $h \in \overline{Z}^{t_p}$. La demostración termina construyendo una sucesión independiente en L de forma totalmente análoga a como se ha hecho en la demostración del apartado (1). ■

La clave en la demostración de la proposición anterior es la siguiente propiedad que tienen los conjuntos Z que no son relativamente compactos en $\mathcal{B}_r(T)$.

> Propiedad A: *Dado $Z \subset C(T)$, existe un subconjunto no vacío y cerrado L en T, y existen escalares reales $\alpha < \beta$ tales que para cualquier familia*

finita de abiertos relativos y no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ de L, existe una función f en Z tal que

$$\inf(f|_{U_i}) < \alpha \quad \text{y} \quad \sup(f|_{U_i}) > \beta \qquad \text{para } i = 1, \ldots, k$$

o expresado de otra forma

$$(U_1 \times \cdots \times U_k \times U_1 \times \cdots \times U_k) \cap \left(\{ f < \alpha \}^k \times \{ f > \beta \}^k\right) \neq \emptyset$$

Se llega así al concepto de conjunto topológicamente estable de Talagrand, que generaliza la propiedad A anterior, y que nos servirá para completar la demostración del teorema 1.14.

Definición 1.10 *Sea T un espacio topológico y Z un subconjunto de $C(T)$. Un subconjunto cerrado y no vacío L de T se dice topológicamente crítico para Z (o simplemente t-crítico si el contexto es claro) si existen escalares reales $\alpha < \beta$ tales que $\forall k, l \in \mathbb{N}$ el conjunto*

$$\bigcup_{f \in Z} \left(\{ \omega \in T : f(\omega) < \alpha \}^k \times \{ \omega \in T : f(\omega) > \beta \}^l\right) \cap L^{k+l}$$

es denso en L^{k+l}.
Diremos que Z es t-estable si no existe ningún conjunto t-crítico para Z.

Por la demostración de la proposición 1.9 y los comentarios que siguen a ella, es claro que

$$L \text{ es t-crítico para } Z \;\Rightarrow\; L \text{ cumple la propiedad A} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z \text{ contiene una sucesión independiente en } T.$$

Por lo tanto, podemos concluir

Corolario 1.10.1 *Sea T un espacio topológico Hausdorff y Z un subconjunto de $C(T)$ que no contiene sucesiones independientes en T. Entonces Z es topológicamente estable.*

El siguiente resultado aparece explícitamente en [27, proposition 3.10], y se basa en algunos resultados obtenidos por Talagrand, [76, chapter 14].

Proposición 1.11 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y Z un subconjunto t-estable de $C(K)$. Entonces toda sucesión (f_n) en Z tiene una subsucesión puntualmente convergente. Es más, cada $t_p(K)$-punto de acumulación de $\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ es el límite puntual de una subsucesión de (f_n).*

Sucesiones delgadas

Definición 1.12 *Sea Ω un conjunto y (f_n) una sucesión uniformemente acotada en $\mathbb{R}^\Omega$. Se dice que la sucesión (f_n) es delgada si su clausura en la topología puntual no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$.*

Queremos relacionar la existencia o no de sucesiones delgadas en un subconjunto con las condiciones del teorema 1.1. Es claro que toda sucesión uniformemente acotada y puntualmente convergente (f_n) es delgada (el cardinal de $\overline{\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}}^{t_p}$ es numerable, frente al cardinal de $\beta\mathbb{N}$ que no es numerable); por lo tanto, en el contexto del teorema 1.1, el hecho de que toda sucesión en Z posea una subsucesión puntualmente convergente, implica que toda sucesión en Z posee una subsucesión delgada. Inspirándonos en ideas de [74, lemme 1], probaremos la siguiente relación entre sucesiones independientes y sucesiones delgadas.

Teorema 1.13 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y Z un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Si (f_n) es una sucesión de Z que es independiente en K, entonces $\overline{\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}}^{t_p}$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.*

Demostración. Suponemos que (f_n) es una sucesión de funciones continuas uniformemente acotada por 1, e independiente sobre K. Probaremos que el conjunto t_p-compacto $F := \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}^{t_p}$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Para ello se considera la aplicación lineal continua $T : C(F) \to \ell^\infty$ definida por $\varphi \to (\varphi(f_n))$. T es una isometría si consideramos en ambos espacios la norma del supremo. Si demostramos que es sobreyectiva, tendremos que T es un isomorfismo isométrico entre los espacios $(C(F), \|\ \|)$ y $(C(\beta\mathbb{N}), \|\ \|)$ y podremos aplicar el teorema de Banach-Stone, [49, §25.2(3)], para concluir que (F, t_p) es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Así pues la prueba termina si demostramos que para cada $x \in \ell^\infty$ existe $\varphi \in C(F)$ tal que $T(\varphi) = x$.

Primera etapa: Observemos en primer lugar que cuando K es compacto y las funciones f_n son continuas, la definición de independencia es equivalente a la que resulta haciendo intervenir parejas arbitrarias P, Q de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$. Podemos asegurar entonces que existen dos números reales $\alpha < \beta$ tales que para cada subconjunto M de $\mathbb{N}$ se pueden encontrar dos puntos $k_1, k_2 \in K$ verificando:

$$f_n(k_1) \geq \beta,\ f_n(k_2) \leq \alpha \text{ para todo } n \in M, \text{ y}$$

$$f_n(k_1) \leq \alpha,\ f_n(k_2) \geq \beta \text{ para todo } n \notin M$$

Segunda etapa: Dado $\tau = (\beta - \alpha)/8$, que cumple $\tau \leq 1/4$, probaremos que existe $\varphi \in C(F)$ tal que

$$\| \varphi \| \leq \frac{\| x \|}{4} \quad y \quad \| x - T(\varphi) \| \leq (1-\tau)\| x \|$$

Por homogeneidad basta probar esto cuando $\| x \| = 4$. Por la primera etapa, dado el conjunto $M := \{n : x_n \geq 2\}$ se pueden encontrar dos puntos $k_1, k_2 \in K$ que cumplen las condiciones arriba indicadas. Definimos $\varphi \in C(F)$ mediante la formula

$$\varphi(f) := \frac{f(k_1) - f(k_2)}{2}$$

Entonces $\| \varphi \| \leq 1$ y

$$\varphi(f_n) \geq \frac{\beta - \alpha}{2} = 4\tau \text{ si } n \in M, \text{ y } \varphi(f_n) \leq -\frac{\beta - \alpha}{2} = -4\tau \text{ si } n \notin M$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} n \in M \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq x_n - \varphi(f_n) \leq 4 - 4\tau = 4(1-\tau) \\ n \notin M \quad &\Rightarrow \quad -4(1-\tau) = -4 + 4\tau \leq x_n - \varphi(f_n) \leq 2 + 1 < 4(1-\tau) \end{aligned}$$

y se obtiene que $\| x - T(\varphi) \| \leq 4(1-\tau)$ que es lo que había que demostrar para el caso $\| x \| = 4$.

Tercera etapa: Repitiendo el proceso con el elemento $x - T(\varphi)$ de ℓ^∞ y procediendo inductivamente se obtiene una sucesión $\varphi_n \in C(F)$ que cumple:

$$\| \varphi_n \| \leq \frac{(1-\tau)^{n-1}}{4}\| x \| \quad \text{y} \quad \| x - \sum_{i=1}^{n} T(\varphi_i) \| \leq (1-\tau)^n \| x \|.$$

La primera desigualdad implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ define un elemento φ de $C(F)$ y la segunda que $T(\varphi) = x$ con lo cual queda demostrado que T es suprayectiva. ∎

Estamos en condiciones de añadir al teorema 1.1 las condiciones (3), (4) y (6) del siguiente teorema.

Teorema 1.14 *Sea K un espacio compacto Hausdorff y Z un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Son equivalentes*

(1) Toda sucesión en Z posee una subsucesión puntualmente convergente.

(2) Z no contiene ninguna sucesión equivalente a la base canónica de ℓ^1.

(3) Toda sucesión en Z posee una subsucesión delgada, es decir, posee una subsucesión cuya clausura en la topología puntual no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$.

(4) Toda sucesión en Z es delgada.

(5) En Z no existen sucesiones independientes.

(6) Z tiene la propiedad de Bourgain respecto a cada medida de Radon μ en K.

(7) Z es μ-estable para cada medida de Radon μ en K.

(8) $\overline{Z}^{t_p} \subset M(\mu)$ para cada medida de Radon μ en K.

(9) $\overline{Z}^{t_p} \subset B_r(K)$.

(10) Z es topológicamente estable.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Para sucesiones acotadas de $C(K)$, la existencia de límite puntual y la condición de ser de Cauchy en la topología débil son equivalentes (ver [25, chapter VII]). Por otra parte, los vectores unitarios de la base de ℓ^1 forman una sucesión que obviamente no tiene subsucesiones de Cauchy en la topología débil. Si Z contuviera una sucesión equivalente a la base canónica de ℓ^1, ésta no tendría subsucesiones de Cauchy en la topología débil, y por tanto, dicha ℓ^1-sucesión no tendría ninguna subsucesión puntualmente convergente.
(2) $\Rightarrow$ (5) es exactamente la proposición 4 de [61].
(5) $\Rightarrow$ (1) se encuentra también en [61].

(1) $\Rightarrow$ (3) es inmediato.
(3) $\Rightarrow$ (5) se deduce del teorema 1.13, ya que si (f_n) es una sucesión independiente en Z, todas sus subsucesiones son también independientes, y por lo tanto, ninguna de sus subsucesiones es delgada.

(5) $\Rightarrow$ (6) se encuentra en la proposición 1.9.
(6) $\Rightarrow$ (7) está en la proposición 1.6.
(7) $\Rightarrow$ (8) es la proposición 1.4.
(8) $\Rightarrow$ (5) aparece en [12, teorema 2F].

(5) $\Rightarrow$ (9) se encuentra en la proposición 1.9.

(9) $\Rightarrow$ (8) se deduce de la proposición 1.8.

El corolario 1.10.1 asegura que (5) $\Rightarrow$ (10).

Para la implicación (10) $\Rightarrow$ (4), tenemos que si Z es t-estable y (f_n) es una sucesión en Z, entonces todo punto de $A = \overline{\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}}^{t_p}$ es el t_p-límite de una subsucesión de (f_n) por la proposición 1.11. Por lo tanto, A no puede ser homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$ ya que este último espacio no contiene sucesiones convergentes no triviales y su cardinal no es numerable (ver el apéndice A).

Para concluir, la implicación (4) $\Rightarrow$ (3) es inmediata. ■

El teorema anterior puede emplearse para obtener caracterizaciones de espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de ℓ^1 (véase por ejemplo [27, chapter 4]). La condición (4) del teorema 1.14 da la siguiente caracterización.

Proposición 1.15 *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

(1) X no contiene una copia isomorfa de ℓ^1.

(2) Para cada sucesión (x_n) en B_X se tiene que su clausura en X^{**} para la topología ω^* no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$.

Demostración. Consideramos B_X como un subconjunto del espacio de funciones $C(B_{X^*}, \omega^*)$, de modo que estamos en las hipótesis del teorema 1.14. Por un lado, $X \not\supset \ell^1$ equivale a que B_X no contenga una ℓ^1-sucesión, y por el teorema 1.14 esta última condición equivale a la siguiente: para cada sucesión (x_n) en B_X se tiene que $\overline{\{x_n\}}^{t_p(B_{X^*})} \not\approx \beta\mathbb{N}$. Por último, basta tener en cuenta que $\{x_n\} \subset B_{X^{**}}$ y que

$$\overline{\{x_n\}}^{t_p(B_{X^*})} = \overline{\{x_n\}}^{\omega^*} \subset B_{X^{**}}$$

■

Como complemento a esta sección, incluiremos sin demostración un importante resultado de Bourgain, Fremlin y Talagrand ([12, teorema 2F y apartado 5I]), que nos dice que en las condiciones del teorema 1.14, si Z cumple alguna de las diez propiedades equivalentes allí enunciadas, entonces su envoltura cerrada (respecto a la topología de convergencia puntual) y convexa cumple también cualquiera de esas condiciones. La dificultad en esta afirmación está en pasar de Z a su envoltura convexa, ya que el paso al cierre es casi inmediato (véase, por ejemplo, la proposición 1.6).

Teorema 1.16 (Bourgain, Fremlin, Talagrand) *Sea K un espacio compacto y Hausdorff, y sea Z un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Entonces Z cumple alguna de las condiciones equivalentes del teorema 1.14 si, y sólo si, su envoltura convexa y cerrada en la topología de convergencia puntual cumple alguna de dichas condiciones.*

Capítulo 2

Fragmentabilidad débil

2.1. La propiedad $P(D)$

A lo largo del capítulo, $C(K)$ será el espacio de funciones reales continuas definidas en un espacio topológico compacto y Hausdorff K, D un subconjunto denso de K, y $t_p(D)$ la topología en $C(K)$ de convergencia puntual sobre los elementos de D. Dado un espacio de Banach X y un subconjunto normante B de B_{X^*}, la topología $\sigma(X,B)$ de convergencia puntual sobre el conjunto normante está inducida por una adecuada topología $t_p(D)$ (véase la proposición 2.12).

En este capítulo definiremos la propiedad $P(D)$ para subconjuntos de $C(K)$ la cual es un poco más general que la fragmentabilidad (definición 3.1) o que la propiedad de Pettis (ejemplo 2.10), y que nos permitirá deducir algunos resultados sobre subconjuntos $t_p(D)$-compactos y, en consecuencia, sobre subconjuntos compactos para topologías más gruesas que la débil de un espacio de Banach.

2.1.1. Definición y caracterizaciones de la propiedad $P(D)$

Empezamos definiendo el concepto de conjunto con la propiedad $P(D)$. Este concepto aparece por primera vez en [18], y ha demostrado ser útil en el estudio de propiedades en un espacio de Banach relativas a topologías más débiles que la topología débil.

Definición 2.1 *Sea K un espacio topológico Hausdorff y compacto, y D un subconjunto denso de K. Sea H un subconjunto $t_p(D)$-compacto y acotado en norma de $C(K)$. Diremos que H tiene la propiedad $P(D)$ si para cada sucesión (d_n) en D, existe una subsucesión (d_{n_j}) tal que $(h(d_{n_j}))$ converge para cada $h \in H$.*

La definición anterior está relacionada con las condiciones del teorema 1.14. Efectivamente, para cada $k \in K$, sea $\delta_k : C(K) \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $\delta_k(f) = f(k)$ para cada $f \in C(K)$, $\hat{k} = \delta_k|_H$, y para cada subconjunto A de K, sea $\widehat{A} = \{\, \hat{a} : a \in A \,\}$. Entonces,

- $\widehat{D}$ es un subconjunto acotado de $C(H, t_p(D))$;
- $\widehat{K}$ es subconjunto acotado y puntualmente compacto de $C(H, t_p(K))$;
- $\widehat{D}$ es denso en $\widehat{K}$ para la topología $t_p(H)$.

Así, la condición de ser H un conjunto con la propiedad $P(D)$ equivale a que cada sucesión en $\widehat{D} \subset C(H, t_p(D))$ posee una subsucesión puntualmente convergente en $\mathbb{R}^H$ (cuyo límite estará de hecho en $\widehat{K}$), es decir, equivale a que $\widehat{D}$ sea relativamente secuencialmente compacto en $\mathbb{R}^H$ para la topología $t_p(H)$. Este punto de vista nos proporciona dos ejemplos sencillos en los que se cumple la condición $P(D)$.

Proposición 2.2 *Sea H un subconjunto acotado de $C(K)$. Entonces*

(1) Si $(H, t_p(K))$ es compacto, entonces H cumple la propiedad $P(D)$ para cualquier subconjunto D denso en K.

(2) Si $(H, t_p(K))$ es separable y $(H, t_p(D))$ es compacto para un subconjunto fijo D denso en K, entonces H tiene la propiedad $P(D)$.

<u>Demostración</u>. Comenzamos por el caso $t_p(K)$-compacto. En este caso, $\widehat{K}$ es un subconjunto puntualmente compacto del espacio $C(H, t_p(K))$, donde $(H, t_p(K))$ es compacto; por lo tanto será secuencialmente compacto ([49, §24.5(1)]), y así $\widehat{D}$ es relativamente secuencialmente compacto para la topología $t_p(H)$, es decir, H tiene la propiedad $P(D)$.

Por otro lado, en el caso $t_p(K)$-separable, tenemos que $\widehat{K}$ es un conjunto compacto de funciones continuas respecto a la topología puntual de $C(H, t_p(K))$, y por lo tanto será metrizable, lo que nos da la propiedad de compacidad secuencial en $\widehat{K}$ que buscábamos. ■

Más adelante estableceremos condiciones intermedias entre la compacidad de H respecto a las topologías $t_p(D)$ y $t_p(K)$ que aseguren la propiedad $P(D)$. Antes, enunciamos la siguiente proposición que aparece en [18, proposition 2], y que será utilizada con cierta frecuencia.

Proposición 2.3 (Cascales y Vera) *Sea K un espacio compacto Hausdorff y D un subconjunto denso de K. Entonces se cumple:*

(1) Para cualquier subconjunto A de D, la restricción $R_{\overline{A}} : C(K) \to C(\overline{A})$ lleva conjuntos conjuntos con la propiedad $P(D)$ a conjuntos con la propiedad $P(A)$.

Si H es un subconjunto $t_p(D)$-compacto y uniformemente acotado de $C(K)$, entonces se cumple:

(2) $H \subset C(K)$ *tiene la propiedad* $P(D)$ *si, y sólo si, el conjunto de restricciones* $R_{\overline{A}}(H) \subset C(\overline{A})$ *tiene la propiedad* $P(A)$*, para cada subconjunto numerable* A *de* D.

(3) H *tiene la propiedad* $P(D)$ *si, y sólo si, cada subconjunto de* H *que sea separable para la topología* $t_p(D)$*, tiene la propiedad* $P(D)$.

Para el siguiente teorema, necesitamos la definición de compacto de Rosenthal.

Definición 2.4 *Un espacio topológico Hausdorff se dice que es un compacto de Rosenthal si es homeomorfo a un subconjunto puntualmente compacto de un espacio de funciones de la primera clase de Baire,* $B_1(P)$*, donde* P *es un espacio polaco (es decir,* P *es homeomorfo a un espacio métrico, separable y completo).*

Recordemos que, siguiendo a Fremlin, un espacio topológico Hausdorff T se dice angélico si cada subconjunto relativamente numerablemente compacto $A \subset T$ verifica:

(a) A es relativamente compacto.

(b) Para cada $x \in \overline{A}$ existe una sucesión en A que converge a x.

En los espacios angélicos, los conceptos de compacidad, compacidad secuencial y compacidad numerable coinciden ([31, 3.3]). Los compactos de Rosenthal son angélicos (ver [63]), y en consecuencia, son secuencialmente compactos.

Teorema 2.5 *Si* K *es un espacio compacto y Hausdorff,* D *un subconjunto denso de* K *y* H *un subconjunto acotado y* $t_p(D)$*-compacto de* $C(K)$*, las siguientes propiedades son equivalentes.*

(1) H *tiene la propiedad* $P(D)$*, es decir, cada sucesión en* $\widehat{D}$ *posee una subsucesión puntualmente convergente hacia un punto de* $\widehat{K}$.

(2) $\widehat{D}$ *no contiene ninguna sucesión equivalente a la base canónica de* ℓ^1.

(3) Toda sucesión en $\widehat{D}$ *posee una subsucesión delgada, es decir, toda sucesión en* $\widehat{D}$ *posee una subsucesión cuya clausura respecto a* $t_p(H)$ *no es homeomorfa a* $\beta\mathbb{N}$.

(4) Toda sucesión en $\widehat{D}$ *es delgada.*

(5) Para cada subconjunto numerable C *de* $\widehat{D}$, $\overline{C}^{t_p(H)}$ *es un compacto de Rosenthal.*

(6) *$\widehat{D}$ no contiene ninguna sucesión independiente en H.*

(7) *$\widehat{D}$ verifica la propiedad de Bourgain para cada probabilidad de Radon μ en $(H, t_p(D))$.*

(8) *$\widehat{D}$ es μ-estable para cada probabilidad de Radon μ en $(H, t_p(D))$.*

(9) *Para cada probabilidad de Radon μ en $(H, t_p(D))$, $\widehat{K} \subset M(\mu)$.*

(10) *$\widehat{K}$ es un subconjunto de $B_r(H)$.*

Demostración. Salvo la propiedad (5), la equivalencia entre el resto de propiedades se deduce del teorema 1.14.

Para completar la demostración, comprobaremos que (5) implica (4) y que (1) implica (5).

(5) $\Rightarrow$ (4) Si consideramos una sucesión $(\hat{d}_n)$ en $\widehat{D}$, entonces la hipótesis nos asegura que el conjunto $A := \overline{\{\, \hat{d}_n : n \in \mathbb{N} \,\}}^{t_p(H)}$ es un compacto de Rosenthal, y por lo tanto A no es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$ (por ejemplo, A es secuencialmente compacto—[63]—y $\beta\mathbb{N}$ no lo es).

(1) $\Rightarrow$ (5) Sean H un conjunto con la propiedad $P(D)$. Supondremos por comodidad que H está acotado por 1. Sea $C = \{\, \hat{d}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ un subconjunto numerable de $\widehat{D}$ y $A = \overline{C}^{t_p(H)}$ la clausura puntual de C. Como A está contenido en $\widehat{K}$ y este último espacio es compacto en la topología puntual, tendremos que A es puntualmente compacto. Comprobaremos ahora que A puede mirarse como un subconjunto de un espacio de funciones de la primera clase de Baire, $B_1(P)$, con P polaco.

Empezamos definiendo el espacio polaco. Podemos considerar H como subconjunto de $C(\widehat{K})$ de forma natural, y para cada función $h \in H$, considerar la restricción $h|_A$. Denotamos por $G = \{\, h|_A : h \in H \,\}$ que es un subconjunto de $C(A)$. La aplicación

$$T : (H, t_p(D)) \to (G, t_p(C))$$

definida por $T(h) = h|_A$ es sobreyectiva y continua, de modo que $(G, t_p(C))$ es un espacio compacto y metrizable, y por lo tanto, polaco.

Por otro lado, $[-1,1]^G$ puede mirarse como un subconjunto compacto de $[-1,1]^H$ (un elemento $(x_h)_{h\in H}$ de $[-1,1]^H$ está en $[-1,1]^G$ si se cumple que $x_{h_1} = x_{h_2}$ siempre que sea $h_1|_A = h_2|_A$). De esta forma A puede considerarse un subconjunto de

$[-1,1]^G$; es más C puede considerarse un subconjunto del espacio de funciones continuas $C(G, t_p(C))$. Como H tiene la propiedad $P(D)$, podemos asegurar que cada sucesión en C posee una subsucesión $t_p(G)$-convergente, de modo que la condición (10) de este teorema (que es equivalente a la (1)) nos dice que

$$A = \overline{C}^{t_p(G)} \subset B_r(G, t_p(C)) = B_1(G, t_p(C))$$

donde la última igualdad se da por ser $(G, t_p(C))$ un espacio polaco, lo que concluye la demostración.

■

2.1.2. La propiedad $P(D)$ y copias de $\beta\mathbb{N}$

En el teorema 2.5 aparece el espacio $\beta\mathbb{N}$ en una de las caracterizaciones. En esta sección trataremos de exponer el papel que dicho espacio topológico tiene en la caracterización de la propiedad $P(D)$, cuestión que se completará en secciones posteriores. Empezamos fijando la atención en una sencilla consecuencia del teorema 2.5 que aplicaremos con frecuencia.

Corolario 2.5.1 *Sea K un espacio compacto que no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. Sea D un subconjunto denso de K. Entonces cualquier subconjunto H de $C(K)$ acotado y $t_p(D)$-compacto tiene la propiedad $P(D)$.*

Como consecuencia, la tesis de este corolario es válida si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

(1) K es secuencialmente compacto;

(2) El peso de K es menor que c;

(3) La estrechez de K es menor que c;

(4) $(C(K), t_p(K))$ o bien $(C(K), \omega)$ tiene la propiedad propiedad $\mathcal{C}$ de Corson (en particular si uno de dichos espacios es Lindelöf);

(5) $C(K)$ no contiene una copia isométrica de $\ell^1(c)$.

<u>Demostración</u>. Sea H como en el enunciado. La aplicación $f : K \to \widehat{K}$ es continua y sobreyectiva, y como K no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$, $\widehat{K}$ tampoco la contiene

(proposición A.1). Por lo tanto, $\widehat{D} \subset \widehat{K}$ no contiene ninguna sucesión cuya clausura sea homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$, y el teorema 2.5 nos permite concluir que H tiene la propiedad $P(D)$.

Las proposiciones A.1 y A.2 aseguran que si se cumple alguna de las condiciones (1)–(5) entonces K no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$, y esto concluye la demostración. ■

En el corolario anterior se prueba que para cada $D \subset K$ denso, la condición $\beta\mathbb{N} \not\subset K$ asegura que todo subconjunto $t_p(D)$-compacto y acotado de $C(K)$ tiene la propiedad $P(D)$. Sin embargo, para que un subconjunto fijo H de $C(K)$ que sea $t_p(D)$-compacto y acotado cumpla la condición $P(D)$, basta pedir que $\beta\mathbb{N} \not\subset \widehat{K}$ (por la condición (3) del teorema 2.5). La condición $\beta\mathbb{N} \not\subset \widehat{K}$ es poco manejable porque $\widehat{K}$ depende de H, y en general, es difícil describir $\widehat{K}$. El siguiente ejemplo demuestra que ambas condiciones no son equivalentes. Recordemos que un compacto de Eberlein es un espacio compacto y Hausdorff homeomorfo a un subconjunto de un espacio de Banach con su topología débil; se cumple que todo subconjunto uniformemente acotado y puntualmente compacto de un espacio $C(X)$ de funciones continuas sobre un compacto X es débilmente compacto, [38].

Ejemplo 2.6 *Existe un compacto K que contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ tal que $\beta\mathbb{N} \not\subset \widehat{K}$ para cierto H.*

Para verlo, puede tomarse $K = \beta\mathbb{N}$, $D = \mathbb{N}$ y H un subconjunto débilmente compacto de $C(\beta\mathbb{N}) = \ell^\infty(\mathbb{N})$, entonces $\widehat{K} \subset C(H, \omega)$ es un compacto de Eberlein, y por ello $\beta\mathbb{N} \not\subset \widehat{K}$. ■

Por otra parte, aunque se cumpla $\beta\mathbb{N} \subset K$, puede ocurrir que para un subconjunto fijo D denso en K, siga siendo cierto que todo subconjunto $t_p(D)$-compacto y acotado de $C(K)$ tenga la propiedad $P(D)$ como ponen de manifiesto el ejemplo 2.8 y la proposición siguientes. La proposición se demuestra con los mismos argumentos con que se probó el teorema 1.13.

Proposición 2.7 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff, D un subconjunto denso de K, H un subconjunto $t_p(D)$-compacto y uniformemente acotado de $C(K)$ y (d_n) una sucesión en D. Si la sucesión $\{\, \hat{d}_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ es independiente en H, entonces la clausura de $\{\, d_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ en K es homemorfa a $\beta\mathbb{N}$. En consecuencia, si la clausura de cada sucesión de D no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$, entonces H tiene la propiedad $P(D)$.*

Ejemplo 2.8 *Existe un subconjunto compacto K que contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ para el cual existe un subconjunto denso $D \subset K$ tal que la clausura en K de cada subconjunto numerable de D no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$.*

Para ello, consideramos el conjunto compacto $K := [0,1]^c$ y el subconjunto denso

$$D := \{ (x_\alpha)_{\alpha\in c} \in K : \{\alpha \in c : x_\alpha \neq 0\} \text{ es numerable} \},$$

Tenemos que cada sucesión en D es tal que su clausura en K es metrizable, de modo que dicha clausura no puede ser homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$. Por otro lado, K *sí* contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ (proposición A.2). ∎

En resumidas cuentas, si llamamos

- C1: $\beta\mathbb{N} \not\subset K$;
- C2: para cada sucesión en D, existe una subsucesión tal que su clausura en K no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$;
- C$\hat{1}$: $\beta\mathbb{N} \not\subset \widehat{K}$, para un H dado;
- C$\hat{2}$: la clausura en la topología $t_p(H)$ de cada sucesión en $\widehat{D}$ no es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$ (esta condición es equivalente a que H satisfaga la condición $P(D)$ por el teorema 2.5),

se tiene el siguiente cuadro de implicaciones.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{C1}} \arrow[r] \arrow[d, "\text{Proposición A.1}"'] & \boxed{\text{C2}} \arrow[d, "\text{Proposición 2.7}"] \\
\boxed{\text{C}\hat{1}} \arrow[r] & \boxed{\text{C}\hat{2} \Leftrightarrow P(D)}
\end{tikzcd}$$

Los ejemplos 2.6 y 2.8 ponen de manifiesto que los recíprocos de C1 $\Rightarrow$ C$\hat{1}$ y de C1 $\Rightarrow$ C2 no se verifican en general. Tampoco se cumple el recíproco de C2 $\Rightarrow$ C$\hat{2}$: si $K = \beta\mathbb{N}$, $D = \mathbb{N}$ y H es un subconjunto de ℓ^∞ formado por un solo punto, entonces se cumple C$\hat{2}$ pero no C2.

Y respecto a la propiedad $P(D)$, podemos asegurar que

- si se cumple C1, entonces para cualquier subconjunto denso D de K y cualquier subconjunto H de $C(K)$ que sea $t_p(D)$-compacto y acotado en norma, H tiene la propiedad $P(D)$;

- si fijamos el subconjunto denso D de K y se verifica C2, obtenemos que cualquier subconjunto H de $C(K)$ que sea $t_p(D)$-compacto y acotado, tiene la propiedad $P(D)$ para ese D fijo;

- si fijamos el subconjunto denso D de K y el subconjunto H acotado y $t_p(D)$-compacto de $C(K)$, C$\hat{2}$ equivale a la propiedad $P(D)$.

2.1.3. Ejemplos

Los subconjuntos ω^*-compactos de duales cuyo predual no contiene a ℓ^1 pueden ser mirados como conjuntos con la propiedad $P(D)$; más en general, los conjuntos de Pettis introducidos por Talagrand en [76], tienen la propiedad $P(D)$. Veámoslo.

Ejemplo 2.9 *Subconjuntos ω^*-compactos del dual de un espacio de Banach que no contiene una copia isomorfa de ℓ^1.*

Se cumple que si X es un espacio de Banach y $\ell^1 \not\subset X$, entonces todo subconjunto ω^*-compacto H de X^* tiene la propiedad $P(B_X)$ en $C(B_{X^{**}}, \omega^*)$ (nótese que X^* puede mirarse como un subconjunto de $C(B_{X^{**}}, \omega^*)$, y que B_X es ω^*-denso en $B_{X^{**}}$). La justificación de esto tiene sus orígenes en los primeros trabajos de Rosenthal sobre la caracterización de espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de ℓ^1 (ver [63]). Rosenthal probó que $\ell^1 \not\subset X$ si, y sólo si, toda sucesión acotada (x_n) de X tiene una subsucesión ω-Cauchy (es decir, una subsucesión (x_{n_j}) tal que $(x^*(x_{n_j}))$ es convergente para cada $x^* \in X^*$); en el contexto del teorema 1.14, este resultado es consecuencia de la implicación (1) $\Leftrightarrow$ (2). Pues bien, esta propiedad nos dice que cada sucesión en $\widehat{B_X}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente en $\mathbb{R}^H$, es decir, H tiene la propiedad $P(B_X)$. ■

Ejemplo 2.10 *Los conjuntos de Pettis.*

En [76], Talagrand define los conjuntos de Pettis como aquellos subconjuntos H del dual de un espacio de Banach que son ω^*-compactos y que verifican la siguiente propiedad:

para cada probabilidad de Radon μ en (H, ω^*), y para cada x^{**} en X^{**}, $x^{**}|_H$ es μ-medible.

Esta última propiedad equivale a que $\widehat{B_{X^{**}}}$ esté contenida en el espacio de funciones medibles $M(\mu)$ para cada probabilidad de Radon μ en (H, ω^*), y del teorema 2.5 (equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (9)) deducimos que

$$H \textit{ es un conjunto de Pettis } \Leftrightarrow \ H \textit{ tiene la propiedad } P(B_X) \textit{ en } C(B_{X^{**}}, \omega^*)$$

Esta propiedad es una versión localizada de la del ejemplo anterior, ya que la propiedad $X \not\supset \ell^1$ equivale a que para cada $x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}|_{B_{X^*}}$ sea medible respecto a cualquier probabilidad de Radon μ en (B_{X^*}, ω^*) (esto puede verse de nuevo como una consecuencia del teorema 1.14, utilizando la equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (8), tomando K como (B_{X^*}, ω^*) y Z un subconjunto acotado de X, y teniendo en cuenta que

$$\overline{B_X}^{t_p(B_{X^*})} = \overline{B_X}^{\omega^*} = B_{X^{**}} \subset X^{**}).$$

Por lo tanto, B_{X^*} es un conjunto de Pettis, y en consecuencia, todo subconjunto ω^*-compacto de X^* es también un conjunto de Pettis. ∎

2.1.4. La propiedad $P(D)$ relativa a un conjunto normante de la bola del dual de un espacio de Banach

Como hemos comentado, uno de nuestros objetivos principales es el estudio de propiedades de un espacio de Banach respecto a topologías de convergencia puntual sobre los elementos de un subconjunto normante de la bola del dual.

Definición 2.11 *Sea X un espacio de Banach y B un subconjunto de B_{X^*}. Se dice que B es un subconjunto normante de B_{X^*} si para cada $x \in X$ se cumple:*

$$\|x\| = \sup\{\, |b^*(x)| : b^* \in B \,\}$$

La siguiente proposición es una bien conocida consecuencia del teorema de Hahn-Banach.

Proposición 2.12 *Sea X un espacio de Banach y B un subconjunto de B_{X^*}. Entonces B es un subconjunto normante de B_{X^*} si, y sólo si, $D = \mathrm{co}(B \cup (-B))$ es denso en (B_{X^*}, ω^*).*

Demostración. Suponemos primero que D no es denso en B_{X^*}. Existirá así un elemento x_0^* de B_{X^*} que no está en $\overline{D}^{\omega^*}$. El teorema de Hahn-Banach nos permite separar estrictamente el compacto convexo $\{ x_0^* \}$ del cerrado convexo $\overline{D}^{\omega^*}$ de modo que existe un elemento $x \in X = (X^*, \omega^*)^*$ y escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

$$x^*(x) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon < x_0^*(x) \qquad \forall x^* \in B \cup (-B)$$

Al ser B normante tendríamos que $\|x\| < x_0^*(x)$, con $x_0^* \in B_{X^*}$, lo cual es absurdo.

Recíprocamente, si D es ω^*-denso en B_{X^*} entonces, para cada $x \in X$ se tiene

$$\|x\| = \sup\{ |x^*(x)| : x^* \in B_{X^*} \} = \sup\{ |x^*(x)| : x^* \in D \}$$

ya que $\hat{x} = x|_{B_{X^*}} : B_{X^*} \to \mathbb{R}$ es ω^*-continua. ■

Así, si X es un espacio de Banach y B es un subconjunto normante de B_{X^*}, podemos plantearnos si un subconjunto acotado H de X que sea $\sigma(X, B)$-compacto tiene la propiedad $P(D)$ para $D = \text{co}(B \cup (-B))$, ya que podemos mirar

$$H \subset X \subset C(B_{X^*}, \omega^*),$$

D es un conjunto denso en B_{X^*} por la proposición anterior, y la topología $t_p(D)$ coincide con la topología $\sigma(X, B)$ en H. Por ejemplo, la proposición 2.2 nos asegura lo siguiente

- Si el subconjunto H anterior es débilmente compacto, entonces H tiene la propiedad $P(D)$, con $D = \text{co}(B \cup (-B))$, para cualquier subconjunto B que sea normante en B_{X^*}.

- Si el subconjunto H es $\sigma(X, B)$-compacto, acotado y débilmente separable, entonces H tiene la propiedad $P(D)$ para $D = \text{co}(B \cup (-B))$.

Observación: El teorema 1.16 nos asegura que el conjunto $\widehat{B} \subset C(H)$ cumple alguna de las condiciones del teorema 1.14 si, y sólo si, $\widehat{D} = \text{co}(\widehat{B} \cup (-\widehat{B}))$ cumple alguna de dichas condiciones, por lo que puede trabajarse indistintamente con $\widehat{B}$ o $\widehat{D}$ si queremos comprobar que verifica alguna de las condiciones equivalentes del teorema 2.5. Es por ello que, en adelante, cuando se presente esta situación nos referiremos sin más comentarios a las propiedades $P(D)$ o $P(B)$.

El corolario 2.5.1 nos proporciona un caso importante en que se da la condición $P(D)$.

Proposición 2.13 *Sea X un espacio de Banach que no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$. Si B es un subconjunto normante de B_{X^*}, entonces todo subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-compacto en X tiene la propiedad $P(B)$.*

Demostración. El corolario 2.5.1 nos asegura que si X es un espacio de Banach tal que (B_{X^*},ω^*) no contiene un subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$, entonces todo subconjunto H de X que sea acotado y $\sigma(X,B)$-compacto (con B normante en B_{X^*}) tiene la propiedad $P(B)$; teniendo en cuenta que los espacios de Banach cuya bola dual con la topología ω^* no contiene un subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$ son justamente aquellos espacios que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$, donde c tiene el cardinal del continuo (ver apéndice A.7), podemos concluir el resultado. ■

La proposición anterior es válida para una amplia clase de espacios de Banach (ver la sección A.2.3 en el apéndice). En particular es válida en el caso en que (B_{X^*},ω^*) es o bien secuencialmente compacta, o bien angélica, lo que extiende los casos que se recogen en [18] y [19].

El resultado de la proposición 2.13 puede localizarse, como demostramos en el siguiente teorema. Dado H fijo, para obtener la condición $P(B)$ en H basta que el propio H no contenga una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$.

Teorema 2.14 *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de X. Si H no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$, entonces H tiene la propiedad $P(B)$.*

Demostración. Podemos suponer de partida que B es absolutamente convexo (es decir, B coincide con $D=\mathrm{co}(B\cup(-B)))$, ya que en las hipótesis del enunciado se cumple que H es $\sigma(X,D)$-compacto. Estamos así en las condiciones del teorema 2.5, luego basta demostrar que B no contiene ninguna sucesión independiente en H. Por reducción al absurdo, sea (x_n^*) una sucesión en B para la que existen números reales $\alpha<\beta$ de modo que si R y S son subconjuntos finitos y disjuntos de $\mathbb{N}$, se cumple:

$$\bigcap_{n\in R}\{\, h\in H : x_n^*(h)\le\alpha \,\}\cap\bigcap_{n\in S}\{\, h\in H : x_n^*(h)\ge\beta \,\}\neq\emptyset \tag{2.1}$$

Por la $\sigma(X,B)$-compacidad de H, para cada subconjunto $M\subset\mathbb{N}$, existe $x_M\in H$ tal que

$$x_n^*(x_M)\le\alpha\quad\forall n\in M\qquad\text{y}\qquad x_n^*(x_M)\ge\beta\quad\forall n\in\mathbb{N}\setminus M \tag{2.2}$$

En efecto, dado $M \subset \mathbb{N}$, enumeramos los conjuntos

$$M = \{ m_1, \ldots, m_k, \ldots \} \quad \text{y} \quad N = \mathbb{N} \setminus M = \{ n_1, \ldots, m_j, \ldots \}$$

Definimos $M_k := \{ m_1, \ldots, m_k \}$ y $N_j = \{ n_1, \ldots, n_j \}$, para cada $k, j \in \mathbb{N}$ (si M fuera finito, (M_k) sería constante a partir de cierto subíndice; lo mismo ocurriría si N fuese finito). Utilizando la ecuación (2.1), obtenemos que la familia de subconjuntos $\sigma(X, B)$-cerrados de H

$$\left(\bigcap_{n \in M_k} \{ h \in H : x_n^*(h) \leq \alpha \} \cap \bigcap_{n \in N_k} \{ h \in H : x_n^*(h) \geq \beta \} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

verifica la propiedad de la intersección finita, luego al ser H un conjunto $\sigma(X, B)$-compacto, existirá $x_M \in H$ que está en la intersección de todos los elementos de dicha familia; este x_M verifica la ecuación (2.2).

Enumeramos ahora los polinomios con coeficientes racionales (p_n), y definimos $M_t = \{ n \in \mathbb{N} : p_n(t) > 0 \}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. La familia $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ verifica la siguiente condición: para cada par de subconjuntos P y Q de $\mathbb{R}$ finitos y disjuntos, se cumple

$$\left(\bigcap_{t \in P} M_t \right) \cap \left(\bigcap_{t \in Q} (\mathbb{N} \setminus M_t) \right) \neq \emptyset \tag{2.3}$$

Para terminar, utilizamos el razonamiento de [61, proposition 4], para demostrar que la familia $(x_{M_t})_{t \in \mathbb{R}}$ de H es equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$. Demostraremos que si $(\alpha_i)_{i \in A}$ es una familia finita de números reales (con $A \subset \mathbb{R}$), se cumple:

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot \sum_{i \in A} |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i \in A} \alpha_i x_{M_i} \right\|$$

Sean $Q = \{i : \alpha_i \geq 0\}$ y $P = \{i : \alpha_i < 0\}$. La ecuación (2.3) nos asegura que existe un número natural $n_0 \in \bigcap_{i \in P} M_i \cap \bigcap_{j \in Q} (\mathbb{N} \setminus M_j)$, y por lo tanto la ecuación (2.2) nos permite afirmar que

$$x_{n_0}^*(x_{M_i}) \leq \alpha \quad \forall i \in P \qquad \text{y} \qquad x_{n_0}^*(x_{M_i}) \geq \beta \quad \forall i \in Q$$

A partir de aquí, podemos distinguir dos casos:

Caso 1. Si $(\alpha+\beta)\cdot\sum_{i\in A}\alpha_i \geq 0$, entonces:

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\sum_{i\in A}|\alpha_i| \leq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\sum_{i\in A}|\alpha_i| + \frac{\alpha+\beta}{2}\sum_{i\in A}\alpha_i =$$

$$= \beta\sum_{i\in Q}\alpha_i + \alpha\sum_{i\in P}\alpha_i \leq \sum_{i\in Q}\alpha_i x^*_{n_0}(x_{M_i}) + \sum_{i\in P}\alpha_i x^*_{n_0}(x_{M_i}) =$$

$$= \sum_{i\in A}\alpha_i x^*_{n_0}(x_{M_i}) \leq \left\|\sum_{i\in A}\alpha_i x_{M_i}\right\|$$

Caso 2. Si $(\alpha+\beta)\cdot\sum_{i\in A}\alpha_i < 0$, basta considerar $\beta_i = -\alpha_i$ para cada $i \in A$. Por el caso 1, se cumple

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\sum_{i\in A}|\beta_i| \leq \left\|\sum_{i\in A}\beta_i x_{M_i}\right\|$$

de donde $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\sum_{i\in A}|\alpha_i| \leq \left\|\sum_{i\in A}\alpha_i x_{M_i}\right\|$, lo que concluye la demostración. ■

Nótese que si $X = C(K)$, y D es un subconjunto denso en K, D puede mirarse como un subconjunto normante de $B_{C(K)^*}$ ya que para cada $f \in C(K)$

$$\|f\| = \max\{\,|f(k)| : k \in K\,\} = \sup\{\,|f(d)| : d \in D\,\}$$

donde se utiliza la continuidad de f y la densidad de D en K. Por lo tanto, el teorema anterior aplicado a esta caso concreto nos dice lo siguiente:

Corolario 2.14.1 *Si H es un subconjunto $t_p(D)$-compacto y uniformemente acotado de $C(K)$ que no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$, entonces H tiene la propiedad $P(D)$.*

El resultado anterior y el considerado en la condición (5) del corolario 2.5.1 son ambas suficientes para obtener la propiedad $P(D)$ en $C(K)$. Sin embargo, hemos de hacer notar que ambas propiedades tienen un matiz diferente. El corolario 2.5.1 asegura la condición $P(D)$ para cualquier subconjunto acotado y $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ siempre que no exista una *copia isométrica* de $\ell^1(c)$ en $C(K)$, en particular si $C(K)$ no contiene una *copia isomorfa* de $\ell^1(c)$. Sin embargo puede suceder que exista una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ en $C(K)$ sin que exista una isométrica (ver los comentarios tras el teorema A.7); en este caso, basta con que dicha copia isomorfa no esté generada por el subconjunto $t_p(D)$-compacto y acotado H, para que el propio H tenga la propiedad $P(D)$.

En el caso de un espacio de Banach X, para subconjuntos débilmente Lindelöf, podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.15 *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto acotado, $\sigma(X,B)$-compacto de X y Lindelöf para la topología $\sigma(X,X^*)$. Entonces H tiene la propiedad $P(B)$.*

Demostración. El teorema 2.14 nos asegura que basta demostrar que H no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\{e_\alpha\}_{\alpha\in c}$ es una familia en H tal que $Y = \overline{\text{span}\{e_\alpha\}}_{\alpha\in c}$ es isomorfo a $\ell^1(c)$, $Y \cong \ell^1(c)$. Definimos la forma lineal continua en Y:

$$x^*((x_\alpha)) = \sum_\alpha x_\alpha,$$

y consideramos para cada subconjunto numerable $A \subset c$

$$R_A = \{\, h = (h_\alpha) \in H \cap Y : x^*(h) = 1 \ \text{ y } \ h_\alpha = 0, \forall \alpha \in A \,\}$$

Cada R_A es no vacío (nótese que $e_\alpha \in H \cap Y$ para cada $\alpha \in c$) y débilmente cerrado (para ello puede utilizarse que tanto x^* como e_α^* pueden extenderse a formas lineales en X), y cada intersección numerable $\bigcap_{\text{numerable}} R_A$ es no vacía, y sin embargo la intersección total $\bigcap R_A$ sí es vacía. Esto nos dice que $H \cap Y$ no es ω-Lindelöf, en contradicción con el hecho de ser $H \cap Y$ un subconjunto ω-cerrado en el espacio de Lindelöf (H, ω). ■

Corolario 2.15.1 *Sea K un espacio compacto Hausdorff, D un subconjunto denso de K y H un subconjunto $t_p(D)$-compacto y uniformemente acotado de $C(K)$ que además es Lindelöf para la topología débil. Entonces H tiene la propiedad $P(D)$.*

Demostración. Se deduce de la proposición anterior tomando $X = C(K)$ y $B = D$ en $B_{C(K)^*}$. ■

Como veremos en el siguiente capítulo, estos dos ejemplos relativos a la condición de Lindelöf respecto a la topología débil pueden mejorarse; en ambos casos no sólo se obtiene la condición $P(D)$, sino que puede obtenerse la fragmentabilidad en norma que, como veremos es una condición más fuerte que la propiedad $P(D)$.

2.2. Consecuencias de la propiedad $P(D)$

2.2.1. Integrabilidad de Pettis

En este apartado estudiaremos caracterizaciones de la condición $P(D)$ en términos de integrabilidad. Nos situaremos en el contexto natural de los espacios de Banach, y partiremos de un subconjunto H acotado y compacto para la topología $\sigma(X, B)$ de convergencia sobre un subconjunto normante de la bola del dual; en particular demostraremos que la propiedad $P(B)$ equivale a la integrabilidad universal en el sentido Pettis de la aplicación inclusión $i : H \to X$, o bien a la medibilidad universal de dicha aplicación.

Para comenzar recordaremos algunas definiciones.

Definición 2.16 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo y X un espacio de Banach. Una función $f : \Omega \to X$ se dice escalarmente medible si $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ es μ-medible para cada $x^* \in X^*$. De la misma forma f se dice integrable Pettis si se verifica:*

(i) $x^* \circ f \in L^1(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$.

(ii) Para cada $E \in \Sigma$, existe un elemento $x_E \in X$ tal que

$$x^*(x_E) = \int_E (x^* \circ f)(\omega)\, d\mu(\omega) \quad \textit{para cada } x^* \in X^*$$

En el caso en que f sea integrable Pettis, se escribe $x_E = (P) - \int_E f\, d\mu$, para cada $E \in \Sigma$.

Si H es un espacio Hausdorff compacto, una función $f : H \to X$ se dice que es:

(i) universalmente escalarmente medible si f es escalarmente medible para cada probabilidad de Radon en H;

(ii) universalmente integrable Pettis si f es integrable Pettis para cada probabilidad de Radon en H.

Antes de plantear las distintas condiciones equivalentes a la propiedad $P(D)$, estableceremos un resultado que será clave para lo que sigue, en el cual se utilizan argumentos similares a los del clásico teorema de Krein-Smulian, [26, II.2.11], pero con técnicas más complicadas.

Teorema 2.17 *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto de X acotado y $\sigma(X,B)$-compacto. Si H tiene la propiedad $P(B)$, entonces cualquier probabilidad de Radon μ en el compacto $(H, \sigma(X,B))$ tiene un baricentro en X, es decir, existe un único elemento $x_\mu \in X$ tal que*

$$x^*(x_\mu) = \int_H x^*(h)\, d\mu(h) \quad \textit{para cada } x^* \in X^*$$

Demostración. Sea μ una probabilidad de Radon en H. Probaremos que μ tiene un baricentro x_μ en X. Para ello, sean $D = \mathrm{co}(B \cup (-B))$ y $\widehat{D} = \{\, x^*|_H : x^* \in D \,\}$. Por ser B un subconjunto normante de B_{X^*}, se cumple:

$$\overline{\widehat{D}}^{t_p(H)} = \{\, x^*|_H : x^* \in B_{X^*} \,\} \tag{2.4}$$

Por otro lado, como H tiene la propiedad $P(B)$, se cumplen las condiciones equivalentes del teorema 2.5, y en particular, $\overline{\widehat{D}}^{t_p(H)}$ es un subconjunto del espacio de funciones medibles $M(\mu)$ que verifica la propiedad de Bourgain. Por lo tanto, podemos definir el operador lineal $T_\mu : X^* \to \mathbb{R}$ mediante la expresión

$$T_\mu(x^*) = \int_H x^*(h)\, d\mu(h)$$

Se cumple que $T_\mu|_{B_{X^*}}$ es ω^*-continuo: en efecto, si A es un subconjunto de B_{X^*}, hemos de probar que $T_\mu(\overline{A}^{\omega^*}) \subset \overline{T_\mu(A)}$. Tomemos $a \in \overline{A}^{\omega^*}$; como $\{\, x^*|_H : x^* \in B_{X^*} \,\}$ verifica la propiedad de Bourgain, también la verifica el subconjunto de restricciones $A|_H$ y la proposición 1.6 nos asegura que existe una sucesión (a_n) en A tal que $a_n|_H \to a|_H$ en casi todo punto. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos asegura entonces que $T_\mu(a_n) \to T_\mu(a)$, y se tiene la ω^*-continuidad de $T_\mu|_{B_{X^*}}$.

El teorema de completitud de Grothendieck ([49, §21.9.(4)]) nos permite asegurar que T_μ es ω^*-continua, por lo que existirá $x_\mu \in X$ tal que para cada $x^* \in X^*$ se cumple

$$T_\mu(x^*) = x^*(x_\mu) = \int_H x^*(h)\, d\mu(h) \tag{2.5}$$

lo que nos da el baricentro que buscábamos. ■

Este resultado aparece en [18, corollary 5.1] en el contexto de los espacios $C(K)$ (aunque la demostración valdría también en nuestro caso); esta demostración se diferencia de la que aparece en [18] en que aquí utilizamos la propiedad de Bourgain en vez de propiedades relativas a la μ-estabilidad, lo cual simplifica la demostración.

Teorema 2.18 *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) H tiene la propiedad $P(B)$.

(2) La inclusión $i : H \to X$ es universalmente escalarmente medible, es decir, para cada probabilidad de Radon μ en H y cada $x^* \in X^*$, la aplicación $x^* \circ i$ es μ-medible.

(3) Para cada probabilidad de Radon μ en H, cualquier función de $\{ x^*|_H : x^* \in X^* \}$ es μ-medible, y además existe $x_\mu \in X$ tal que

$$x^*(x_\mu) = \int_H x^*(h)\, d\mu(h) \qquad \textit{para cada } x^* \in X^*$$

(4) La inclusión $i : H \to X$ es universalmente integrable Pettis.

(5) El conjunto $\{ x^*|_H : x^* \in X^* \}$ está contenido en $B_r(H)$.

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) y (1) $\Rightarrow$ (3) están contenidas en la demostración del teorema 2.17, y la implicación (3) $\Rightarrow$ (2) es obvia.
Para la demostración de (2) $\Rightarrow$ (1): a partir de la hipótesis de (2) y de la igualdad

$$\overline{\widehat{D}}^{t_p(H)} = \{ x^*|_H : x^* \in B_{X^*} \}$$

que hemos obtenido en la demostración del teorema 2.17 (es la ecuacion (2.4); para esta igualdad sólo se necesita la condición de ser B normante), obtenemos que $\overline{\widehat{D}}^{t_p(H)}$ es μ-medible para cada probabilidad de Radon en H, y así el teorema 2.5 nos asegura que H tiene la propiedad $P(B)$.
La equivalencia de (1) y (5) se deduce nuevamente de la igualdad (2.4) y del teorema 2.5.

Por último, es claro que la condición (4) implica (2), y para terminar la prueba veamos que (1) $\Rightarrow$ (4). El teorema 4-2-3 de [76] nos asegura que para probar que $i : H \to X$ es universalmente integrable Pettis, basta comprobar que el conjunto $Z := \overline{\widehat{D}}^{t_p(H)}$ dado por la ecuación (2.4), es tal que la identidad $id : (Z, t_p(H)) \to (Z, \omega)$ es continua. Ahora bien, teniendo en cuenta la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (7) del teorema 2.5 y la proposición 1.6, deducimos que Z cumple la propiedad de Bourgain para cada probabilidad de Radon en H, y como el conjunto Z es uniformemente integrable, el corolario 1.6.1, nos permite concluir el resultado. ∎

2.2.2. La propiedad de Krein-Smulian

El teorema de Krein-Smulian es un teorema clásico que, en espacios de Banach, afirma que la envoltura convexa y cerrada de un subconjunto débilmente compacto es también débilmente compacta. En realidad, la estabilidad de los compactos respecto a la operación de tomar envolturas convexas y cerradas no es exclusiva de la topología débil de un espacio de Banach. El teorema de Krein-Smulian es de hecho válido para espacios localmente convexos casi completos con su topología de Mackey, [49, §24.5(4)]. Este teorema general de Krein-Smulian no puede utilizarse a priori para topologías $\sigma(X, B)$ donde $B \subset B_{X^*}$ es normante. Demostraremos, sin embargo, que sí se puede obtener un teorema de Krein-Smulian para subconjuntos acotados y $\sigma(X, B)$-compactos que verifican la propiedad $P(B)$.

Para fijar ideas comenzamos dando una definición.

Definición 2.19 *Sea X un espacio de Banach y τ una topología en X. Si H es un subconjunto acotado y τ-compacto de X, diremos que (H, τ) tiene la propiedad fuerte de Krein-Šmulian (propiedad KSf) si se verifican las condiciones:*

(i) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\tau}$ *es τ-compacta.*

(ii) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\tau} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$

Diremos que el espacio (X, τ) verifica la propiedad fuerte de Krein-Šmulian (propiedad KSf) si cada subconjunto τ-compacto y acotado de X tiene la propiedad KSf.

El siguiente teorema, que aparece en [18] en el contexto de los espacios $C(K)$, demuestra que los conjuntos con la propiedad $P(B)$ tienen la propiedad *KSf* dotados de la topología $\sigma(X, B)$. La clave fundamental para la demostración es el teorema 2.17 de la sección anterior.

Teorema 2.20 (Cascales y Vera) *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto de X acotado y $\sigma(X, B)$-compacto. Si H tiene la propiedad $P(B)$, entonces*

(1) $(H, \sigma(X, B))$ *verifica la propiedad KSf, es decir,* $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ *es $\sigma(X, B)$-compacto, y se cumple*

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$$

(2) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ *tiene la propiedad* $P(B)$.

Demostración.

(1) Probaremos primero que cada punto de $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es el baricentro de una probabilidad de Radon en $(H,\sigma(X,B))$. Denotamos por $P(H)$ al conjunto de probabilidades de Radon en el compacto H, y definimos la aplicación $\varphi : P(H) \to X$ mediante $\varphi(\mu) = x_\mu$ (siendo x_μ el *único* baricentro dado por la ecuación (2.5) del teorema 2.17). El conjunto de elementos de X que son baricentro de alguna probabilidad de Radon en H es así $\varphi(P(H))$. La unicidad del baricentro nos asegura que φ es afín; además φ es continua respecto a las topologías $\omega^* = \sigma(C(H)^*, C(H))$ y $\sigma(X,B)$. Por otro lado, $P(H)$ es convexo y ω^*-compacto, de modo que $\varphi(P(H))$ es un conjunto convexo y $\sigma(X,B)$-compacto que contiene a H (cada $h \in H$ es el baricentro de la medida $\mu = \delta_h$). De aquí se concluye que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)} \subset \varphi(P(H))$. Como el conjunto $P(H)$ es ω^*-compacto y φ es continua, se deduce que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es $\sigma(X,B)$-compacto.

Para probar la igualdad de envolturas convexas y cerradas respecto a las topologías $\sigma(X,B)$ y de la norma, sólo hace falta demostrar que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)} \subset \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$. En otro caso existiría un elemento x de $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ que no está en $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$; ahora bien por el teorema de Hahn-Banach, existiría $x_0^* \in X^*$ tal que

$$\sup_{h\in H} x_0^*(h) < x_0^*(x) \tag{2.6}$$

Como $x \in \overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$, el razonamiento anterior nos permitiría asegurar que x es el baricentro de alguna probabilidad de Radon μ en H, y por tanto, como $x_0^* \in X^*$, sería

$$x_0^*(x) = \int_H x_0^*(h)\, d\mu(h)$$

en contradicción con la desigualdad 2.6.

(2) Por último, probaremos que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ tiene también la propiedad $P(B)$. Si H tiene la propiedad $P(B)$, es obvio que también la tendrá $\mathrm{co}(H)$, es decir, dada la sucesión (b_n) en B, existe (b_{n_j}) tal que $(h(b_{n_j}))$ converge para cada $h \in \mathrm{co}(H)$. Tomamos ahora un elemento h en $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$. Existirá así una sucesión (h_m) en $\mathrm{co}(H)$ tal que $\lim\limits_m h_m = h$ en norma. Veamos así que existe

$$\lim_j h(d_{n_j}) = \lim_j (\lim_m h_m(d_{n_j})) = \alpha$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como sabemos que existe el límite $\lim_j h_m(b_{n_j}) = \alpha_m$ para cada m fijo, y que (α_m) está acotada debido a la acotación de H, podemos suponer que (α_m) converge a un número $\alpha \in \mathbb{R}$ (trabajando con una subsucesión si es necesario). Por tanto será:

$$|h(b_{n_j}) - \alpha| \leq |h(b_{n_j}) - h_m(b_{n_j})| + |h_m(b_{n_j}) - \alpha_m| + |\alpha_m - \alpha|$$

El primer sumando es menor que $\varepsilon/3$ si $m \geq m_0$ (por la convergencia en norma de (h_m) a h), el tercero es menor que $\varepsilon/3$ para $m \geq m_1$ por la convergencia de (α_n), y el segundo, una vez elegido un $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ es menor que $\varepsilon/3$ si $j \geq j_0(m)$. En suma $|h(b_{n_j}) - \alpha| < \varepsilon$ si $j \geq j_0$, luego $(h(b_{n_j}))$ converge para cada h en $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$. ■

Como consecuencia del teorema anterior, y de los ejemplos considerados en los apartados anteriores, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.21 *Los siguientes espacios tienen la propiedad KSf.*

1. $(C(K), t_p(D))$ *donde* K *es un espacio compacto que no contiene a* $\beta\mathbb{N}$ *y* D *es un subconjunto denso en* K *(en particular, si se cumple alguna de las condiciones del corolario 2.5.1).*

2. $(X, \sigma(X, B))$ *donde* B *es un conjunto normante en* B_{X^*} *y* X *no contiene una copia isomorfa de* $\ell^1(c)$ *(*$\Leftrightarrow \beta\mathbb{N} \not\subset (B_{X^*}, \omega^*)$*).*

3. (X^*, ω^*) *si* X *no contiene una copia de* ℓ^1.

También se cumple la propiedad KSf en los siguientes casos localizados:

1. (H, ω^*) *si* H *es un subconjunto de Pettis del dual de un espacio de Banach.*

2. $(H, \sigma(X, B))$ *si* H *es un subconjunto de un espacio de Banach* X *tal que* H *no contiene una sucesión equivalente a la base de* $\ell^1(c)$ *y* B *es un subconjunto normante de* B_{X^*}.

3. $(H, \sigma(X, B))$ *si* H *es un subconjunto* ω*-Lindelöf de un espacio de Banach* X *y* B *es un subconjunto normante de* B_{X^*}.

Una aplicación directa del teorema 2.20 es la siguiente: si K un espacio compacto y Hausdorff, D un subconjunto denso de K y $H \subset C(K)$ tiene la propiedad $P(D)$, entonces $\overline{\mathrm{co}(H)}^{t_p(D)}$ es un subconjunto $t_p(D)$-compacto y uniformemente acotado de $C(K)$, y se verifica

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{t_p(D)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$$

Esto se deduce directamente del teorema 2.20, tomando $X = C(K)$ y $B = D$ como subconjunto normante de $B_{C(K)^*}$.

Observación. Nótese que el caso $C(K)$ puede deducirse directamente del caso del Banach (teorema 2.20). Sin embargo, si hubiéramos procedido al revés, es decir, probando primero que los conjuntos con la propiedad $P(D)$ de $C(K)$ verifican la propiedad *KSf*, para después deducir el caso de los conjuntos H $\sigma(X,B)$-compactos y acotados de un espacio de Banach, con B normante, nos hubiéramos encontrado con un matiz nuevo: aunque la demostración del caso $C(K)$ sería totalmente análoga a la que hemos hecho, para deducir que la envoltura convexa y $\sigma(X,B)$-cerrada de H es un subconjunto $\sigma(X,B)$-compacto $\underline{\text{en } X}$, deberíamos hacerlo en dos pasos:

- primero, utilizar el caso del $C(K)$ para obtener que dicha envoltura es $\sigma(X,B)$-compacta en $C(B_{X^*})$;
- segundo, utilizar la fórmula $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$, para comprobar que realmente la $\sigma(X,B)$-envoltura se queda en el espacio X.

2.2.3. La propiedad débil de Radon-Nikodym

Hemos visto ya en una sección anterior propiedades que relacionaban la condición $P(D)$ con la integrabilidad en el sentido Pettis. En este apartado queremos seguir en esa línea de resultados, y demostrar ahora que la condición de ser H un subconjunto de $C(K)$ convexo y con la propiedad $P(D)$ es equivalente a que H tenga la propiedad débil de Radon-Nikodym (*WRNP*). Recordemos la definición de las propiedades de Radon-Nikodym.

Definición 2.22 *Un subconjunto H cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X tiene la WRNP (propiedad débil de Radon-Nikodym) si para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y cada medida vectorial $m : \Sigma \to X$ tal que*

$$\mathrm{AR}(m) := \left\{ \frac{m(E)}{\mu(E)} : E \in \Omega, \mu(E) > 0 \right\}$$

está contenido en H, existe una función integrable Pettis $f : \Omega \to X$ tal que

$$m(A) = \int_A f \, d\mu$$

para cada A en Σ. Cuando f puede tomarse integrable Bochner se dice que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym (RNP).

Necesitaremos también la noción que sigue.

Definición 2.23 *Dado un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ), se llama lifting de $L^\infty(\mu)$ a una aplicación $\rho : L^\infty(\mu) \to \mathcal{L}^\infty(\mu)$ que cumple:*

(i) *ρ es lineal y multiplicativa;*

(ii) *$\rho(f) \in [f]$ para cada $f \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$, donde denotamos por $[f]$ a la clase de equivalencia de f en $L^\infty(\mu)$;*

(iii) *$\rho(1) = 1$.*

A partir de las condiciones de la definición puede demostrarse que un lifting conserva el orden y la norma $\| \ \|_\infty$. Uno de los resultados principales referidos a los liftings es que existe un lifting para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) (ver [51], [41], y [10]), propiedad que utilizaremos en el siguiente teorema que aparece en [18, theorem 7].

Teorema 2.24 *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto acotado y $\sigma(X, B)$-compacto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *H tiene la propiedad $P(B)$.*

(2) *$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es un subconjunto acotado en norma y $\sigma(X, B)$-compacto de X que verifica la propiedad débil de Radon-Nikodym (WRNP).*

<u>Demostración</u>.
(1) $\Rightarrow$ (2) Por el teorema 2.20, si H tiene la propiedad $P(B)$, entonces también la tiene el convexo $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$, luego basta probar que si H es convexo y verifica la condición $P(B)$ entonces H tiene la *WRNP*.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo y $m : \Sigma \to X$ una medida vectorial tal que $AR(m)$ está contenido en H. Sea ρ un lifting en $L^\infty(\mu)$. Por argumentos similares a los que se utilizan para demostrar la equivalencia

$$\ell^1 \not\subset X \quad \Leftrightarrow \quad X^* \text{ tiene la } WRNP$$

(ver [43]), puede obtenerse una función $f : \Omega \to H$ que sea medible respecto a la σ-álgebra de Baire en $(H, \sigma(X, B))$, $Baire(H, \sigma(X, B))$, y que verifica las condiciones:

(a) $\rho(x^* \circ f) = x^* \circ f$

(b) $x^*(m(E)) = \int_E x^* \circ f \, d\mu, \, \forall E \in \Sigma$

para cada x^* en $\operatorname{span}(D) \subset X^*$, donde $D = \operatorname{co}(B \cup (-B))$ e identificamos cada elemento d en D con la aplicación $\hat{d} : X \to \mathbb{R}$ dada por $\hat{d}(f) = f(d)$.

Fijado ahora $\omega \in \Omega$, la aplicación de $C(H)$ en $\mathbb{R}$ que a cada $\phi \in C(H)$ hace corresponder $\rho(\phi \circ f)(\omega)$ es lineal, continua con norma ≤ 1 y multiplicativa, luego existe un único elemento h_ω en H tal que:

$$\rho(\phi \circ f)(\omega) = \phi(h_\omega) \quad \text{para cada } \phi \text{ en } C(H)$$

Definimos así $\rho_H(f) : \Omega \to H$ mediante $\rho_H(f)(\omega) = h_\omega$. En adelante denotaremos como g la aplicación $\rho_H(f)$, que es medible respecto a $Baire(H, t_p(D))$ por la definición. Dado $x^* \in \operatorname{span}(D)$, se tiene que $x^* \circ f = \rho(x^* \circ f) = x^* \circ g$, y por tanto $f = g$. Llamamos $\nu = \mu f^{-1} = \mu g^{-1}$ a la medida imagen de f. Utilizando el teorema 2.1 de [10] se obtiene que f es medible respecto a la σ-álgebra de Borel $Borel(H, \sigma(X, B))$ y que ν es una medida de Radon en $(H, \sigma(X, B))$.

Finalmente, como H tiene la propiedad $P(D)$, el teorema 2.18, nos asegura que $i : H \to X$ es universalmente escalarmente medible, y en particular para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ i$ es ν-medible. Por tanto, f es μ-escalarmente medible. Además, usando de nuevo el teorema 2.18, dados $A \in \Sigma^+$ y el subconjunto $f(A)$ de H se tiene que existe f_A en X tal que para cada x^* en X^* se cumple la igualdad

$$x^*(f_A) = \int_{f(A)} x^*|_H \, d\nu = \int_{f(A)} x^*|_H \, d(\mu f^{-1}) = \int_A x^* \circ f \, d\mu$$

y por la condición (b) anterior, se cumple $f_A = m(A) = (P) - \int_A f \, d\mu$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Basta probar que si H es convexo con la *WRNP*, entonces H tiene la propiedad $P(B)$. Tomamos un subconjunto numerable A de D, y consideramos la

aplicación restricción $R_{\overline{A}} : C(B_{X^*}) \to C(\overline{A})$. Sea ν una probabilidad de Radon en el subconjunto $t_p(A)$-compacto $R_{\bar{A}}(H)$. En estas condiciones existe una probabilidad de Radon μ en $(H, \sigma(X,B))$ tal que ν es la medida imagen por $R_{\bar{A}}$ de μ (ver [27, apéndice B]).

Para cada conjunto de Borel C en $(H, \sigma(X,B))$, sea $m(C)$ el elemento de X definido por

$$m(C)(d) = \int_C h(d)\, d\mu(h)$$

Así $m : Borel(H, \sigma(X,B)) \to X$ es una medida vectorial μ-continua y cumple que $AR(m) \subset H$, luego por hipótesis existirá una función Pettis integrable $f : H \to X$ tal que $f(H) \subset H$, y que cumple $m(C) = (P) - \displaystyle\int_C f\, d\mu$ para cada $C \in Borel(H)$. Sea ahora $g = R_{\overline{A}} \circ f$. Se cumple así que $R_{\overline{A}}(m(C)) = \int_C g\, d\mu$, y además para cada $d \in A$ y cada conjunto de Borel C de $(H, \sigma(X,B))$

$$\begin{aligned}\int_C \hat{d}(h)\, d\mu(h) &= \int_C h(d)\, d\mu(h) = R_{\overline{A}}(m(C))(d) = \\ &= \hat{d}(R_{\overline{A}}(m(C)) = \int_C \hat{d}(g(h))\, d\mu(h)\end{aligned}$$

Así para cada $d \in A$ se cumple que $\hat{d}(h) = \hat{d}(g(h))$ en casi todo punto. Al ser A numerable existirá un subconjunto μ-nulo N de H, tal que $\hat{d}(h) = \hat{d}(g(h))$, $\forall d \in A$ y $\forall h \in H \setminus N$. Las aplicaciones g y $R_{\overline{A}}|_H$ están definidas de H en $C(\overline{A})$ y coinciden sobre los elementos de A para cada h en $H \setminus N$, por lo que g y $R_{\overline{A}}|_H$ coinciden salvo en un conjunto de μ-medida nula. Por su definición g es escalarmente medible luego $R_{\overline{A}}|_H$ también lo será, por lo que para cada φ en $(C(\overline{A}))^*$, $\varphi \circ R_{\overline{A}}|_H$ es μ-medible. Entonces $\varphi|_{R_{\overline{A}}(H)}$ es ν-medible utilizando [67, teorema I.5.9], y así tendremos que $R_{\overline{A}}(H)$ tiene la propiedad $P(A)$ (utilizando el teorema 2.20). Esto, junto con la proposición 2.3, concluye la demostración. ■

Podemos demostrar así la siguiente consecuencia.

Corolario 2.24.1 *Sea X un espacio de Banach y B es un subconjunto normante de B_{X^*}. Si H es un subconjunto convexo, acotado, $\sigma(X,B)$-compacto de X y tal que no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$, entonces H tiene la WRNP. En particular, si X no contiene una copia de $\ell^1(c)$, entonces todo subconjunto convexo, acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de X tiene la WRNP.*

<u>Demostración</u>. Se deduce del teorema 2.24 y de la proposición 2.14. ■

Corolario 2.24.2 *Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff que no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$. Entonces para cada subconjunto D denso en K se verifica que todo subconjunto acotado, convexo y $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ verifica la WRNP.*

Demostración. Se deduce del teorema 2.24 y del corolario 2.5.1. ■

Nótese que, en particular, el corolario anterior es válido si se cumple alguna de las condiciones (1)–(5) del corolario 2.5.1.

2.2.4. Otra caracterización de la propiedad $P(D)$. Resultados de tipo Krein-Milman

En el teorema 2.20 hemos puesto de manifiesto que si H tiene la propiedad $P(B)$, entonces H tiene la propiedad *KSf*. Aquí analizamos una especie de recíproco de esta afirmación, así como la validez de fórmulas del tipo

$$H = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(A))}^{\|\ \|}$$

para conjuntos convexos y $\sigma(X,B)$-compactos que verifican la propiedad $P(B)$. Como colofón de la sección tendremos demostrada la equivalencia de las siguientes condiciones.

(α) H tiene la propiedad $P(B)$.

(β) Para cada subconjunto $\sigma(X,B)$-compacto y convexo A de H se cumple

$$A = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(A))}^{\|\ \|}$$

donde $\mathrm{ext}(A)$ es el conjunto de puntos extremales de A.

(γ) Para cada subconjunto A de H, que sea $\sigma(X,B)$-compacto se cumple

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|}$$

La implicación (α) $\Rightarrow$ (β) se demuestra en el teorema 2.25, (β) $\Rightarrow$ (γ) en el teorema 2.26 y (γ) $\Rightarrow$ (α) en el teorema 2.28. Nuestras pruebas se basan en algunas ideas que Haydon utilizó para demostrar propiedades análogas para subconjuntos ω^*-compactos de duales cuyo predual no contiene a ℓ^1.

Recordemos también dos resultados clásicos que necesitaremos

- El teorema de Milman (ver [25, chapter 9]) que nos dice: si K es un subconjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo y F es un subconjunto cerrado de K tal que $\overline{\mathrm{co}(F)} = K$, entonces F contiene todos los puntos extremales de K.

- El teorema de Bishop-Phelps ([24, chapter 1]) que afirma que el conjunto de funcionales del dual de un espacio de Banach X que alcanzan su máximo en un subconjunto cerrado, acotado y convexo fijo de X es denso en X^*.

Teorema 2.25 *Sea H un subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de un espacio de Banach X, donde B es un subconjunto normante de B_{X^*}. Si H es convexo y tiene la propiedad $P(B)$, entonces H es la envoltura cerrada y convexa en norma de sus puntos extremales, es decir,*

$$H = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(H))}^{\|\ \|}$$

Demostración. Denotamos $A = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(H))}^{\|\ \|}$, y suponemos por reducción al absurdo que $H \neq A$. En estas condiciones existirá $\varphi \in X^*$ tal que

$$\sup_{h\in H} \varphi(h) > \sup_{x\in A} \varphi(x) \tag{2.7}$$

El teorema de Bishop-Phelps asegura que puede tomarse φ_0 en X^* que verifica la desigualdad anterior y además alcanza su máximo en H. Supondremos por comodidad que dicho máximo vale 1.

Sea ahora $F = \{\, h \in H : \varphi_0(h) = 1 \,\}$ que es un subconjunto no vacío y convexo de H. Definimos así el $\sigma(X,B)$-compacto y convexo $C = \overline{F}^{\sigma(X,B)}$ y el conjunto de extremales $E = \mathrm{ext}(C)$. Nótese que para cada $e \in E$ se cumple $\varphi_0(e) < 1$ (en otro caso, sería $E \cap F \neq \emptyset$, pero todo punto de $E \cap F$ es necesariamente un punto extremal de H, con lo que se cumpliría $\sup\limits_{x\in A} \varphi_0(x) = 1$, en contradicción con la ecuación (2.7)). Por tanto se tiene:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E \cap \overline{\left\{ h \in E : \varphi_0(h) < 1 - \frac{1}{n} \right\}}^{\sigma(X,B)} \right)$$

E es un espacio de Baire con la $\sigma(X,B)$-topología relativa (ver [20, 27.9]) por lo que existirán un número $n \in \mathbb{N}$ y un $\sigma(X,B)$-abierto $O \subset E$ que está contenido también en un conjunto $E_n = \overline{\{h \in E : \varphi_0(h) < 1 - 1/n\}}^{\sigma(X,B)}$. Por el teorema 2.18, tenemos que $\varphi_0|_H \in B_r(H, \sigma(X,B))$ por lo que la restricción de φ_0 a la $\sigma(X,B)$-clausura de

O tiene algún punto de $\sigma(X,B)$-continuidad. Elegimos así un subconjunto $\sigma(X,B)$-cerrado U en C tal que $(\mathrm{int}_E U)\cap O \neq \emptyset$ y tal que $\mathrm{osc}(\varphi_0|_U) < \dfrac{1}{2n}$ ($\mathrm{int}_E U$ denota el interior de U en la topología $\sigma(X,B)$ relativa en E).

Teniendo en cuenta que

$$C = \overline{\mathrm{co}(E)}^{\sigma(X,B)} = \mathrm{co}\left(\overline{\mathrm{co}(U)}^{\sigma(X,B)}, \overline{\mathrm{co}(E\setminus U)}^{\sigma(X,B)}\right),$$

y como $E\setminus U$ tiene intersección vacía con el $\sigma(X,B)$-abierto $(\mathrm{int}_E U)\cap O$ de E, el teorema de Milman nos dice que $\overline{\mathrm{co}(E\setminus U)}^{\sigma(X,B)}$ está contenido estrictamente en C, y por tanto F contiene puntos que no están en $\overline{\mathrm{co}(E\setminus U)}^{\sigma(X,B)}$. Sea así $h_0\in F$ con $h_0 = \lambda h_1 + (1-\lambda)h_2$, siendo $h_1 \in \overline{\mathrm{co}(U)}^{\sigma(X,B)}$ y $h_2 \in \overline{\mathrm{co}(E\setminus U)}^{\sigma(X,B)}$ y $\lambda > 0$. Como $\varphi_0(h_0) = 1$ y $\varphi_0(h_1)\leq 1$ y $\varphi_0(h_2)\leq 1$, basta probar que $\varphi_0(h_1) < 1$ para llegar a una contradicción. Para ello tomamos la probabilidad de Radon δ_{h_1} definida en U. Tendremos que

$$\varphi_0(h_1) = \int_U \varphi(h)\, d\delta(h)$$

Como $U\cap E_n \neq \emptyset$ y la oscilación de φ_0 en U es menor que $1/2n$, $\varphi_0(h)$ será menor que $1-\frac{1}{2n}$ para cada h en U, luego $\varphi_0(h_1) < 1$, en contradicción con lo anterior. ∎

Usaremos de nuevo el teorema de Milman para probar la implicación $(\beta)\Rightarrow(\gamma)$ de nuestro esquema general.

Teorema 2.26 *Sea H un subconjunto convexo y $\sigma(X,B)$-compacto de X tal que para cada subconjunto F de H que sea $\sigma(X,B)$-cerrado y convexo se cumple que*

$$F = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(F))}^{\|\ \|}$$

Entonces para cada subconjunto A de H $\sigma(X,B)$-cerrado se cumple que

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|}$$

<u>Demostración</u>. Sea A un subconjunto $\sigma(X,B)$-compacto de H. Entonces:

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)} \overset{(1)}{=} \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)}))}^{\|\ \|} \overset{(2)}{\subset} \overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|}$$

donde la igualdad (1) se obtiene a partir de la hipótesis y el contenido (2) gracias al teorema de Milman. Esto nos dice que las clausuras de $\mathrm{co}(A)$ en la norma y en la topología $\sigma(X,B)$ coinciden. ∎

Para terminar este apartado probaremos que si se cumple la condición (γ), entonces H tiene la propiedad $P(B)$. Para este resultado desarrollaremos la proposición siguiente que se basa en una de Talagrand ([76, 7-3-5]) que relaciona los conjuntos que no son de Pettis con la bola unidad del espacio ℓ^∞.

Lema 2.27 *Sea K un espacio Hausdorff compacto, $D \subset K$ denso y H un subconjunto uniformemente acotado, convexo y numerablemente compacto para la topología $t_p(D)$ en $C(K)$. Si $\widehat{D} = \{\, \hat{d} : H \to \mathbb{R} : d \in D \,\}$ contiene una sucesión independiente en H, entonces existe una función $f : H \to [-1,1]^{\mathbb{N}}$ continua y afín tal que para algún $\varepsilon > 0$ se cumple que $[-\varepsilon, \varepsilon]^{\mathbb{N}} \subset f(H)$.*

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que H está acotado uniformemente por 1. Sea $(\hat{d}_n) \in \widehat{D}$ una sucesión independiente en H. Por tanto, existen $\alpha < \beta$ tales que si P y Q son dos subconjuntos finitos y disjuntos de $\mathbb{N}$ se tiene:

$$\left(\bigcap_{n\in P}\{h \in H : h(d_n) < \alpha\}\right) \cap \left(\bigcap_{n\in Q}\{h \in H : h(d_n)) > \beta\}\right) \neq \emptyset$$

Como H está uniformemente acotado por 1 se puede elegir $-1 < \alpha < \beta < 1$. Definimos así

$$\phi : H \to [-1,1]^{\mathbb{N}} \quad \text{ por } \phi(h) = (h(d_n))$$

que es continua respecto a las topologías $t_p(D)$ y t_p. Veamos que $[\alpha,\beta]^{\mathbb{N}} \subset \phi(H)$ (y por lo tanto con un sencillo cambio obtendríamos una función afín f tal que $[-\varepsilon,\varepsilon]^{\mathbb{N}}$ está contenido en $f(H)$ para algún $\varepsilon > 0$).

Tomamos $(y_n) \in [\alpha,\beta]^{\mathbb{N}}$, es decir, $\alpha \leq y_n \leq \beta$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Debemos obtener h en H con $h(d_n) = y_n$. En primer lugar es fácil obtener h_1 en H con $h_1(d_1) = y_1$ ya que basta tomar h_s, h_i en H con $h_s(d_1) > \beta$ y $h_i(d_1) < \alpha$ (que existen por la independencia) con lo que cierta combinación convexa de h_s y h_i, que también está en H, cumple la propiedad deseada. Veamos además que pueden elegirse h_1^α, h_1^β en H tales que $h_1^\alpha(d_1) = h_1^\beta(d_1) = y_1$ y $h_1^\alpha(d_2) < \alpha$ y $h_1^\beta(d_2) > \beta$. Obtendríamos h_1^α de la forma anterior tomando h_s y h_i con $h_s(d_2), h_i(d_2) < \alpha$, y h_2^β tomando h_s y h_i de modo que $h_s(d_2), h_i(d_2) > \beta$ (nótese que aquí se usa de nuevo la independencia).

Por inducción obtenemos h_n^α y h_n^β en H con $h_n^\alpha(d_j) = h_n^\beta(d_j) = y_j$ para $j \leq n$ y con $h_n^\alpha(d_{n+1}) < \alpha$, $h_n^\beta(d_{n+1}) > \beta$. De aquí, cierta combinación convexa de h_n^α y h_n^β, que llamamos h_{n+1} es un elemento de H que cumple $h_{n+1}(d_m) = y_m$ para $m \leq n+1$. Este proceso inductivo nos permite obtener una sucesión (h_n) en H con $h_n(d_m) = y_m$

para $m \leq n$. Elegimos un punto de acumulación $h \in H$ de (h_n) en la topología $t_p(D)$ (recuérdese que H es numerablemente compacto para dicha topología). Fijado $j \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, consideramos el $t_p(D)$-entorno de h,

$$U(h, \delta) = \{\, g \in H : |g(d_j) - h(d_j)| < \delta \,\}$$

Podemos suponer que cierto $h_m \in U(h, \delta)$ para cierto $m > j$, y por lo tanto

$$|h(d_j) - y_j| < \delta$$

Por la arbitrariedad de δ y de j se tiene que $h(d_j) = y_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Nótese que por la construcción de f, ésta es afín. ■

Para demostrar el siguiente teorema necesitamos conocer la existencia de un subconjunto ω^*-compacto de ℓ^∞ tal que sus envolturas convexas y cerradas en las topologías de la norma y débil* no coincidan. En realidad dicho conjunto existe en cualquier dual de un espacio de Banach X^* con tal de que X contenga un subespacio isomorfo a ℓ^1. A continuación construimos un conjunto de ese tipo siguiendo las ideas de Haydon, [39], que a su vez se basan en [62]. Para ello consideramos una aplicación cociente $u : \ell^1 \to C([0,1])$ (existe por ser $C([0,1])$ separable); si para cada t de $[0,1]$ denotamos por $\delta(t)$ la medida que vale 1 en t y 0 en el resto de puntos, tenemos que la envoltura ω^*-cerrada y convexa de $\Delta := \{\, \delta_t : t \in [0,1] \,\}$ en $M[0,1] = C[0,1]^*$ es distinta de la envoltura cerrada y convexa en norma (la primera contiene todas las probabilidades de $M[0,1]$ mientras que la segunda contiene sólo medidas atómicas). Basta ahora considerar el subconjunto $S = u^*(\Delta)$ de ℓ^∞ que es ω^*-compacto y verifica $\overline{\mathrm{co}(S)}^{\omega^*} \neq \overline{\mathrm{co}(S)}^{\|\ \|}$.

Teorema 2.28 *Sean X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H un subconjunto convexo, acotado y $\sigma(X,B)$ de X. Supongamos que cada subconjunto A $\sigma(X,B)$-compacto de X verifica*

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|},$$

Entonces H tiene la propiedad $P(B)$.

<u>Demostración</u>. Por reducción al absurdo, si H no tiene la propiedad $P(B)$, el teorema 2.5 nos asegura que $\widehat{B}$ posee alguna sucesión independiente en H, y por lo tanto, por el lema 2.27, existe una aplicación continua y afín $f : H \to [-1,1]^{\mathbb{N}} = B_{\ell^\infty}$ tal

que para cierto $\varepsilon > 0$, se tiene $[-\varepsilon, \varepsilon]^{\mathbb{N}} \subset f(H)$. Nótese que f es continua tanto para las topologías $\sigma(X, B)$ y $t_p(\mathbb{N})$, como para las topologías de la norma en H y en B_{ℓ^∞}. Por el comentario previo al teorema, sabemos que ℓ^∞ contiene algún subconjunto ω^*-compacto S tal que

$$\overline{\mathrm{co}(S)}^{\|\ \|} \neq \overline{\mathrm{co}(S)}^{\omega^*} \subset \overline{\mathrm{co}(S)}^{t_p} \tag{2.8}$$

Por tanto, $\varepsilon \cdot B_{\ell^\infty}$ también contendrá un subconjunto S con la misma propiedad, y por tanto, también $f(H)$. Elegimos un subconjunto A de H que sea $\sigma(X, B)$-compacto y tal que $f(A) = S$. Entonces se cumple que

$$f(\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)}) = \overline{f(\mathrm{co}(A))}^{t_p} = \overline{\mathrm{co}(S)}^{t_p}$$
$$f(\overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|}) \subset \overline{f(\mathrm{co}(A))}^{\|\ \|} = \overline{\mathrm{co}(S)}^{\|\ \|}$$

y de la ecuación (2.8), deducimos que $f(\overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|}) \neq f(\overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)})$, de donde

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^{\|\ \|} \neq \overline{\mathrm{co}(A)}^{\sigma(X,B)}$$

en contradicción con la hipótesis. ■

2.3. La propiedad $P(D)$ y los duales de espacios de Banach que no contienen a ℓ^1

En [66] se prueba que las dos condiciones siguientes son equivalentes para un espacio de Banach X:

(a) *X no contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.*

(b) *Para cada subconjunto ω^*-compacto H de X^*, y cada elemento x^{**} de X^{**}, la aplicación $x^{**}|_H$ tiene un punto de ω^*-continuidad.*

En el contexto del teorema 1.14, esto es una consecuencia inmediata de la equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (9) (tomando $K = (B_{X^*}, \omega^*)$ y $Z = B_X$), ya que la condición (b) anterior equivale a que se cumpla

$$B_{X^{**}} = \overline{B_X}^{t_p(B_{X^*})} \subset B_r(B_{X^*})$$

En relación con este resultado, Farmaki define en [30] los conjuntos débilmente fragmentados del dual de un espacio de Banach. Un subconjunto H de X^* que sea ω^*-compacto es débilmente fragmentado si, y sólo si, se verifica:

Para cada subconjunto ω^*-compacto y no vacío A de H, y cada $x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}|_A$ tiene algún punto de ω^*-continuidad

(ver [30, proposition 2]). Teniendo en cuenta la equivalencia de las condiciones (a) y (b) anteriores, y el ejemplo 2.9, se tiene que todo subconjunto ω^*-compacto y débilmente fragmentado del dual de un espacio de Banach tiene la propiedad $P(B_X)$. Muchas de las propiedades que Farmaki prueba en dicho artículo (por ejemplo, la igualdad de envolturas convexas y cerradas en las topologías ω^* y de la norma para conjuntos débilmente fragmentados, o el hecho de que un conjunto débilmente fragmentado y convexo coincide con la envoltura convexa y cerrada en norma de sus puntos extremales) se deducen de las correspondientes propiedades válidas para conjuntos con la propiedad $P(D)$, que son válidas en un contexto más general que el de los duales.

Como ya señalamos en el ejemplo 2.9, cualquier subconjunto ω^*-compacto del dual X^* de un espacio de Banach X tal que X no contiene una copia isomorfa de ℓ^1 tiene la propiedad $P(B_X)$. En este apartado probaremos que si H es un subconjunto de $C(K)$ con la propiedad $P(D)$, entonces H es homeomorfo mediante una aplicación afín a un subconjunto ω^*-compacto del dual de un espacio de Banach que no contiene una copia isomorfa de ℓ^1. La demostración se hace en dos etapas. En la primera etapa, que detallamos a continuación, demostraremos que cualquier conjunto con la propiedad $P(D)$ es homeomorfo mediante una aplicación afín a un conjunto de Pettis del dual de un espacio de Banach. En la segunda etapa, utilizaremos un resultado de Farmaki ([30]) que afirma que cualquier conjunto de Pettis es homeomorfo mediante una aplicación afín a un subconjunto ω^*-compacto del dual X^* de un espacio de Banach que no contiene una copia de ℓ^1.

Dados el compacto K y $D \subset K$ denso, consideramos la aplicación:

$$i : C(K) \to \ell^\infty(D) = (\ell^1(D))^* \tag{2.9}$$

definida por $i(\varphi) = (\varphi(d))_{d \in D}$.

Proposición 2.29 *La aplicación i tiene las siguientes propiedades:*

(1) i es una isometría lineal de $(C(K), \|\ \|_\infty)$ en $(\ell^\infty(D), \|\ \|_\infty)$.

(2) i es $t_p(D) - t_p$ continua.

(3) Si H es un subconjunto acotado de $C(K)$, la aplicación i establece un homeomorfismo entre $(H, t_p(D))$ y $(i(H), \omega^*)$.

Demostración.

(1) La linealidad es inmediata. Además i es isometría con las normas usuales: para cada $\varphi \in C(K)$ se cumple

$$\|i(\varphi)\|_\infty = \|(\varphi(d))\|_\infty = \sup\{\, |\varphi(d)| : d \in D\,\} = \|\varphi\|_\infty$$

donde en la última igualdad se ha usado que D es denso en K.

(2) Dada una red (φ_α) se tiene que,

$$(\varphi_\alpha) \to \varphi \text{ en } t_p(D) \quad \Longrightarrow \quad \forall d \in D,\ \varphi_\alpha(d) \to \varphi(d)$$

y esta última condición nos da la convergencia puntual en $\ell^\infty(D)$ de $i(\varphi_\alpha) = (\varphi_\alpha(d))$ a $i(\varphi) = (\varphi(d))$.

(3) Al ser i una isometría, tendremos que $i|_H : H \to i(H)$ es biyectiva. Por la definición de la topología $t_p(D)$ se tiene que si (φ_α) es una red en H y $\varphi \in H$, entonces:

$$(\varphi_\alpha) \to \varphi \text{ en } t_p(D) \Longrightarrow \forall d \in D,\ \varphi_\alpha(d) \to \varphi(d) \tag{2.10}$$

Por ser H uniformemente acotado, tendremos que existe $M > 0$ tal que:

$$\|\varphi_\alpha(d) - \varphi(d)\| < M \quad \forall \alpha \quad \forall d \in D \tag{2.11}$$

Hemos de comprobar que $(\varphi_\alpha(d)) \to (\varphi(d))$ en la topología ω^* de $\ell^\infty(D)$. Sea (λ_d) un elemento de $\ell^1(D)$, es decir, tal que

$$\sum_D |\lambda_d| < \infty \tag{2.12}$$

Entonces se cumple que $\sum_D |\lambda_d(\varphi_\alpha(d) - \varphi(d))| \to 0$, utilizando las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12), lo que nos da la convergencia deseada.

Obviamente, si $i(\varphi_\alpha) \to i(\varphi)$ en la topología ω^*, donde (φ_α) y (φ) están en H, se cumple que $\varphi_\alpha(d) \to \varphi(d)$, $\forall d \in D$, es decir, $\varphi_\alpha \to \varphi$ en la topología $t_p(D)$. ∎

Demostraremos ahora que la aplicación i definida en la ecuación 2.9 transforma conjuntos con la propiedad $P(D)$ en conjuntos de Pettis; y recíprocamente, si la imagen por i de un subconjunto de X es un conjunto de Pettis, entonces dicho subconjunto tiene la propiedad $P(D)$. Utilizaremos para ello el siguiente lema que aparece en [76, supplement 7-3-4].

Lema 2.30 *Sea K un conjunto compacto, X un espacio de Banach y $f : K \to X^*$ una aplicación ω^*-continua. Entonces f es universalmente escalarmente medible si, y sólo si, $f(K)$ es un conjunto de Pettis.*

<u>Demostración</u>. Sean $\tilde{f} : K \to f(K)$ la sobreyección continua que determina f y $j : f(K) \to X^*$ la inyección canónica, de modo que $f = j \circ \tilde{f}$.

Si $f(K)$ es un conjunto de Pettis, entonces j es universalmente escalarmente medible. Si μ es una probabilidad de Radon en K, la probabilidad imagen por $\tilde{f}$, ν, definida mediante $\nu(E) = \mu(\tilde{f}^{-1}(E))$ es también de Radon, y por lo tanto, dado $x^{**} \in X^{**}$, la μ-medibilidad de $x^{**} \circ f = (x^{**} \circ i) \circ \tilde{f}$ se obtiene de la medibilidad de $x^{**} \circ i$ y de $\tilde{f}$.

Recíprocamente, partiendo de la medibilidad escalar universal de f se llega a la de i utilizando [70, teorema I.5.9]. ■

Proposición 2.31 *Sea H un subconjunto $t_p(D)$-compacto y acotado de $C(K)$. H tiene la propiedad $P(D)$ si, y sólo si, $i(H)$ es un conjunto de Pettis en $\ell^\infty(D)$. En consecuencia, todo conjunto con la propiedad $P(D)$ es homeomorfo mediante una aplicación afín a un conjunto de Pettis del dual de un espacio de Banach.*

<u>Demostración</u>. Sea $j : H \to C(K)$ la inyección canónica. Si H tiene la propiedad $P(D)$, entonces j es universalmente escalarmente medible por el teorema 2.18, y por lo tanto dada μ probabilidad en H y un elemento y^{**} de $(\ell^1(D))^{**}$ se tiene que

$$y^{**} \circ i|_H = (y^{**} \circ i) \circ j$$

es μ-medible al ser $y^{**} \circ i$ un elemento de $C(K)^*$, luego $i|_H : H \to (\ell^1(D))^*$ es universalmente escalarmente medible, lo que nos da que $i(H)$ es un conjunto de Pettis por el lema 2.30.

Recíprocamente, si $i|_H : H \to (\ell^1(D))^*$ es universalmente escalarmente medible, y ϕ es un elemento de $C(K)^*$, se tiene que $\phi \circ j = (\phi \circ i^{-1}) \circ i$, donde i^{-1} se define de $i(H)$ en H, luego j es también universalmente escalarmente medible, y H tiene la propiedad $P(D)$, utilizando el teorema 2.18 de nuevo. La última afirmación del enunciado se obtiene teniendo en cuenta la proposición 2.29. ■

Necesitaremos el siguiente teorema de Farmaki ([30, corollary 13]), que enunciamos sin demostración, para completar la prueba del resultado que buscamos.

Teorema 2.32 (Farmaki) *Todo conjunto de Pettis (H, ω^*) del dual de un espacio de Banach es tal que su envoltura ω^*-cerrada y absolutamente convexa es homeomorfa,* *mediante una aplicación afín, a un subconjunto ω^*-compacto del dual X^* de un espacio de Banach X que no contiene una copia isomorfa de ℓ^1.*

Proposición 2.33 *Todo conjunto con la propiedad $P(D)$ es tal que su envoltura $t_p(D)$-cerrada y absolutamente convexa es homeomorfa, mediante una aplicación afín, a un subconjunto ω^*-compacto del dual de un espacio de Banach que no contiene una copia isomorfa de ℓ^1. En consecuencia, todo conjunto con la propiedad $P(D)$ es también homeomorfo a un subconjunto ω^*-compacto del dual de un espacio de Banach que no contiene a ℓ^1.*

Demostración. Si H tiene la propiedad $P(D)$, entonces el teorema 2.20 nos permite asegurar que su envoltura absolutamente convexa y $t_p(D)$-cerrada es también un conjunto con la propiedad $P(D)$. Basta aplicar así los teoremas 2.31 y 2.32. ■

Para completar este apartado, veamos cómo la isometría i de la ecuación (2.9) puede servir para reducir la demostración de algunas de las propiedades obtenidas para los conjuntos con la propiedad $P(D)$ al caso del dual de un espacio de Banach X. Por ejemplo, sabiendo que si H es un conjunto de Pettis del dual de un espacio de Banach se cumple

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\omega^*} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$$

(esto lo demuestra Talagrand en [76, theorem 7-3-3]), puede probarse que si H es un subconjunto norma-acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de un espacio de Banach que tiene la propiedad $P(B)$, entonces

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$$

y además este último conjunto es $\sigma(X,B)$-compacto. En efecto, por un lado se tiene:

$$i\left(\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}\right) \subset \overline{i(\mathrm{co}(H))}^{\omega^*} = \overline{\mathrm{co}(i(H))}^{\omega^*} =$$

$$= \overline{\mathrm{co}(i(H))}^{\|\ \|} = \overline{i(\mathrm{co}(H))}^{\|\ \|}$$

donde el primer contenido se da por ser i continua; la primera igualdad, por ser i lineal; la segunda igualdad, por ser $i(H)$ un conjunto de Pettis en un dual (por la proposición 2.31 y utilizando el resultado ya comentado de Talagrand), y la última igualdad, por la linealidad de i.

Por otro lado, como i es una isometría tendremos que:

$$\overline{i(\mathrm{co}(H))}^{\|\ \|} = i\left(\overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}\right) \subset i\left(\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}\right)$$

Por lo tanto

$$i(\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}) = \overline{\mathrm{co}(i(H))}^{\omega^*}$$

Así $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es $\sigma(X,B)$-compacto ya que es homeomorfo al subconjunto ω^*-compacto $\overline{\mathrm{co}(i(H))}^{\omega^*}$. Además, de las ecuaciones anteriores se deduce que

$$i(\overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}) = i(\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)})$$

luego $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$.

Capítulo 3

Fragmentabilidad

3.1. Introducción

La noción de fragmentabilidad apareció por primera vez en un artículo de Jayne y Rogers ([47]).

Definición 3.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico y ρ una métrica en X. Se dice que (X,τ) está fragmentado por ρ (o que es ρ-fragmentado) si para cada subconjunto no vacío A de X y para cada $\varepsilon > 0$ existe un τ-abierto $U \subset X$ tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $diam_\rho(U \cap A) \leq \varepsilon$.*

Puede comprobarse que (X,τ) está fragmentado en norma si, y sólo si, cada subconjunto *cerrado* y no vacío de X contiene τ-abiertos relativos no vacíos con ρ-diámetro arbitrariamente pequeño.

En esta parte introductoria expondremos algunos resultados conocidos sobre fragmentabilidad, y se enunciarán los principales resultados del capítulo. Como referencia genérica, estos primeros resultados se encuentran en [54].

En el caso de un espacio de Banach, cuando se toma τ como la topología débil, y la métrica está dada por la norma, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2 *Cualquier subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach está fragmentado por la norma.*

Otra situación interesante en la que puede presentarse la fragmentabilidad es en un espacio de Banach dual X^* donde τ es la topología ω^* y la métrica es la de la norma. En este caso no siempre es cierto que un subconjunto ω^*-compacto está fragmentado en norma; de hecho se cumple lo siguiente.

Proposición 3.3 *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(1) Todo subconjunto ω^*-compacto de X^* está fragmentado en norma.

(2) (B_{X^*},ω^*) está fragmentado en norma.

(3) X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym (es decir, X es un espacio de Asplund).

En el citado trabajo ([54]), Namioka prueba algunas interesantes propiedades de los subconjuntos ω^*-compactos y norma-fragmentados, que recogemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.4 *Sea X un espacio de Banach y H un subconjunto ω^*-compacto y fragmentado en norma de X^*. Entonces se cumple:*

(1) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\omega^*} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$

(2) El cierre absolutamente convexo y ω^*-cerrado de H es también fragmentado en norma.

El concepto de espacio compacto de Radon-Nikodym fue introducido por Namioka en [54], donde los estudia con detalle.

Definición 3.5 (Namioka) *Un espacio topológico compacto y Hausdorff es un compacto de Radon-Nikodym (más brevemente, compacto RN) si es homeomorfo a un subconjunto ω^*-compacto y fragmentado por la norma del dual de un espacio de Banach.*

En este trabajo utilizaremos las siguientes propiedades de los compactos de Radon-Nikodym.

Proposición 3.6 (Namioka) *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Todo compacto RN es secuencialmente compacto.*

2. *Un espacio compacto y Hausdorff Z es un compacto RN si, y sólo si, está fragmentado por una métrica que es inferiormente semicontinua respecto a la topología original de Z.*

A la vista de los resultados sobre fragmentabilidad para las topologías ω y ω^*, es natural preguntarse sobre la fragmentabilidad en norma de subconjuntos de un espacio de Banach que sean compactos respecto a la topología dada por un subconjunto normante de B_{X^*}. Para ello, nos situaremos en el contexto de los espacios $C(K)$.

Si K es un espacio compacto de Hausdorff, y D es denso en K, entonces la norma de $C(K)$ es inferiormente semicontinua respecto de la topología $t_p(D)$. De esta forma, después de la proposición 3.6, la fragmentabilidad de un subconjunto $t_p(D)$-compacto se puede mirar como una herramienta, entre otras cosas, para conocer su carácter secuencial (de aquí en adelante, siempre que nos refiramos a la fragmentabilidad de subconjuntos $t_p(D)$-compactos de $C(K)$ estaremos considerando la métrica dada por la norma del supremo). En este contexto, Cascales y Vera han demostrado que cualquier subconjunto $t_p(D)$-compacto, uniformemente acotado y fragmentado respecto a la norma, tiene la propiedad $P(D)$ (corolario 3.11.1). En particular, la primera parte de la proposición 3.4 es una consecuencia directa de la correspondiente propiedad para conjuntos con la propiedad $P(D)$ que se probó en el teorema 2.20; es más, en [18], se demuestra el siguiente teorema que aclara la diferencia entre los conjuntos fragmentados y conjuntos con la propiedad $P(D)$.

Teorema 3.7 (Cascales y Vera) *Sea K un espacio compacto y Hausdorff, D un subconjunto denso de K y H un subconjunto uniformemente acotado y $t_p(D)$-compacto de $C(K)$. Entonces H está fragmentado por la norma de $C(K)$ si, y sólo si, $\overline{\mathrm{co}(H)}^{t_p(D)}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Después del teorema 2.24, podemos afirmar que lo que le falta a un conjunto con la propiedad $P(D)$ para ser fragmentado en norma, es exactamente lo mismo que le falta a un conjunto con la propiedad débil de Radon-Nikodym para tener la propiedad de Radon-Nikodym.

También en [18] se demuestran los siguientes resultados.

Teorema 3.8 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff, D un subconjunto denso en K y H un subconjunto de $C(K)$ con la propiedad $P(D)$. Si $(H, t_p(K))$ es Lindelöf, entonces $(H, t_p(D))$ está fragmentado por la norma.*

Teorema 3.9 *Si K es un compacto de Corson, entonces todo subconjunto acotado y $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ está fragmentado en norma.*

Nuestro trabajo en este capítulo trata de completar y extender los dos últimos resultados. Además de demostrar el teorema 3.8 de forma distinta a como se hace en [18], ponemos de manifiesto que en muchos casos la hipótesis 'H tiene la propiedad $P(D)$' es superflua para obtener la fragmentabilidad; en concreto, probaremos lo siguiente.

Propiedades en el espacio C(K): Si $C(K)$ es Lindelöf respecto a la topología $t_p(K)$, entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ está fragmentado por la norma, y en particular es un compacto de Radon-Nikodym (teorema 3.14).

Este resultado mejora el teorema 3.9, ya que si K es un compacto de Corson, entonces $C_p(K)$ es Lindelöf, [2] (por $C_p(K)$ denotamos el espacio $(C(K), t_p(K))$). El resultado puede localizarse: si H es convexo, $t_p(K)$-Lindelöf y $t_p(D)$-compacto entonces $(H, t_p(D))$ es fragmentado por la norma (teorema 3.17).

Propiedades en un espacio de Banach general Si X es un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y H es $\sigma(X, B)$-compacto y débilmente Lindelöf, entonces $(H, \sigma(X, B))$ está fragmentado por la norma (proposición 3.16). Una consecuencia de este resultado es que si X es un espacio de Banach débilmente Lindelöf, entonces todo subconjunto $\sigma(X, B)$-compacto y acotado está fragmentado por la norma, y por lo tanto es un compacto de Radon-Nikodym (corolario 3.16.1).

3.2. Condición de Lindelöf en $(C(K), t_p(K))$

Para demostrar que si $C_p(K)$ es Lindelöf y D es un subconjunto denso de K, entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ está fragmentado por la norma, necesitaremos varios pasos. La primera etapa consistirá en comprobar que la hipótesis de separabilidad de K no es restrictiva. Para ello utilizaremos una extensión de los razonamientos del teorema 3.4 de [54] que nos permitirá formular la proposición 3.11. Necesitaremos un lema previo que aparece en [54, lemma 2.1].

Lema 3.10 *Sean X e Y dos espacios compactos de Hausdorff, ρ_X y ρ_Y métricas respectivas en X e Y, y $f : X \to Y$ una sobreyección que es continua tanto para las topologías originales de X e Y como respecto a las métricas ρ_X y ρ_Y. Si X está fragmentado por la métrica ρ_X, entonces Y está fragmentado por ρ_Y. En particular, si en las condiciones anteriores la aplicación $f : X \to Y$ es un homeomorfismo de espacios topológicos, que es además una isometría con las métricas dadas, entonces X está ρ_X-fragmentado si y sólo si Y está ρ_Y-fragmentado.*

Proposición 3.11 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y D un subconjunto denso de K. Sea H un subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) $(H, t_p(D))$ *está fragmentado por la norma de* $C(K)$.

(2) Para cada subconjunto numerable A de D, el conjunto $(R_{\overline{A}}(H), t_p(A))$ está fragmentado por la norma de $C(\overline{A})$, donde $R_{\overline{A}} : C(K) \longrightarrow C(\overline{A})$ es la aplicación que a cada $f \in C(K)$ le hace corresponder su restricción a $\overline{A}$.

(3) Para cada subconjunto numerable A de D, el conjunto $(R_{\overline{A}}(H), \| \quad \|_{C(\overline{A})})$ es separable.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $(H, t_p(D))$ es fragmentado por la norma y que $A \subset D$ es numerable. Nótese que la aplicación $R_{\overline{A}} : C(K) \to C(\overline{A})$ es continua tanto para las topologías dadas por la norma como con las topologías $t_p(D) - t_p(A)$. Por tanto $R_{\overline{A}}(H)$ es $t_p(A)$-compacto, y además el lema 3.10 nos asegura que $R_{\overline{A}}(H)$ es norma-fragmentado (por la norma de $C(\overline{A})$).

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponemos, por reducción al absurdo, que $R_{\overline{A}}(H)$ no es separable en norma, donde A es un subconjunto numerable de D. Existirá así un subconjunto $N \subset R_{\overline{A}}(H)$ no numerable y un $\varepsilon > 0$ tal que si $f \neq g$ con $f, g \in N$ entonces $\|f - g\|_{C(\overline{A})} > \varepsilon$. Ahora bien, por ser A numerable, $R_{\overline{A}}(H)$ es $t_p(A)$-compacto y metrizable; por tanto, quitando a lo más una cantidad numerable de puntos de N, podemos suponer que cada uno de los puntos de N no es $t_p(A)$-aislado en N (ya que $R_{\overline{A}}(H)$ tiene una base de entornos numerable para la topología $t_p(A)$, y existe una aplicación inyectiva entre el conjunto de puntos $t_p(A)$-aislados de N y el conjunto de entornos de dicha base). Por la fragmentabilidad de $R_{\overline{A}}(H)$, existirá un subconjunto W de N que es $t_p(A)$-abierto relativo y no vacío y tiene diámetro (en $C(\overline{A})$) menor o igual que ε. Al ser los puntos de N no aislados y W abierto en N, existirán $f, g \in W$ distintos. Por tanto, será $\|f - g\|_{C(\overline{A})} \leq \varepsilon$, en contradicción con la elección de N. La conclusión es que $R_{\overline{A}}(H)$ ha de ser separable.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $(H, t_p(D))$ no está fragmentado por la norma de $C(K)$. Deben existir $B \subset H$ no vacío y $t_p(D)$-compacto y $\varepsilon > 0$ tales que cualquier subconjunto $t_p(D)$-abierto no vacío de B tiene diámetro (en $C(K)$) mayor que ε.

Tomamos ahora un subconjunto U $t_p(D)$-abierto y no vacío de B. Existirán $x \in K$ y $f, g \in U$ con $(f - g)(x) > \varepsilon$. Por ser D denso en K y $f, g \in C(K)$, podemos obtener $d \in D$ con $(f - g)(d) = \varepsilon + \delta$ (con $\delta > 0$). Sean así:

$$U_0 = \left\{ h \in U : h(d) > f(d) - \frac{\delta}{2} \right\} \quad \text{y} \quad U_1 = \left\{ h \in U : h(d) < g(d) + \frac{\delta}{2} \right\}$$

U_0 y U_1 son $t_p(D)$-abiertos no vacíos ($f \in U_0$ y $g \in U_1$). Además si $h_0 \in U_0$ y $h_1 \in U_1$, como $f(d) = g(d) + \varepsilon + \delta$ será $h_1(d) < g(d) + \delta/2$ y $h_0(d) > f(d) - \delta/2$, y por tanto,

$h_0(d) - h_1(d) > \varepsilon$. Podemos obtener así una sucesión $\{ V_n : n \in \mathbb{N} \}$ de $t_p(D)$-abiertos y otra $\{ d_n : n \in \mathbb{N} \}$ de elementos de D tales que:

a) $V_{2n} \cup V_{2n+1} \subset V_n$ y,

b) si $f \in V_{2n}$, $g \in V_{2n+1}$ entonces $(f-g)(d_n) > \varepsilon$

Sea $A = \{d_n\} \subset D$. Existe una cantidad no numerable de ramas $V_1 \supset V_{n_1} \supset V_{n_2} \supset \ldots$ donde en cada contenido se tiene que $n_{i+1} = 2n_i$, o bien $n_{i+1} = 2n_i + 1$. Para cada una de estas ramas se cumple que B contiene a

$$\bigcap \{ \overline{V_{n_i}}^{t_p(D)} : i \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$$

(H es $t_p(D)$-compacto). Eligiendo un elemento de cada una de estas intersecciones, se cumple que si f y g provienen de dos distintas, existirá $d_n \in A \subset D$ tal que $|(f-g)(d_n)| \geq \varepsilon$, luego $\| f - g \|_{C(\overline{A})} \geq \varepsilon$. Obviamente así $R_{\overline{A}}(H)$, dotado de la norma de $C(\overline{A})$, no puede ser separable.

■

Corolario 3.11.1 (Cascales y Vera, [18]) *Sea K un espacio Hausdorff compacto, D un subconjunto denso de K y H un subconjunto norma-acotado y $t_p(D)$-compacto de $C(K)$. Si $(H, t_p(D))$ es fragmentado por la norma de $C(K)$, entonces H tiene la propiedad $P(D)$.*

Demostración. En efecto, tomamos un subconjunto numerable A de D y consideramos la aplicación restricción $R_{\overline{A}}$. El conjunto $R_{\overline{A}}(H)$ es separable en la norma de $C(\overline{A})$ por la proposición anterior, y por lo tanto, podemos aplicar la proposición 2.2 para afirmar que $(R_{\overline{A}}(H), t_p(A))$ tiene la propiedad $P(A)$. Esto implica que H tiene la propiedad $P(D)$ por la proposición 2.3. ■

El siguiente resultado utiliza algunas ideas de Jayne, Namioka y Rogers, [45, lemma 3.9], y algunos resultados clásicos sobre conjuntos analíticos (ver [21, chapter 8]). Recordemos que

- un espacio topológico se dice polaco si es homeomorfo a un espacio separable, metrizable y completo;

- un subconjunto de un espacio polaco se dice analítico si es imagen continua de un espacio polaco.

Lema 3.12 *Sea K un espacio Hausdorff, compacto y separable, D un subconjunto numerable y denso de K y H un subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$. Si para cada probabilidad de Radon μ en $(H, t_p(D))$ existe $S_\mu \subset H$ cerrado y separable en norma, que cumple $\mu^*(S_\mu) = 1$, entonces H es separable en norma.*

Demostración. Utilizando la proposición 3.11, basta demostrar que H es fragmentado por la norma de $C(K)$. Para esto, basta probar que cada subconjunto C de H que sea cerrado en norma es medible respecto a cada probabilidad de Radon μ en $(H, t_p(D))$, [45]. Fijamos μ y llamamos S_μ al subconjunto referido en el enunciado del lema. Entonces $(S_\mu, \|\ \|)$ es polaco; por lo tanto $(S_\mu, t_p(D))$ es un subconjunto analítico del espacio polaco $(H, t_p(D))$. Ahora bien, todo subconjunto analítico de un espacio polaco es universalmente medible ([21, 8.4.3]), y por lo tanto S_μ es μ-medible y $\mu(S_\mu) = 1$. Por otro lado, al ser C cerrado en norma, y razonando de la misma forma, podemos asegurar que $(C \cap S_\mu, t_p(D))$ es μ-medible, de donde se deduce que el conjunto

$$C = (C \cap S_\mu) \cup (C \cap S_\mu^c)$$

es μ-medible. ■

El siguiente teorema es la versión separable del resultado que buscamos. Utilizaremos la siguiente notación: si T es un espacio topológico,

- $Borel(T)$ es la σ-álgebra de Borel en T, es decir, la σ-álgebra engendrada por los subconjuntos abiertos de T.

- $Baire(T)$ es la σ-álgebra de Baire de T, es decir, la σ-álgebra generada por las funciones reales continuas definidas en T.

Es conocido que si T es un espacio métrico, ambas σ-álgebras coinciden, aunque en general sólo se cumple que $Baire(T) \subset Borel(T)$.

Teorema 3.13 *Sea K un espacio compacto, separable y Hausdorff y D un subconjunto denso y numerable de K. Si H tiene la propiedad $P(D)$*[1] *y $(H, t_p(K))$ es Lindelöf, entonces H es separable en norma. En particular, si $C_p(K)$ es Lindelöf, entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto es separable en norma.*

[1] Aquí no se supone que H sea acotado.

Demostración. Supongamos que H tiene la propiedad $P(D)$, donde H no se supone acotado, y que $(H, t_p(K))$ es Lindelöf. Si escribimos

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \quad \text{donde} \quad H_n := \{\, h \in H : \|h\| \leq n \,\} \tag{3.1}$$

se tiene que cada H_n tiene la propiedad $P(D)$ y es Lindelöf para la topología $t_p(K)$. De este modo, si probamos que cada H_n es separable en norma, también lo será H. Por lo tanto, para demostrar la separabilidad en norma de H, podemos suponer, y así lo haremos a partir de ahora, que H es acotado.
Probaremos que H es separable en norma en dos etapas.

Primera etapa. Comprobaremos que

$$Borel(H, t_p(D)) = Baire(H, t_p(K))$$

Por un lado, al ser $(H, t_p(D))$ metrizable, se cumple que

$$Borel(H, t_p(D)) = Baire(H, t_p(D)) \subset Baire(H, t_p(K))$$

Por otro lado, al ser $(H, t_p(K))$ un espacio Lindelöf, puede aplicarse un resultado de Moran, [53], que nos asegura que

$$Baire(H, t_p(K)) = H \cap Baire(C_p(K)) \tag{3.2}$$

Ahora bien, $Baire(C_p(K))$ está generada por las funciones $\{\, \delta_k : k \in K \,\}$ ([29]), y la ecuación (3.2) nos asegura que $Baire(H, t_p(K))$ está generada por

$$\widehat{K} = \{\, \delta_k|_H : k \in K \,\}$$

Por último, la condición $P(D)$ en H nos asegura que

$$\widehat{K} \subset B_1(H, t_p(D)) = B_r(H, t_p(D))$$

(estamos usando aquí el teorema 2.5 y el hecho de ser $(H, t_p(D))$ metrizable). Esto nos asegura que $Baire(H, t_p(K)) \subset Baire(H, t_p(D))$, lo que concluye esta etapa.

Segunda etapa. Comprobaremos que puede aplicarse el lema 3.12. Sea μ una probabilidad de Radon en $(H, t_p(D))$. Por lo hecho en la primera etapa, podemos suponer que μ es una medida de Baire en el espacio de Lindelöf $(H, t_p(K))$. Como tal, dicha medida es τ-suave ([**?**, page 175]) y por lo tanto, posee un soporte no vacío S; S es

$t_p(K)$-cerrado. Para cada $x, y \in K$ se cumple que si $\hat{x}|_S = \hat{y}|_S$ entonces $\hat{x} = \hat{y}$ en casi todo punto (respecto a μ), lo cual nos permite definir la aplicación natural

$$\varphi : (\hat{K}|_S, t_p(S)) \longrightarrow (\hat{K}, \| \ \|_{L_1})$$

mediante $\varphi(\hat{x}|_S) = \hat{x}$ (nótese que $\widehat{K} \subset L^1(\mu)$, pues $\widehat{K}$ está uniformemente acotado por la acotación de H). Al ser φ inyectiva, si probamos que φ es continua, tendríamos que $(\hat{K}|_S, t_p(S))$ es compacto y metrizable, lo que implicaría que S es separable en norma. Ahora bien, para probar la continuidad de φ, sea $\widehat{A}|_S$ un subconjunto de $\widehat{K}|_S$ y $\hat{x}|_s$ un punto de $\overline{\widehat{A}|_S}^{t_p(S)}$; podemos suponer que $\hat{x} \in \overline{\widehat{A}}^{t_p(H)}$ por la compacidad de $(\widehat{K}, t_p(H))$. Ahora utilizamos de nuevo el teorema 2.5 para asegurar que $\widehat{K}$ cumple la propiedad de Bourgain respecto a μ, de modo que la proposición 1.6 nos asegura que $\hat{x}$ es el límite en casi todo punto de una sucesión $\hat{a}_n$ respecto a la topología $t_p(H)$, donde (a_n) en A. La acotación de H nos permite aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, por lo que $(\hat{a}_n)$ converge a $\hat{x}$ en la norma $\| \ \|_1$, y por lo tanto

$$\hat{x} \in \overline{\{\hat{a}_n : n \in \mathbb{N}\}}^{L_1}$$

Esto asegura la continuidad de φ. El compacto $(\widehat{K}|_S, t_p(S))$ es así metrizable, de donde S es separable en norma. Además S es μ-medible (vale el razonamiento de la primera etapa de la demostración del lema 3.12), por lo que se verifica $\mu(S) = 1$. Así, el lema 3.12 nos asegura ahora que H es también separable en norma.

Por último, supongamos que $C_p(K)$ es Lindelöf. Sea H un subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$. Para demostrar que H es separable en norma, consideramos la descomposición de H según la ecuación 3.1, los subconjuntos H_n son $t_p(D)$-compactos y acotados en norma. Ahora bien, el corolario 2.5.1 nos asegura que todo subconjunto $t_p(D)$-compacto y acotado de $C(K)$ tiene la propiedad $P(D)$; como obviamente dicho subconjunto es también $t_p(K)$-Lindelöf (al ser cerrado en $C_p(K)$), puede aplicarse el caso ya probado para asegurar que cada H_n es separable en norma, lo que nos da la separabilidad en norma de H. ■

Podemos concluir ahora fácilmente el caso general.

Teorema 3.14 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff tal que $C_p(K)$ es Lindelöf. Si D es un subconjunto denso de K, entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ está fragmentado por la métrica, y por lo tanto, es un compacto de Radon-Nikodym.*

<u>Demostración</u>. Sea A un subconjunto numerable de D. Por la proposición 3.11, basta probar que $R_{\overline{A}}(H)$ es separable en la norma de $C(\overline{A})$. Ahora bien, por la continuidad

de $R_{\overline{A}}$, $C_p(\overline{A})$ es $t_p(\overline{A})$-Lindelöf y $R_{\overline{A}}(H)$ es un subconjunto $t_p(A)$-compacto de $C(\overline{A})$, y así puede aplicarse el teorema 3.13 para confirmar que $R_{\overline{A}}(H)$ es separable en norma.

Por último, teniendo en cuenta que la norma de $C(K)$ es inferiormente semicontinua para la topología $t_p(D)$, la segunda parte de la proposición 3.6 nos asegura que todo subconjunto $t_p(D)$-compacto y fragmentado por la norma de $C(K)$ es un compacto de Radon-Nikodym. ■

Corolario 3.14.1 ([18]) *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y D un subconjunto denso de K. Si H tiene la propiedad $P(D)$*[2] *y es $t_p(K)$-Lindelöf, entonces H es fragmentado por la norma.*

Demostración. Sea A un subconjunto numerable de D. La proposición 3.11 nos dice que basta probar que $R_{\overline{A}}(H)$ es separable en norma en $C(\overline{A})$. Ahora bien, $R_{\overline{A}}(H)$ tiene la propiedad $P(A)$ (salvo, quizás, la condición de acotado) por la proposición 2.3) y $(R_{\overline{A}}(H), t_p(\overline{A}))$ es Lindelöf, por lo que basta aplicar el teorema 3.13. ■

Corolario 3.14.2 *Sea K un espacio compacto Hausdorff que no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. Si $D \subset K$ es denso, todo subconjunto $t_p(D)$-compacto y $t_p(K)$-Lindelöf H de $C(K)$ es tal que $(H, t_p(D))$ está fragmentado por la norma. Además $(H, t_p(D))$ es un compacto de Radon-Nikodym.*

En particular, este resultado puede aplicarse si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(a) K es secuencialmente compacto;

(b) El peso de K es menor que $\mathfrak{c}$;

(c) La estrechez de K es menor que $\mathfrak{c}$;

(d) $(C(K), t_p(K))$ o bien $(C(K), \omega)$ tiene la propiedad propiedad $\mathcal{C}$ de Corson;

(e) $C(K)$ no contiene una copia isométrica de $\ell^1(\mathfrak{c})$.

Demostración. Sea $H \subset C(K)$ $t_p(D)$-compacto y $t_p(K)$-Lindelöf. Si escribimos

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \quad \text{con} \quad H_n = \{h \in H : \|h\| \leq n\}$$

[2] No se supone H acotado.

tenemos que cada H_n es $t_p(D)$-compacto y acotado en norma, luego el corolario 2.5.1 nos asegura que H_n tiene la propiedad $P(D)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, H_n es también $t_p(K)$-Lindelöf al ser cerrado en H. El corolario 3.14.1 puede aplicarse ahora para afirmar que H_n es fragmentado por la norma para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, la proposición 3.11 nos permite asegurar que todo subconjunto $t_p(D)$-compacto que puede escribirse como unión numerable de subconjuntos $t_p(D)$-compactos y fragmentados por la norma, es también fragmentado por la norma, luego H es fragmentado por la norma.

De lo anterior se deduce que $(H, t_p(D))$ es un compacto de Radon-Nikodym, ya que es fragmentado por una norma que es inferiormente semicontinua respecto a la topología $t_p(D)$ (proposición 3.6).

Por último, cualquiera de las condiciones (a)–(e) implica que K no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$, por el corolario 2.5.1. ■

3.3. Otros casos

En esta sección incluiremos algunos resultados de fragmentabilidad que pueden deducirse de forma más o menos directa del trabajo realizado hasta ahora.

3.3.1. Subconjuntos $t_p(D)$-compactos de $C(K)$, con K Corson

Como aplicación de la proposición 3.11, daremos una demostración del teorema 3.9 que simplifica la que aparece en [18], y que elimina la hipótesis de acotación en norma del enunciado. Recordemos la definición de compacto de Corson. Dado un conjunto I, se denota por $\Sigma(I)$ al siguiente subconjunto de $[0,1]^I$

$$\Sigma(I) = \{(x_i)_{i\in I} : x_i = 0 \text{ salvo para una cantidad numerable de subíndices } i\}$$

Un compacto de Corson es un espacio topológico homeomorfo a un subconjunto compacto de $\Sigma(I)$, para cierto conjunto I, dotado de la topología producto.

Teorema 3.15 ([18]) *Sea K un espacio compacto de Corson, y D un subconjunto denso de K. Entonces todo subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$ está fragmentado por la métrica.*

<u>Demostración</u>. Sea A un subconjunto numerable de D, entonces $\overline{A}$ es compacto y metrizable (pues es homeomorfo a un subconjunto con soporte numerable en $\Sigma(I)$),

de modo que si H es un subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$, el conjunto restricción $R_{\overline{A}}(H)$ es separable en norma en $C(\overline{A})$, y puede aplicarse la proposición 3.11 para concluir el resultado. ■

3.3.2. Subconjuntos débilmente Lindelöf en espacios de Banach

Daremos primero una aplicación de los resultados de la sección anterior al caso particular de los espacios de Banach.

Proposición 3.16 *Sea X un espacio de Banach y B un subconjunto normante de B_{X^*}. Sea H un subconjunto $\sigma(X,B)$-compacto y ω-Lindelöf de X. Entonces $(H,\sigma(X,B))$ está fragmentado por la norma, y por lo tanto $(H,\sigma(X,B))$ es un compacto de Radon-Nikodym.*

Demostración. Podemos suponer, y así lo haremos, que B es absolutamente convexo ya que si $D = \mathrm{co}(B \cup (-B))$, entonces las topologías $\sigma(X,B)$ y $\sigma(X,D)$ coinciden. Miramos X como un subespacio de $C(B_{X^*},\omega^*)$.

Supongamos primero que H es acotado. Entonces al ser $\sigma(X,B)$-compacto y ω-Lindelöf, puede aplicarse la proposición 2.15 para asegurar que H tiene la propiedad $P(B)$. Así, como B es denso en (B_{X^*},ω^*) y H es ω-Lindelöf (es decir, $t_p(B_{X^*})$-Lindelöf), puede aplicarse el corolario 3.14.1 para concluir el resultado.

En el caso general, podemos escribir

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \quad \text{donde} \quad H_n = \{\, h \in H; \|h\| \leq n \,\}$$

Cada H_n es $\sigma(X,B)$-cerrado debido a que B es normante en B_{X^*}, y por lo que se acaba de ver, H_n es fragmentado en norma. Esto significa, por la proposición 3.11, que para cada subconjunto numerable A de D, $R_{\overline{A}}(H_n)$ es separable en norma en $C(\overline{A})$. Así

$$R_{\overline{A}}(H) = R_{\overline{A}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{\overline{A}}(H_n)$$

es separable en norma en $C(\overline{A})$, y aplicando la proposición 3.11 se obtiene que H es fragmentado en norma. Finalmente, la proposición 3.6 nos permite asegurar ahora que $(H,\sigma(X,B))$ es un compacto de Radon-Nikodym. ■

El siguiente resultado es inmediato a partir de la proposición anterior.

Corolario 3.16.1 *Sea X un espacio de Banach ω-Lindelöf y B un subconjunto normante de B_{X^*}. Entonces todo subconjunto $\sigma(X,B)$-compacto de X está fragmentado por la norma.*

3.3.3. El caso $t_p(K)$-Lindelöf y convexo

Aplicando el lema 2.27 se puede probar lo siguiente.

Teorema 3.17 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y D un subconjunto denso de K. Sea H un subconjunto $t_p(D)$-compacto, convexo y $t_p(K)$-Lindelöf de $C(K)$. Entonces $(H, t_p(D))$ está fragmentado por la norma de $C(K)$.*

Demostración. Para demostrar el teorema puede suponerse, y así lo haremos, que H es acotado, y basta probar entonces que H tiene la propiedad $P(D)$ (ver el corolario 3.14.1). Por reducción al absurdo, suponemos que H no es un $P(D)$-conjunto; la proposición 2.5 nos asegura que existe una sucesión (d_n) en D tal que $\{\hat{d_n}\}$ es independiente en H. Sea $T : \mathbb{N} \to K$ la inyección definida por $T(n) = d_n$, y sea $\overline{T} : \beta\mathbb{N} \to K$ la correspondiente extensión continua al compactificado de Stone-Cěch de $\mathbb{N}$. Definimos

$$\phi : C(K) \longrightarrow C(\beta\mathbb{N}) = \ell^\infty$$

mediante $\phi(g) = g \circ \overline{T}$, para cada g en $C(K)$. ϕ es lineal y $t_p(K)$–$t_p(\beta\mathbb{N})$-continua. La restricción de ϕ a H es la misma aplicación definida en el lema 2.27. Dicho lema nos asegura que existen escalares $\alpha < \beta$ tales que $[\alpha, \beta]^{\mathbb{N}} \subset \phi(H)$. Mediante una transformación afín se obtiene una función continua

$$f : (H, t_p(K)) \longrightarrow C_p(\beta\mathbb{N})$$

de modo que se cumple $B_{\ell^\infty(\mathbb{N})} = B_{C(\beta\mathbb{N})} \subset f(H)$. Ahora bien, como $(H, t_p(K))$ es Lindelöf, deduciríamos que la bola de $C_p(\beta\mathbb{N})$ es Lindelöf, en contradicción con la proposición A.1. ■

En este capítulo, hemos comprobado que las siguientes condiciones aseguran la fragmentabilidad en norma de un subconjunto H $t_p(D)$-compacto de $C(K)$:

(a) $C_p(K)$ es Lindelöf.

(b) H es débilmente Lindelöf.

(c) $(H, t_p(K))$ es Lindelöf y H tiene la propiedad $P(D)$.

(d) $(H, t_p(K))$ es Lindelöf y H es convexo.

El siguiente problema aparece así de forma natural.

Problema: Sea H un subconjunto $t_p(D)$-compacto de $C(K)$. Si $(H, t_p(K))$ es Lindelöf, ¿es $(H, t_p(D))$ fragmentado por la norma de $C(K)$?

No existen contraejemplos de este problema en la teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF). En efecto, suponiendo válido el axioma 'Proper Forcing', que es consistente con los axiomas ZF, se cumple que un espacio homeomorfo a un subespacio de $C_p(L)$, con L Lindelöf, tiene estrechez numerable (Arkangel'skii, [4]). Como $\beta\mathbb{N}$ tiene estrechez c (apéndice A), $\beta\mathbb{N}$ no es homeomorfo a un subespacio de $C(H, t_p(K))$, si $(H, t_p(K))$ es Lindelöf, de modo que al ser $\widehat{K} \subset C(H, t_p(K))$, el teorema 2.5 nos asegura que el $t_p(D)$-compacto H tiene la propiedad $P(D)$ y estamos siempre en las condiciones de (c).

3.4. Aplicaciones al estudio de compactos de Rosenthal y teoremas de tipo Namioka

3.4.1. Funciones de la primera clase de Baire

Lema 3.18 *Sea T un espacio métrico completo, X un espacio de Banach y B un subconjunto normante de B_{X^*}. Supongamos que cualquier subconjunto $\sigma(X,B)$-compacto de X está fragmentado en norma. Entonces si $f : T \to X$ es una función $\sigma(X,B)$-continua, se cumple que $f \in B_1(T,X)$.*

Demostración. Para probar que $f \in B_1(T,X)$ basta comprobar que para cada subconjunto compacto W de T, la restricción $f|_W$ tiene un punto de continuidad en norma ([72]). Ahora bien, si W es un subconjunto compacto de T, $f(W)$ será $\sigma(X,B)$-compacto y por lo tanto fragmentado respecto a la norma de X. Por [54, lemma 1.1], la identidad

$$id : (f(W), \sigma(X,B)) \longrightarrow (f(W), \| \ \|)$$

tiene un punto de continuidad, lo que implica que $f|_W : W \to X$ tiene un punto de continuidad en norma, lo que concluye la demostración. ■

Proposición 3.19 *Sea T un espacio métrico completo. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si K un espacio compacto Hausdorff tal que $C_p(K)$ es Lindelöf, D es un subconjunto denso de K y $f : T \to C(K)$ es una función $t_p(D)$-continua, entonces $f \in B_1(T, C(K))$.

(2) *Si X es un espacio de Banach tal que (X, ω) es Lindelöf, B es un subconjunto normante de B_{X^*} y $f : T \to X$ es una función $\sigma(X, B)$-continua, entonces $f \in B_1(T, X)$.*

Demostración. Para el primer apartado basta tener en cuenta el lema 3.18 junto con el corolario 3.14. Para el segundo, puede utilizarse el lema 3.18 y la proposición 3.16.1. ■

Si se añade la hipótesis de ser K metrizable en el primer caso de la proposición anterior, el resultado apareció en [1].

3.4.2. Metrizabilidad de un espacio compacto y Hausdorff

En este apartado daremos condiciones necesarias y suficientes para asegurar que un espacio compacto y Hausdorff K es metrizable, supuesto que $C_p(K)$ es Lindelöf.

Proposición 3.20 *Sea K un espacio compacto Hausdorff y separable tal que $C_p(K)$ es Lindelöf. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *K es metrizable.*

(2) *Para cada subconjunto numerable y denso D de K, el espacio $C(K)$ es $t_p(D)$-analítico.*

(3) *Existe un subconjunto numerable y denso D de K tal que $(C(K), t_p(D))$ es analítico.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Si K es metrizable, entonces $C(K)$ es separable en norma, y por lo tanto $(C(K), \| \ \|)$ es un espacio polaco. Por lo tanto, para cada subconjunto D denso y numerable de K, el espacio $(C(K), t_p(D))$ es analítico por ser imagen continua de $(C(K), \| \ \|)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) es inmediato.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea D un subconjunto denso y numerable de K tal que $(C(K), t_p(D))$ es analítico. Existirá así un espacio polaco P y una función $t_p(D)$-continua y sobreyectiva $f : P \to C(K)$. Ahora bien, al ser $C_p(K)$ Lindelöf, la proposición 3.19 nos asegura

que existe una sucesión de funciones (f_n) de P en $C(K)$ continuas en norma tales que para cada $p \in P$ se cumple

$$f(p) = \| \ \| - \lim_{n\to\infty} f_n(p)$$

y por lo tanto,

$$C(K) = f(P) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(P)}^{\| \ \|}$$

Como $f_n(P)$ es separable en norma para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $C(K)$ es separable en norma, y por lo tanto K es metrizable. ■

Corolario 3.20.1 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff tal que $C_p(K)$ es Lindelöf. Entonces son equivalentes:*

(1) Cualquier subconjunto compacto separable de K es metrizable.

(2) Para cada subconjunto numerable A de K, el espacio $(C(\overline{A}), t_p(A))$ es analítico.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior. ■

La proposición 3.20 nos conduce a plantear la siguiente pregunta: si K un espacio compacto Hausdorff y separable tal que $C_p(K)$ es Lindelöf, ¿es cierto que K es metrizable? Esta cuestión no es decidible. En concreto, se tiene lo siguiente:

- Un resultado de Reznichenko ([5, page 32]) permite afirmar que la respuesta al problema anterior es positiva si se supone cierto el axioma de Martin y falsa la hipótesis del continuo.

- Por otro lado, suponiendo cierta la hipótesis del continuo, Kunen ([5, page 31]) ha demostrado que existe un espacio compacto no metrizable tal que K^n es hereditariamente separable para cada $n \in \mathbb{N}$ y tal que $C_p(K)$ es hereditariamente Lindelöf.

3.4.3. Compactos de Rosenthal

El siguiente resultado mejora un teorema de Godefroy y Talagrand, [37, théoreme 7].

Proposición 3.21 *Sea K un espacio compacto de Rosenthal y separable. Entonces K es metrizable si y sólo si $C_p(K)$ es Lindelöf.*

Demostración. Si K es metrizable, entonces $C(K)$ es separable en norma, y por lo tanto $C_p(K)$ es de Lindelöf.

Recíprocamente, si D es numerable y denso en K, entonces $(C(K), t_p(D))$ es analítico (ver [34, théorème 4]), y por lo tanto puede aplicarse la proposición 3.20 para concluir que K es metrizable. ∎

En [37] se demuestra la metrizabilidad de K con la hipótesis de ser $C(K)$ un espacio ω-Lindelöf. En realidad existe una conexión importante entre los resultados del citado artículo de Godefroy y Talagrand y algunos de los resultados obtenidos en este capítulo. Utilizando las mismas técnicas que en [37, lemme 4] puede llegarse al resultado siguiente (recordemos que denotamos por c el cardinal del continuo).

Teorema 3.22 *Sea K un espacio compacto de Rosenthal y separable, y sea D un subconjunto denso y numerable de K. Si el espacio $C(K)$ no es separable en norma, entonces existe un sistema biortogonal $(f_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha<c}$ en $C(K)\times C(K)^*$ donde $f_\alpha \in B_{C(K)}$ y μ_α es de la forma $a_\alpha(\delta_x - \delta_y)$ con $x, y \in K$ y $0 \neq a_\alpha \in \mathbb{R}$ para cada $\alpha < c$, de modo que $(\{f_\alpha\}_{\alpha<c}, t_p(D))$ es homeomorfo al conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Con este resultado puede demostrarse la proposición 3.21: en efecto, si $C_p(K)$ es Lindelöf, entonces no puede existir un sistema biortogonal $(f_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha<c}$ de la forma indicada en el teorema anterior, ya que

$$\left(\mu_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)_{\alpha<c}$$

formaría un $t_p(K)$-recubrimiento por abiertos del cerrado $\{f_\alpha : \alpha < c\}$ sin subrecubrimiento numerable; por tanto $C(K)$ es separable en norma, lo que nos da la metrizabilidad de K.

Como observación final, a continuación haremos notar cómo la proposición 3.21 y el teorema 3.13 son equivalentes. Basta ver que 3.21 implica 3.13. En efecto, si K es compacto y separable, entonces $\widehat{K}$ es un compacto separable de Rosenthal (ya que $\widehat{K} \subset B_1(H)$ por los teoremas 2.5.1 y 2.5). Miramos así H como un subconjunto de $C_p(\widehat{K})$, teniendo en cuenta que $t_p(K)$ y $t_p(\widehat{K})$ inducen en H la misma topología y análogamente, $t_p(D)$ y $t_p(\widehat{D})$ inducen en H la misma topología. Por otra parte

$$C_p(K) \text{ Lindelöf } \Longrightarrow C_p(\widehat{K}) \text{ Lindelöf}$$

debido a que puede identificarse $C_p(\widehat{K})$ con un álgebra norma-cerrada de $C(K)$ (la que está generada por H y las funciones constantes), y recordando que toda subálgebra cerrada en norma de $C(K)$ es $t_p(K)$-cerrada.

La proposición 3.21 asegura que $\widehat{K}$ es metrizable, de modo que $C_p(\widehat{K})$ es separable en norma; por lo tanto H es también separable en norma. Queda probado así que la proposición 3.21 $\Rightarrow$ teorema 3.13.

En definitiva, la proposición 3.21 por un lado, y el teorema 3.13 y su corolario 3.14 son equivalentes. La cadena de implicaciones quedaría así:

teorema 3.13 $\Rightarrow$ corolario 3.14 $\Rightarrow$ proposición 3.19 (apartado 1) $\Rightarrow$

proposición 3.20 $\Rightarrow$ proposición 3.21 $\Rightarrow$ teorema 3.13

3.4.4. Un teorema de tipo Namioka

Para la siguiente aplicación necesitaremos recordar algunas definiciones. Un espacio topológico Hausdorff y completamente regular se dice Čech-completo si puede expresarse como un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ de algún espacio compacto y Hausdorff. Diremos que un espacio es casi Čech-completo si contiene un subespacio $\mathcal{G}_\delta$ denso que es Čech-completo. Todo espacio Čech-completo es de Baire (pues un $\mathcal{G}_\delta$ denso de un espacio de Baire es de Baire), y a partir de aquí se deduce que todo espacio casi Čech-completo es también de Baire.

Un espacio topológico Hausdorff y completamente regular T se dice Čech-analítico si puede expresarse como un subconjunto de la forma

$$T = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\sigma|n}$$

donde $A_{\sigma|n}$ son subconjuntos o bien abiertos o bien cerrados en un espacio topológico compacto y Hausdorff, para cada $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ (si $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$, entonces $\sigma|n$ denota la sucesión finita $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$). Todo espacio Čech-completo es, en particular, un espacio Čech-analítico. Por otro lado, la clase de espacios casi Čech-completos contiene a los espacios K-analíticos de Baire o, más generalmente, a los espacios Čech-analíticos de Baire (ver [14, remarks 2.5]). Por lo tanto, se tiene el siguiente cuadro de implicaciones.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Čech-completo}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \boxed{\text{Čech-analítico de Baire}} \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{Casi Čech-completo}} \arrow[d] & \\
& \boxed{\text{Contiene un denso Čech-analítico de Baire}} &
\end{tikzcd}
$$

Para nuestro teorema, necesitaremos un resultado previo que se obtiene sin más que observar que la demostración del teorema 4.1 de [46] sigue siendo válida si se sustituye la métrica semicontinua del enunciado por una semimétrica semicontinua. Tanto en el siguiente lema como en el teorema posterior, consideraremos subconjuntos fragmentados por una semimétrica, de forma análoga a como se consideran en la definición 3.1 los espacios fragmentados por una métrica.

Lema 3.23 *Sea Z un espacio Čech-analítico y Hausdorff y ρ una semimétrica inferiormente semicontinua en Z. Entonces son equivalentes:*

1. *Cada subconjunto compacto de Z está fragmentado por ρ.*
2. *Para cada $\varepsilon > 0$, Z puede expresarse como una unión numerable $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ de subconjuntos tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si C es un subconjunto no vacío de Z_n, existe un subconjunto abierto relativo y no vacío V de C tal que el diámetro de V respecto a ρ es menor que ε.*

Teorema 3.24 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff tal que $C_p(K)$ es Lindelöf, y sea D un subconjunto denso de K. Si T es un espacio topológico que contiene un subconjunto denso que es Čech-analítico de Baire, entonces para cualquier función $f : T \to C(K)$ que sea $t_p(D)$-continua, se cumple que f es continua en norma en un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$ denso de T.*

<u>Demostración</u>. En la demostración, representaremos como $\| \;\; \|$-diam(H) el diámetro de un subconjunto H de $C(K)$ respecto a la norma. Haremos la demostración en dos etapas.

ETAPA A: comenzaremos demostrando que la propiedad se verifica si el propio T es Čech-analítico de Baire. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$O_n(f) := \left\{ V : V \text{ es abierto en } T \text{ y } \| \;\; \|\text{-diam}(f(V)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Observamos que cada $O_n(f)$ es abierto y se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n(f)$ coincide con el conjunto de puntos de continuidad en norma de f. Así pues, la demostración de esta primera etapa habrá acabado si probamos que cada $O_n(f)$ es denso en T ya que T es un espacio de Baire por hipótesis. Para verlo comprobaremos primero que se cumple:

Propiedad A1: Para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión (T_n) de subconjuntos de T tales que $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, y se verifica que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada subconjunto no vacío C de T_n, existe un subconjunto abierto V de T tal que $V \cap C \neq \emptyset$ y $\|\ \|$-diam$(f(V\cap C)) < \varepsilon$.

En efecto, para cada subconjunto compacto M de T, su imagen $f(M)$ está fragmentada por la métrica de $C(K)$ (por el corolario 3.14). Si definimos la semimétrica en T dada por la función $\rho(x,y) := \|f(x) - f(y)\|$ es fácil comprobar así que cada subconjunto compacto M de T está fragmentado por ρ. El lema 3.23 nos asegura que para cada $\varepsilon > 0$, podemos escribir $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ de modo que si C es un subconjunto no vacío de T_n, entonces existe un subconjunto abierto V de T tal que $V \cap C$ es no vacío y

$$\begin{aligned} \|\ \| - \operatorname{diam}(f(V\cap C)) &= \sup\{\, \|f(x) - f(y)\| : x, y \in V \cap C \,\} = \\ &= \rho - \operatorname{diam}(V \cap C) < \varepsilon \end{aligned}$$

de modo que se verifica la propiedad A.1.

A partir de A1, demostramos ahora la siguiente propiedad:

Propiedad A2: Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada subconjunto abierto y no vacío W de T, existe un subconjunto abierto y no vacío V de W tal que $\|\ \|$-diam$(f(V)) < \varepsilon$.

En efecto, si esto no fuera cierto, existiría un $\varepsilon > 0$ y un subconjunto abierto no vacío W de T tal que

$$\text{para cada abierto no vacío } V \text{ de } W \text{ se cumple } \|\ \|\text{-diam}(f(V)) \geq \varepsilon \tag{3.3}$$

Para dicho ε, consideramos la sucesión (T_n) de la propiedad A1, y escribimos $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T_n} \cap W$. Como W es un espacio de Baire, existe un $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto abierto no vacío U de T tal que $U \subset \overline{T_n} \cap W$. Como $U \cap T_n$ es un subconjunto no vacío de T_n, la propiedad A1 nos permite asegurar que existe un conjunto abierto V tal que $V \cap U \cap T_n \neq \emptyset$ y además $\|\ \|$-diam$(f(V \cap U \cap T_n)) < \varepsilon$. El conjunto $U \cap V$ es un subconjunto abierto no vacío de W que verifica

$$f(U\cap V) = f(U \cap V \cap \overline{T_n}) \subset f(\overline{U \cap V \cap T_n}) \subset \overline{f(U \cap V \cap T_n)}^{t_p(D)}$$

y como el diámetro en norma de $\overline{f(U \cap V \cap T_n)}^{t_p(D)}$ y de $f(U \cap V \cap T_n)$ coincide, se verifica que

$$\| \ \|\text{-diam}(f(U \cap V)) < \varepsilon$$

en contradicción con (3.3).

La propiedad A2 nos dice que cada $O_n(f)$ es denso en T, lo que nos permite concluir la etapa A.

Etapa B: caso general. Supongamos que T contiene un subespacio denso T_0 que es Čech-analítico de Baire. Como T_0 es de Baire y denso en T, tendremos que T es también de Baire, luego para la demostración basta comprobar que en este caso también se cumple la propiedad A2, y razonar como en la etapa A.

En efecto, si consideramos la restricción $f|_{T_0} : T_0 \to C(K)$, la etapa A nos permite asegurar que para cada $\varepsilon > 0$ y cada subconjunto abierto no vacío W_0 en T_0 existe un abierto no vacío V_0 contenido en W_0 tal que

$$\| \ \|\text{-diam}(f(V_0)) < \varepsilon$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ y un subconjunto abierto no vacío W de T, $W_0 = W \cap T_0$ es un abierto no vacío en T_0. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto $V_0 \subset W_0$ en T_0, que podemos suponer de la forma $V_0 = V \cap T_0$ con $V \subset W$ y V abierto en T, tal que se cumple

$$\| \ \|\text{-diam}(f(V \cap T_0)) < \varepsilon$$

y como $f(V) \subset f(\overline{V \cap T_0}) \subset \overline{f(V \cap T_0)}^{t_p(D)}$, y este último conjunto tiene el mismo diámetro en norma que $f(V \cap T_0)$, se cumplirá

$$\| \ \|\text{-diam}(f(V)) < \varepsilon$$

lo que concluye la demostración. ■

En el caso particular en que $D = K$, puede eliminarse en el teorema anterior la hipótesis de ser $C_p(K)$ un espacio de Lindelöf, gracias a un teorema de Namioka, [?].

3.5. Las propiedades de Krein-Milman y de Radon-Nikodym para subconjuntos convexos y $\sigma(X,B)$-compactos

Definición 3.25 *Un subconjunto C cerrado y convexo de un espacio de Banach X tiene la propiedad de Krein-Milman (KMP) si cada subconjunto cerrado, acotado y convexo $K \subset C$ cumple $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ext}(K))}^{\|\ \|}$.*

Lindenstrauss demostró que si C tiene la *RNP* entonces C tiene la *KMP*, y Huff y Morris demostraron en 1975, que el recíproco es cierto para subconjuntos ω^*-compactos y convexos de un dual de un espacio de Banach (ver [26, chapter VIII]). Nos basaremos en estos resultados y en la equivalencia de la *RNP* con la fragmentabilidad (teorema 3.7) para demostrar que las propiedades de Krein-Milman y de Radon-Nikodym (definición 2.22) son equivalentes para subconjuntos convexos y $\sigma(X,B)$-compactos de un espacio de Banach X, con B normante en B_{X^*}.

En primer lugar haremos notar cómo la isometría $i : X \to \ell^\infty(B)$ de la ecuación (2.9), definida por $i(x) = (x^*(x))_{x^* \in B}$, donde $B \subset B_{X^*}$ es normante, nos proporciona una relación entre las propiedades de fragmentabilidad de H y de $i(H)$, que es una consecuencia directa del lema 3.10 y de 2.29.

Proposición 3.26 *Sea X un espacio de Banach, $B \subset B_{X^*}$ normante y H un subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de X. Entonces $(H, \sigma(X,B))$ es fragmentado por la norma de $C(K)$ si, y sólo si, $(i(H), \omega^*)$ es fragmentado por la norma de $\ell^\infty(B)$.*

Teorema 3.27 *Sea X un espacio de Banach, $B \subset B_{X^*}$ normante y H un subconjunto convexo, acotado y $\sigma(X,B)$-compacto. Entonces H tiene la RNP si, y sólo si, H tiene la KMP.*

<u>Demostración</u>. Sólo hace falta demostrar que si H tiene la *KMP*, entonces H tiene la *RNP*, ya que el recíproco se cumple en general. Ahora bien, si H tiene la *KMP*, $i(H)$ es un subconjunto convexo y ω^*-compacto de $\ell^\infty(B)$ con la *KMP*. Como estamos en un dual, $i(H)$ tiene la *RNP*, y por tanto $i(H)$ es fragmentado en norma (teorema 3.7), luego H es fragmentado por la norma de X por la proposición 3.26, y así H tiene la *RNP*, aplicando de nuevo el teorema 3.7. ■

Este último teorema fue demostrado por James para el caso en el que B es numerable ([42, theorem 3.2]).

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Convergencia sobre fronteras y convergencia débil

4.1.1. El problema de la frontera

Dado un espacio de Banach X y un subconjunto normante cualquiera B de B_{X^*}, no se cumple, en general, que todo subconjunto $\sigma(X, B)$-compacto y acotado de X sea también $\sigma(X, X^*)$-compacto. Por ejemplo, si Y es un espacio de Banach, B_{Y^*} es $\sigma(Y^*, B_Y)$-compacto, donde B_Y es un subconjunto normante de $B_{Y^{**}}$, pero no es compacto respecto a la topología $\sigma(Y^*, B_{Y^{**}})$, a menos que Y^* sea reflexivo.

Nuestro propósito en esta sección es estudiar qué ocurre cuando se manejan subconjuntos acotados en norma y $\sigma(X, B)$-compactos, donde B es una frontera ("boundary") de B_{X^*}.

Definición 4.1 *Sea X un espacio de Banach, y B un subconjunto de B_{X^*}. Se dice que B es una frontera de B_{X^*} si para cada $x \in X$ existe un elemento $b_x^* \in B$ tal que*

$$b_x^*(x) = \|x\|$$

Nótese que este concepto de frontera es diferente a la correspondiente noción topológica. En adelante, si no se especifica lo contrario, cuando nos refiramos a una frontera de B_{X^*}, estaremos considerando la definición 4.1. Toda frontera de B_{X^*} es un subconjunto normante de B_{X^*}; sin embargo, el recíproco no es cierto: si X es un espacio de Banach, B_X es un subconjunto normante de $B_{X^{**}}$, pero B_X no es una frontera de $B_{X^{**}}$ a menos que X sea reflexivo; esto último se debe al teorema de James, [24, chapter 1, theorem 5].

En este capítulo prestaremos especial atención al siguiente problema que aparece en [23, Problem I.2] (ver también [35, question V.2]):

> **Problema de la frontera:** Sea X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X. ¿Es cierto que H es $\sigma(X, B)$-compacto si, y sólo si, H es débilmente compacto?

Las respuestas positivas al problema de la frontera pueden considerarse como tests para obtener la compacidad débil de ciertos subconjuntos de un espacio de Banach.

Nótese que, en ocasiones, la topología débil puede ser difícil de tratar si no se dispone de una caracterización adecuada del espacio dual (véanse por ejemplo las secciones 4.7 y 4.8), y es aquí cuando la topología de convergencia sobre una frontera razonable puede ser de gran utilidad en el estudio de la compacidad débil.

Hasta el momento, sólo se conocen respuestas positivas de este problema con algunas hipótesis adicionales:

- La respuesta es positiva para cualquier espacio de Banach X si se toma B como el conjunto de extremales de B_{X^*}, [13]. Nótese que el conjunto de extremales de B_{X^*} es una frontera para B_{X^*} por el principio del máximo de Bauer, [9, page 123].
- La respuesta es positiva para cualquier frontera, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:
  - H es convexo (teorema 4.2); ver [31, page 100] o [36].
  - H es secuencialmente compacto respecto a la topología $\sigma(X, B)$ (teorema 4.3); ver [71].
  - X no contiene una copia isomorfa de ℓ^1; ver [71] y [35, question V.2].
  - La bola dual B_{X^*} es secuencialmente compacta para la topología ω^*, [19, corollary 2.2].

Durante la preparación de esta tesis, en [15], se ha probado que el problema de la frontera tiene solución positiva para el espacio $X = C(K)$.

En este capítulo demostraremos que el problema de la frontera tiene solución positiva en otros casos, como son, entre otros (ver los teoremas 4.6 y 4.7):

- si H es débilmente K-analítico, [18];
- si H es débilmente Lindelöf;
- si H está fragmentado en norma, [18];
- si H no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$; en particular, si X no contiene un subespacio isomorfo a $\ell^1(c)$[1].

[1] En el apéndice puede encontrarse un estudio de la clase de los espacios de Banach que no contienen a $\ell^1(c)$. Esta clase contiene a la de los espacios que no contienen copias de ℓ^1, y a la de los espacios tales que (B_{X^*}, ω^*) es secuencialmente compacta, para las que el resultado era conocido.

Nuestro trabajo se apoyará, por un lado, en los resultados obtenidos en capítulos anteriores, y por otro en los resultados ya conocidos antes de iniciar este trabajo. Incluiremos demostraciones detalladas de estos últimos con la intención de que la exposición sea lo más autocontenida posible.

4.1.2. El caso convexo

Demostraremos primero que el problema de la frontera expuesto en la sección anterior tiene solución positiva si H es un subconjunto convexo y $\sigma(X,B)$-compacto. La demostración sigue las ideas de [36, proposition II.21] que, a su vez, se fundamenta en un trabajo de Simons, [71]. Nótese que si H es convexo y $\sigma(X,B)$-compacto, necesariamente H es acotado en virtud del teorema de Banach-Steinhaus para conjuntos convexos ([65, theorem 2.9]).

Teorema 4.2 (Simons) *Sea H un subconjunto convexo de un espacio de Banach X y B una frontera de B_{X^*}. Entonces H es $\sigma(X,B)$-compacto si, y sólo si, H es débilmente compacto.*

Demostración. Hay que demostrar que si H es $\sigma(X,B)$-compacto, entonces H es débilmente compacto. Puede suponerse, y así lo haremos a partir de ahora, que H es absolutamente convexo debido a que la envoltura absolutamente convexa y $\sigma(X,B)$-cerrada de un conjunto convexo y $\sigma(X,B)$-compacto es también $\sigma(X,B)$-compacta (ver [49, §20.7(8)])

Tomamos una sucesión (x_n) en H. La prueba se reduce a demostrar que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente relativamente compacto en X ya que, en este caso, el teorema de Eberlein-Smulian nos asegura que existe una subsucesión de (x_n) que converge débilmente a un punto de H (al ser H débilmente cerrado). Esto prueba que H es débilmente secuencialmente compacto, y una nueva aplicación del teorema de Eberlein-Smulian conduce a que H es débilmente compacto.

Para probar que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente relativamente compacto, definimos el operador lineal continuo $S : \ell^1 \to X$ dado por

$$S((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

(nótese que H acotado). Si definimos $Y := \overline{\operatorname{span}(B)}^{\|\ \|}$, entonces $B_{X^*} = \overline{B_Y}^{\omega^*}$ ya que B es normante. Para comprobar que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es débilmente relativamente compacto en X, basta comprobar que $S^*(B_Y)$ es débilmente relativamente compacto en ℓ^∞, donde $S^* : X^* \to \ell^\infty$ es el operador adjunto de S. En efecto, si $\overline{S^*(B_Y)}^{\omega}$ es débilmente compacto, se cumple

$$\overline{S^*(B_Y)}^{\omega^*} = \overline{S^*(B_Y)}^{\omega};$$

como además S^* es ω^*-ω^* continua, tendríamos que:

$$S^*(B_{X^*}) = S^*(\overline{B_Y}^{\omega^*}) \subset \overline{S^*(B_Y)}^{\omega^*} = \overline{S^*(B_Y)}^{\omega}$$

Por lo tanto, $S^*(B_{X^*})$ es débilmente relativamente compacto, de donde S^* es un operador débilmente compacto. S es también débilmente compacto, y de aquí deducimos que $S(B_{\ell^1})$ es un conjunto débilmente relativamente compacto en X que contiene a $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$.

Finalmente, comprobaremos que $S^*(B_Y)$ es débilmente relativamente compacto en ℓ^∞. Utilizando el teorema de James, basta ver que cada elemento μ de $B_{(\ell^\infty)^*}$ alcanza su supremo en $S^*(B_Y)$, es decir, que $z := \mu \circ S^* \in X^{**}$ alcanza su supremo en B_Y. Para ello, tomamos una red $(\lambda_n^\alpha)_\alpha$ en B_{ℓ^1} que converge a μ en la topología ω^*. Para cada $b^* \in B$, $S^*(b^*) = b^* \circ S$ está en ℓ^∞, luego se cumple:

$$b^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha b^*(x_n) \longrightarrow z(b^*) \tag{4.1}$$

Al ser H absolutamente convexo y cerrado en norma, se cumple que $x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha x_n$ está en H para cada α. La $\sigma(X,B)$-compacidad de H permite asegurar que cierta subred (x_{α_j}) de (x_α) verifica que $\sigma(X,B) - \lim_j x_{\alpha_j} = x$ para cierto $x \in H$. Por lo tanto, si b^* es un elemento de B se cumple:

$$b^*(x) = \lim_j b^*(x_{\alpha_j}) = \lim_j b^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha_j} x_n \right) \tag{4.2}$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.2) deducimos que

$$z(b^*) = b^*(x) \quad \text{para cada } b^* \in B$$

La igualdad anterior se extiende a los elementos b^* de Y, y en consecuencia

$$\sup\{ z(b^*) : b^* \in B_Y \} = \sup\{ b^*(x) : b^* \in B_Y \} = \|x\| = b_x^*(x) = z(b_x^*)$$

para cierto $b_x^* \in B \subset B_Y$, donde hemos utilizado que B es una frontera de B_{X^*}. Por lo tanto, z alcanza su supremo en B_Y, y la prueba está concluida. ∎

4.1.3. El caso secuencialmente compacto

En [71] se demuestra que el problema de la frontera tiene solución positiva para el caso en que H es acotado en norma y $\sigma(X,B)$-secuencialmente compacto. Este resultado puede verse como una extensión del teorema de Rainwater, [25, page 155]. La siguiente es otra prueba que se basa en la reducción al caso convexo.

Teorema 4.3 *Sea X un espacio de Banach y B una frontera de B_{X^*}. Si H es un subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-secuencialmente compacto, entonces H es débilmente compacto.*

Demostración. Por el teorema de Eberlein-Smulian, basta probar que cada sucesión (x_n) en H tiene una subsucesión débilmente convergente a un punto de H. Por la hipótesis, existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) que converge a un punto x de H en la topología $\sigma(X,B)$.

$$Y = \overline{\operatorname{span}\left(\{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}\right)}^{\|\ \|}$$

que es un subespacio cerrado y separable de X. Si $i : Y \to X$ es la inclusión e $i^* : X^* \to Y^*$ el operador adjunto, entonces $i^*(B)$ es una frontera en B_{Y^*}. El conjunto $A = \{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es $\sigma(X,B)$-compacto, y también es $\sigma(Y,i^*(B))$-compacto; se cumple que $\overline{\operatorname{co}(A)}^{\sigma(Y,i^*(B))}$ es $\sigma(Y,i^*(B))$-compacto (aquí puede utilizarse el teorema 2.21 pues (B_{Y^*},ω^*) es secuencialmente compacto). Utilizando el teorema 4.2, tenemos que $\overline{\operatorname{co}(A)}^{\sigma(Y,i^*(B))}$ es $\sigma(Y,Y^*)$-compacto. Se cumple así que x es el $\sigma(Y,Y^*)$-límite de una subsucesión de (x_n), y también el límite respecto a la topología $\sigma(X,X^*)$ ya que B_{Y^*} está formado por las restricciones a Y de los elementos de B_{X^*}. Esto concluye la demostración. ∎

4.2. Otras respuestas al problema de la frontera

Pasamos a tratar otros casos en los que se tiene respuesta positiva al problema de la frontera y que serán deducidos, más o menos directamente, del trabajo realizado hasta ahora. Uno de los resultados principales es el corolario 4.7.1 en el que se demuestra que el problema de la frontera tiene solución positiva para espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ donde c tiene el cardinal del continuo. Este resultado comprende, entre otros, los siguientes casos (ver el apéndice):

- Espacios de Banach que no contienen una copia de ℓ^1.

- Espacios de Banach cuya bola dual es secuencialmente compacta para la topología ω^* (en particular, los espacios débilmente Asplund, los débilmente numerablemente determinados o los débilmente compactamente generados).

- Espacios de Banach que tienen la propiedad $\mathcal{C}$ de Corson (en particular los espacios débilmente Lindelöf).

En definitiva, el teorema 4.7 engloba a todas las clases de espacios de Banach para los que la solución al problema de la frontera se conocía, además de ampliar dicha clase.

Recordaremos previamente algunas definiciones que utilizaremos en lo que sigue.

Definición 4.4 *Se dice que un espacio topológico es K-analítico si es una imagen continua de un $K_{\sigma\delta}$ de un espacio compacto K, es decir, si es imagen continua de un subconjunto de K que puede escribirse como una intersección numerable de uniones numerables de compactos de K.*

Definición 4.5 *Un espacio topológico Y se dice numerablemente determinado, si existe un espacio métrico separable M y una aplicación $T : M \to 2^Y$ que es usco (usco significa semicontinua superiormente) y tal que*

$$Y = \bigcup\{T(x) : x \in M\}$$

Recordemos que T es usco si verifica las condiciones:

(1) Para cada $x \in M$, $T(x) \subset Y$ es compacto.

(2) Para cada U abierto en Y, el conjunto $\{x \in M : T(x) \subset U\}$ es un abierto de M.

Teorema 4.6 *Sea X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto de X acotado y $\sigma(X,B)$-compacto. Son equivalentes:*

(1) (H,ω) es compacto.

(2) (H,ω) es K-analítico.

(3) (H,ω) es numerablemente determinado.

(4) (H,ω) es Lindelöf.

(5) $(H,\sigma(X,B))$ *está fragmentado por la norma de* X.

(6) $(H,\sigma(X,B))$ *es secuencialmente compacto.*

(7) Cada sucesión (b_n^*) *en* B_{X^*} *posee una subsucesión* $(b_{n_j}^*)$ *tal que* $(b_{n_j}^*(h))$ *converge para cada* $h \in H$.

(8) Cada sucesión (b_n^*) *en* B *posee una subsucesión* $(b_{n_j}^*)$ *tal que* $(b_{n_j}^*(h))$ *converge para cada* $h \in H$.

(9) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ *es* $\sigma(X,B)$*-compacto.*

(10) Cada subconjunto $\sigma(X,B)$*-separable de* H *es débilmente separable.*

Demostración. En la demostración utilizaremos la siguiente notación: si A es un subconjunto de X^*, entonces

$$\widehat{A} = \{\, a|_H : a \in A \,\}$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Es obvio.
(2) $\Rightarrow$ (3) Se debe a que todo espacio K-analítico es numerablemente determinado ([73]).
(3) $\Rightarrow$ (4) Ya que todo espacio numerablemente determinado es Lindelöf ([32]).
(4) $\Rightarrow$ (5) Por la proposición 3.16.
(5) $\Rightarrow$ (6) Por un resultado de Namioka (ver 3.6).
(6) $\Rightarrow$ (1) Por el teorema 4.3.

(1) $\Rightarrow$ (7) Por hipótesis, (H,ω) es compacto, y así $\widehat{X^*}$ es un subconjunto del espacio de funciones reales continuas definidas sobre un compacto, $C(H,\omega)$. Además, como (B_{X^*},ω^*) es compacto, $\widehat{B_{X^*}}$ es un subconjunto puntualmente compacto del espacio $(C(H,\omega),t_p)$, que es angélico ([31, page 36]). Por lo tanto, si (b_n^*) es una sucesión en B_{X^*}, existe una subsucesión $(b_{n_j}^*)$ tal que $(b_{n_j}^*(h))$ converge para cada $h \in H$ (es más, existe una de estas subsucesiones para cada $t_p(H)$-punto de acumulación de (b_n^*)).
(7) $\Rightarrow$ (8) Es inmediato.
(8) $\Rightarrow$ (9) Sea $D = \mathrm{co}(B \cup (-B))$. Así $\widehat{D} = \mathrm{co}(\widehat{B} \cup (-\widehat{B}))$ es un subconjunto de $C(H,\sigma(X,B))$. Por hipótesis, cada sucesión en $\widehat{B}$ tiene una subsucesión $t_p(H)$-convergente, luego el teorema 1.16 asegura que $\widehat{D}$ también verifica la misma propiedad, y en consecuencia, el teorema 2.5 asegura que H es un $P(D)$-conjunto. Puede aplicarse ahora el teorema 2.20 para concluir que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es $\sigma(X,B)$-compacto.

(9) $\Rightarrow$ (1) Como $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es convexo y $\sigma(X,B)$-compacto, tendremos que es también débilmente compacto por el teorema 4.2. Ahora bien, H es débilmente cerrado al ser $\sigma(X,B)$-compacto, luego H es también débilmente compacto.

(1) $\Rightarrow$ (10) Si H es débilmente compacto, la identidad $i : (H,\omega) \to (H,\sigma(X,B))$ es un homeomorfismo, por lo que un subconjunto A de H es ω-separable si, y sólo si, A es $\sigma(X,B)$-separable.

(10) $\Rightarrow$ (5) Sea $D = \mathrm{co}(B \cup (-B))$ y A un subconjunto numerable de D. Consideramos X como un subconjunto de $C(B_{X^*})$, y la función

$$R_{\overline{A}} : C(B_{X^*}) \to C(\overline{A}^{\omega^*})$$

que a cada función $f \in C(B_{X^*})$ le hace corresponder su restricción a $\overline{A}$, $R_{\overline{A}}(f) = f|_{\overline{A}}$. El conjunto $R_{\overline{A}}(H)$ es $t_p(A)$-compacto y metrizable (al ser $\overline{A}^{\omega^*}$ separable), y por lo tanto existe un subconjunto numerable C de H tal que $R_{\overline{A}}(C)$ es $t_p(A)$-denso en $R_{\overline{A}}(H)$. Sea $F = \overline{C}$; se cumple que $R_{\overline{A}}(F) = R_{\overline{A}}(H)$. Como F es $t_p(D)$-separable, la hipótesis nos asegura que es también separable para la topología $\omega = t_p(B_{X^*})$, y por lo tanto, F es separable en la norma de $C(B_{X^*})$; su imagen por $R_{\overline{A}}$, $R_{\overline{A}}(H)$, es separable en la norma de $C(\overline{A})$, con lo que la proposición 3.11 nos asegura que $(H, t_p(D))$ está fragmentado por la norma de $C(B_{X^*})$, que coincide con la norma de X.

■

Como consecuencia de los resultados ya establecidos, podemos demostrar que el problema de la frontera tiene solución positiva para espacios de Banach que no contienen una copia de $\ell^1(c)$.

Teorema 4.7 *Sea X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto norma-acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de X. Son equivalentes:*

(1) H no contiene una familia equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$.

(2) H es débilmente compacto.

<u>Demostración</u>.

Para la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) basta tener en cuenta que la base canónica de $\ell^1(c)$ forma un conjunto que no es relativamente débilmente compacto.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea H como en la hipótesis. El teorema 2.21 nos asegura que $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es $\sigma(X,B)$-compacto y así puede aplicarse el teorema 4.6 para deducir que H es débilmente compacto. ■

Corolario 4.7.1 *Sea X un espacio de Banach que no contiene una copia de $\ell^1(c)$. Si B es una frontera de B_{X^*} y H es un subconjunto acotado y $\sigma(X,B)$-compacto de X, entonces H es débilmente compacto.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

4.3. El problema de la frontera en $\ell^1(\Gamma)$

El corolario 4.7.1 de la sección anterior pone de manifiesto que el problema de la frontera tiene solución positiva para espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$. Como contrapunto a este resultado, en esta sección demostramos que el problema de la frontera tiene solución positiva para cualquier espacio $\ell^1(\Gamma)$. Este resultado aparece en [15, remark 3], aunque aquí se da una demostración distinta y más sencilla, que se basa en las ideas utilizadas en dicho artículo para demostrar que en espacios $C(K)$ el problema de la frontera tiene solución positiva. Nosotros probaremos, además, que $\ell^1(\Gamma)$, dotado de la topología de convergencia sobre una frontera cualquiera, es angélico.

Dado un conjunto infinito cualquiera Γ, se denota

$$\ell^1(\Gamma) = \{ (x_\gamma) \in \mathbb{R}^\Gamma : \sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| < +\infty \}$$

$$\ell^\infty(\Gamma) = \{ (x_\gamma) \in \mathbb{R}^\Gamma : \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| < +\infty \}$$

Definición 4.8 *Dado un elemento $x = (x_\gamma) \in \ell^\infty(\Gamma)$, se llama soporte de x al conjunto* $\mathrm{sop}(x) = \{ \gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0 \}$.

Denotamos por D al subconjunto de $\ell^\infty(\Gamma)$ definido así: $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in D$ si, y sólo si, $\mathrm{sop}(x)$ es numerable y $x_\gamma \in \{-1, 1\}$ para cada $\gamma \in \mathrm{sop}(x)$.

Proposición 4.9 *D es una frontera de $B_{\ell^\infty(\Gamma)}$.*

Demostración. Si $x = (x_\gamma) \in \ell^1(\Gamma)$, existe $I \subset \Gamma$ numerable tal que

$$\|x\| = \sum_{\gamma\in I} |x_\gamma| = \sum_{\gamma\in I} (\mathrm{signo}\, x_\gamma) x_\gamma$$

Sea $y_\gamma = \begin{cases} \mathrm{signo}\, x_\gamma & \text{si } \gamma \in I \\ 0 & \text{si } \gamma \notin I \end{cases}$. Entonces $y^* = (y_\gamma) \in D$ y $\|x\| = y^*(x)$. ■

En lo que sigue denotaremos $\sigma' = \sigma(\ell^1(\Gamma), D)$. Nuestro primer paso es probar el resultado que hemos adelantado para la frontera D.

Proposición 4.10 *Se verifican las siguiente afirmaciones.*

(1) El espacio $(\ell^1(\Gamma), \sigma')$ es angélico.

(2) Un subconjunto acotado $H \subset \ell^1(\Gamma)$ es σ'-compacto si, y sólo si, es débilmente compacto.

Demostración.
(1) Dado un espacio de Banach y un subconjunto normante $B \subset B_{X^*}$, la aplicación

$$\varphi : (X, \sigma(X, B)) \to C_p(B, \omega^*)$$

dada por $\varphi(x) = x|_B$ es inyectiva y continua. De esta forma, todo subconjunto $\sigma(X, B)$-compacto de X es homeomorfo a un subconjunto puntualmente compacto de $C(B, \omega^*)$. En el caso particular en que $X = \ell^1(\Gamma)$ y $B = D$ es el subconjunto de $B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ definido anteriormente, al ser $(D, t_p(\Gamma)) = (D, \omega^*)$ secuencialmente compacto, $C_p(D, \omega^*)$ es angélico ([31, 3.7]), y por lo tanto $(\ell^1(\Gamma), \sigma')$ es también angélico ([31, 3.3]).
(2) Si H es σ'-compacto, (1) permite asegurar que (H, σ') es secuencialmente compacto, y al ser D una frontera y H acotado, el teorema 4.6 permite concluir que H es débilmente compacto. ■

En lo que sigue, trasladaremos el resultado de la proposición anterior al caso de una frontera cualquiera B de $B_{\ell^\infty(\Gamma)}$. En el siguiente lema utilizaremos la siguiente propiedad que relaciona B con D: si A es un subconjunto numerable de Γ y fijamos una sucesión $(y_\gamma)_{\gamma \in A}$ en $\{+1, -1\}^A$, existe $(b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in B$ tal que $b_\gamma = y_\gamma$ para cada $\gamma \in A$. En efecto, podemos considerar $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^1(\Gamma)$ tal que

$$\operatorname{sop}(x) = A \quad \text{y} \quad \|x\| = \sum_{\gamma \in A} |x_\gamma| = \sum_{\gamma \in A} y_\gamma \cdot x_\gamma$$

Por ser B una frontera, existe $b = (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in B$ tal que $\|x\| = \sum_{\gamma \in A} b_\gamma x_\gamma$. Ahora bien, $-1 \leq b_\gamma \leq 1$ para cada γ luego ha de ser $b_\gamma x_\gamma = y_\gamma x_\gamma$ para cada $\gamma \in A$, es decir, $b_\gamma = y_\gamma$ si $\gamma \in A$, por la elección de x.

Lema 4.11 *Sea $B \subset B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ una frontera de $\ell^1(\Gamma)$, (z_n) una sucesión en $\ell^1(\Gamma)$ y $d^* \in D$. Entonces existe $b^* \in B$ tal que*

$$d^*(z_n) = b^*(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Demostración</u>. Escribimos $d^* = (d^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. El conjunto

$$A = \mathrm{sop}(d^*) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{sop}(z_n)\right)$$

es numerable. Por ser el comentario que precede al enunciado, existe $b^* \in B$ tal que $b^*_\gamma = d^*_\gamma$, $\forall \gamma \in A$. Este b^* verifica el enunciado. ∎

Proposición 4.12 *Sea $B \subset B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ una frontera de $\ell^1(\Gamma)$.*

(1) Si (z_n) es una sucesión en $\ell^1(\Gamma)$, cualquier $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-punto de acumulación de (z_n) es también un punto de acumulación respecto a la topología σ'.

(2) Si H es un subconjunto $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente numerablemente compacto de $\ell^1(\Gamma)$, entonces H es σ'-relativamente compacto en $\ell^1(\Gamma)$.

(3) Si H es un subconjunto $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-compacto de $\ell^1(\Gamma)$, entonces H es σ'-compacto.

<u>Demostración</u>.
(1) es inmediato a partir del lema 4.11.

(2) El apartado (1) asegura que si H es $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente numerablemente compacto en $\ell^1(\Gamma)$, entonces es σ'-relativamente numerablemente compacto en $\ell^1(\Gamma)$. Esto implica que H es σ'-relativamente compacto ya que $(\ell^1(\Gamma), \sigma')$ es angélico por la proposición 4.10.

(3) Si H es $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-compacto en $\ell^1(\Gamma)$, el apartado (2) asegura que H es σ'-relativamente compacto en $\ell^1(\Gamma)$. Basta demostrar así que H es σ'-cerrado. Ahora bien, al ser $(\ell^1(\Gamma), \sigma')$ angélico (4.10), dado $z \in \overline{H}^{\sigma'}$ existe una sucesión (z_n) en H tal que

$$z = \sigma' - \lim_{n\to\infty} z_n \tag{4.3}$$

Por otro lado, al ser H $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$ compacto, (z_n) tiene un $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-punto de acumulación $h \in H$, que es también σ'-punto de acumulación por el apartado (1). Esto, junto con la ecuación (4.3) asegura que $z = h \in H$. ∎

Proposición 4.13 *Sea $B \subset B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ una frontera de $\ell^1(\Gamma)$. Un subconjunto $H \subset \ell^1(\Gamma)$ acotado es $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-compacto si, y sólo si, es débilmente compacto.*

Demostración. Si H es débilmente compacto entonces es acotado y $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-compacto. Para el recíproco, basta aplicar el apartado (3) de la proposición 4.12 para obtener que H es σ'-compacto y el apartado (2) de la proposición 4.10 para obtener ahora que H es débilmente compacto. ■

A continuación, probaremos que $(\ell^1(\Gamma), \sigma(\ell^1(\Gamma), B))$ es angélico. Necesitamos una proposición previa.

Proposición 4.14 *Sea $B \subset B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ una frontera de $\ell^1(\Gamma)$ y H un subconjunto numerable y $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente numerablemente compacto de $\ell^1(\Gamma)$. Entonces*

(1) $\overline{H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)} = \overline{H}^{\sigma'}$

(2) Las topologías $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$ y σ' coinciden en $\overline{H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$.

Demostración.
(1) Como H es numerable, el lema 4.11 asegura que $\overline{H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)} \subset \overline{H}^{\sigma'}$. Por otro lado, si $z \in \overline{H}^{\sigma'}$, el carácter angélico de $(\ell^1(\Gamma), \sigma')$ (4.10) junto con el hecho de que $\overline{H}^{\sigma'}$ es σ'-compacto (apartado (2) de 4.12) asegura que existe una sucesión (z_n) en H tal que

$$z = \sigma' - \lim_{n\to\infty} z_n$$

Por hipótesis existe un $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-punto de acumulación de (z_n), $w \in \overline{H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$. Por el apartado (1) de la proposición 4.12, w es también un σ'-punto de acumulación de (z_n), con lo que ha de ser $z = w \in \overline{H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$.

(2) Sea $L = \overline{H}^{\sigma'}$. Por la σ'-compacidad de L (apartado (2) de 4.12), basta demostrar que la identidad:

$$id : (L, \sigma') \longrightarrow (L, \sigma(\ell^1(\Gamma), B))$$

es continua, y para esto basta comprobar que si $F \subset L$ es $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-cerrado, entonces F es σ'-cerrado. Ahora bien, al ser $(L, \sigma(\ell^1(\Gamma), B))$ regular se tiene:

$$F = \bigcap \{ \overline{U}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)} : F \subset U \subset L,\ U\ \sigma(\ell^1(\Gamma), B)\text{-abierto en } L \}$$

Además, $\overline{U}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)} = \overline{U \cap H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$, y al ser $U \cap H$ numerable y $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente numerable compacto, el apartado (1) nos asegura que

$$\overline{U \cap H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)} = \overline{U \cap H}^{\sigma'} = \overline{U}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$$

de donde

$$F = \bigcap \{ \overline{U \cap H}^{\sigma'} : F \subset U \subset L, \ U \ \sigma(\ell^1(\Gamma), B)\text{-abierto en } L \}$$

lo que permite concluir que F es σ'-cerrado. ■

Teorema 4.15 *Sea $B \subset B_{\ell^\infty(\Gamma)}$ una frontera de $\ell^1(\Gamma)$. Entonces $(\ell^1(\Gamma), \sigma(\ell^1(\Gamma), B))$ es angélico.*

Demostración.
Primera parte: Sea A un subconjunto $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente numerablemente compacto de $\ell^1(\Gamma)$. Por el apartado (2) de la proposición 4.12, $\overline{A}^{\sigma'}$ es σ'-compacto, de modo que para demostrar que $\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$ es $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente compacto basta probar que

$$id : (\overline{A}^{\sigma'}, \sigma') \longrightarrow (\overline{A}^{\sigma'}, \sigma(\ell^1(\Gamma), B))$$

es continua. Para ello, demostraremos que cualquier subconjunto $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-cerrado $F \subset \overline{A}^{\sigma'}$ es σ'-cerrado. Sea $z \in \overline{F}^{\sigma'}$. Al ser $(\ell^1(\Gamma), \sigma')$ angélico (4.10), existe una sucesión (z_n) en F tal que

$$z = \sigma' - \lim_{n\to\infty} z_n$$

Por otro lado, $z_n \in \overline{A}^{\sigma'}$ luego existe una sucesión (z_{mn}) en A tal que

$$z_n = \sigma' - \lim_{m\to\infty} z_{mn}$$

$H = \{z_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable y $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente numerablemente compacto de $\ell^1(\Gamma)$, y por lo tanto la proposición 4.14 asegura que las topologías $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$ y σ' coinciden en $\overline{H}^{\sigma'} = \overline{H}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$. Así z es el límite en la topología $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$ de (z_n), de donde $z \in \overline{F}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)} = F$.

Segunda parte: Sea A un subconjunto $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-relativamente compacto de $\ell^1(\Gamma)$. $\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$ es $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-compacto, y por el apartado (3) de la proposición 4.12, es también σ'-compacto. El mismo razonamiento asegura que cada subconjunto $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-cerrado de $\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$ es σ'-cerrado, de donde

$$id : (\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}, \sigma') \longrightarrow (\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}, \sigma(\ell^1(\Gamma), B))$$

es continua. Esto implica que id es un homeomorfismo, y al ser $\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$ σ'-angélico (apartado (1) de la proposición 4.10), también será $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-angélico, de donde $\overline{A}^{\sigma(\ell^1(\Gamma),B)}$ está formado por $\sigma(\ell^1(\Gamma), B)$-límites de sucesiones en A. ■

4.4. El problema de la frontera y el intercambio de límites

En esta sección utilizamos la propiedad del intercambio de límites de Grothendieck para dar una caracterización de los subconjuntos débilmente compactos H de un espacio de Banach X en términos de la topología de X^* determinada por la convergencia uniforme sobre sucesiones contenidas en H (teorema 4.18). Esta caracterización puede afinarse en el caso en que X es un espacio de funciones continuas sobre un compacto, $C(K)$, y conduce de forma natural a una propiedad que cumplen las fronteras de $B_{C(K)^*}$ que provienen de un subconjunto denso de K.

El concepto de intercambio de límites fue introducido por A. Grothendieck (ver [31, 1.4]), y se ha mostrado como una importante herramienta para la caracterización de subconjuntos relativamente compactos en la topología débil.

Definición 4.16 (Grothendieck) *Sea Z un espacio topológico Hausdorff, X un conjunto y A un subconjunto de funciones de Z^X. Se dice que X y A tienen la propiedad del intercambio de límites (en Z) si para cada sucesión (x_n) en X y cada sucesión (f_m) en A se cumple:*

$$\lim_m \lim_n f_m(x_n) = \lim_n \lim_m f_m(x_n)$$

siempre que todos los límites involucrados existan.

La notación $A \sim X$ (en Z) indicará que X y A tienen la propiedad del intercambio de límites. Si el contexto es claro, no se hará referencia al espacio Z.

El siguiente teorema, que aparece en [31, page 12], será la base de algunos de los resultados que siguen.

Teorema 4.17 *Sea D un subconjunto denso en un espacio numerablemente compacto K y sea (Z, d) un espacio métrico compacto. Para un subconjunto A de $C(K, Z)$ son equivalentes:*

(1) A es $t_p(K)$-relativamente numerablemente compacto en $C(K, Z)$.

(2) $A \sim K$ (en Z).

(3) $A \sim D$ (en Z).

(4) A es $t_p(K)$-relativamente compacto en $C(K, Z)$.

Con este resultado sobre intercambio de límites podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.18 *Sea X un espacio de Banach, B un subconjunto normante de B_{X^*} y $D = \mathrm{co}(B \cup (-B))$. Para un conjunto H de X que sea acotado y $\sigma(X, B)$-numerablemente compacto, son equivalentes:*

(1) H es $\sigma(X, X^*)$-compacto.

(2) D es denso en B_{X^*} para la topología de convergencia uniforme sobre H.

(3) D es denso en B_{X^*} para la topología de convergencia uniforme sobre sucesiones contenidas en H.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Recordemos que la topología de Mackey en X^*, $\mu(X^*, X)$, es la topología localmente convexa más fina tal que $(X^*, (\mu(X^*, X)))^* = X$ (ver [44, 8.5.5]). Se cumple así que:

$$B_{X^*} = \overline{D}^{\sigma(X^*, X)} = \overline{D}^{\mu(X^*, X)}$$

donde la primera igualdad es cierta al ser D un conjunto normante y absolutamente convexo (ver la proposición 2.12), y la segunda por ser la topología de Mackey compatible con el par dual $< X^*, X >$ ([49, §20.7(6)]). Al ser H un conjunto débilmente compacto, la envoltura absolutamente convexa y cerrada de H es un subconjunto débilmente compacto y absolutamente convexo de X (por el teorema de Krein-Smulian), y como la topología de Mackey es la topología en X^* de convergencia uniforme sobre subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos ([44, 8.4.E]), en particular se cumple que D es denso en B_{X^*} para la topología de convergencia uniforme sobre H.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es inmediato.

(3) $\Rightarrow$ (1) Miramos X como un subconjunto de $C(B_{X^*}, \omega^*)$. Como H es acotado, $H \subset C(B_{X^*}, I)$ para cierto intervalo compacto I de $\mathbb{R}$. Por un lado, la topología de convergencia puntual de $C(B_{X^*}, I)$ induce en H la topología débil, y por otro, X es $t_p(B_{X^*})$-cerrado en $C(B_{X^*})$ por lo que, para demostrar que H es débilmente compacto en X, basta probar que H es $t_p(B_{X^*})$-compacto. Ahora bien, la condición de compacidad numerable de H en la topología $\sigma(X, B)$ asegura que H es secuencialmente

cerrado para $t_p(B_{X^*})$, y por el carácter angélico de $C_p(B_{X^*})$ ([31, 3.7]), la prueba termina si demostramos que H es $t_p(B_{X^*})$-relativamente compacto en $C(B_{X^*}, I)$. Para esto, utilizamos el teorema 4.17 y probamos que H y D intercambian límites en I. Tomamos dos sucesiones (x_n) en H y (b_n^*) en D. Comprobaremos que si existen los límites

$$\lim_m \lim_n b_n^*(x_m) \quad \text{ y } \lim_n \lim_m b_n^*(x_m),$$

entonces coinciden. Como (x_n) se aglomera respecto a la topología $\sigma(X, B) = \sigma(X, D)$ en un punto $x_0 \in H$, y (b_n^*) se aglomera en un punto $x_0^* \in B_{X^*}$ respecto a la topología ω^* (por la compacidad de (B_{X^*}, ω^*)), tendremos que

$$\lim_n \lim_m b_n^*(x_m) = \lim_n b_n^*(x_0) = x_0^*(x_0)$$

Por otro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, se cumple que $\lim_n b_n^*(x_m) = x_0^*(x_m)$, y basta así probar, para que se cumpla la igualdad de los límites iniciales que:

$$\lim_m x_0^*(x_m) = x_0^*(x_0) \tag{4.4}$$

Supongamos que no se cumple (4.4). Existirá entonces un $\varepsilon > 0$ tal que cierta subsucesión de $(x_0^*(x_m))$ que denotamos igual cumple:

$$|x_0^*(x_m) - x_0^*(x_0)| > \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

Ahora bien, por la densidad de D en B_{X^*} para la topología de convergencia uniforme sobre sucesiones de H, si consideramos el conjunto numerable $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$, entonces existe $b^* \in D$ tal que:

$$|b^*(x_m) - x_0^*(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\; \forall m \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad |b^*(x_0) - x_0^*(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.6}$$

Por otro lado, como (x_m) se aglomera en x_0 respecto a la topología $\sigma(X, D)$ se tiene que:

$$|b^*(x_m) - b^*(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{se cumple para infinitos subíndices } m \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

Utilizando ahora las condiciones (4.6) y (4.7), se cumple:

$$|x_0^*(x_m) - x_0^*(x_0)| \leq |x_0^*(x_m) - b^*(x_m)| + |b^*(x_m) - b^*(x_0)| + |b^*(x_0) - x_0^*(x_0)| < \varepsilon$$

para infinitos subíndices $m \in \mathbb{N}$, en contradicción con la condición (4.5). Luego los límites iniciales coinciden, y concluye la demostración.

■

En el caso de un espacio $C(K)$ el resultado anterior puede llevarse hasta la siguiente proposición.

Proposición 4.19 *Sea K un espacio compacto Hausdorff, D un subconjunto denso de K y H un subconjunto acotado y $t_p(D)$-numerablemente compacto de $C(K)$. Si para cada $k \in K$, cada $\varepsilon > 0$ y cada sucesión (f_n) en H existe un elemento $d \in D$ tal que*

$$|f_n(k) - f_n(d)| < \varepsilon \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces H es débilmente compacto.

<u>Demostración</u>. Para cierto intervalo compacto I de $\mathbb{R}$, se tiene que H es un subconjunto de $C(K, I)$. Como D es denso en K, la prueba concluye si demostramos que H intercambia límites con D, pues en este caso, el teorema de Grothendieck (4.17) asegura que H es relativamente débilmente compacto en $C(K)$ (recuérdese que un conjunto acotado de $C(K)$ es relativamente débilmente compacto si, y sólo si, es $t_p(K)$-relativamente compacto), y por otro lado, la hipótesis sobre H asegura que éste es débilmente (secuencialmente) compacto.

Para probar que $H \sim D$, razonamos de forma análoga a la demostración del teorema 4.18. Sean (f_n) y (d_n) sucesiones respectivas en H y D con puntos de aglomeración $f_0 \in H$ y $k_0 \in K$. Así se cumple:

$$\lim_n \lim_m f_m(d_n) = f_0(k_0) \qquad \text{y}$$

$$\lim_m \lim_n f_m(d_n) = \lim_m f_m(k_0)$$

donde hemos supuesto que todos los límites involucrados existen. Si fuera

$$\lim_m f_m(k_0) \neq f_0(k_0)$$

existiría un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(f_m(k_0))$ que denotamos igual tal que

$$|f_m(k_0) - f_0(k_0)| > \varepsilon \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

Por hipótesis, existe un elemento $d \in D$ tal que

$$|f_0(k_0) - f_0(d)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f_m(k_0) - f_m(d)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

Además, como (f_m) se aglomera en f_0 respecto a la topología $t_p(D)$, se cumple

$$|f_m(d) - f_0(d)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para infinitos } m \in \mathbb{N} \tag{4.10}$$

La desigualdad

$$|f_m(k_0) - f_0(k_0)| \leq |f_m(k_0) - f_m(d)| + |f_m(d) - f_0(d)| + |f_0(d) - f_0(k_0)| < \varepsilon$$

es válida para infinitos $m \in \mathbb{N}$ (utilizando las condiciones (4.9) y (4.10)). Esto contradice la condición (4.8). ■

La condición de densidad de D en K en la topología de convergencia uniforme sobre sucesiones de H impuesta en la proposición anterior para que H y D permuten límites, es satisfecha de forma natural por las fronteras $D \subset K$ de $B_{C(K)^*}$, como probamos en los siguientes resultados.

Lema 4.20 *Sea K un espacio Hausdorff compacto y F un subconjunto no vacío de K. Son equivalentes.*

(1) Existe una aplicación f en $C(K)$ tal que $F = \{\, k \in K : |f(k)| = \|f\|_\infty \,\}$.

(2) F es un subconjunto cerrado y $\mathcal{G}_\delta$ en K.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Es obvio que si se cumple (1), entonces F es cerrado (por la continuidad de f) y no vacío por la compacidad de K. Por otro lado, F es un $\mathcal{G}_\delta$ ya que podemos escribir:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ k \in K : \Big| |f(k)| - \|f\|_\infty \Big| < \frac{1}{n} \right\}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ donde O_n es abierto para cada n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, F y $K \setminus O_n$ son subconjuntos cerrados y disjuntos en el espacio normal K. El lema de Urysohn permite asegurar la existencia de una función $f_n : K \to \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ de modo que $f_n(F) = \{0\}$ y $f_n(K \setminus O_n) = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. La función $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua por ser límite uniforme de las funciones continuas $\sum_{n=1}^{m} f_n$. Así, $f = 1 - g : K \to [0,1]$ es continua y cumple $\|f\|_\infty = 1$ y $F = \{\, k \in K : |f(k)| = \|f\|_\infty \}$. ■

Lema 4.21 *Sea K un espacio Hausdorff compacto y D un subconjunto de K. Entonces son equivalentes*

(1) $D \cup (-D)$ es una frontera de $B_{C(K)^*}$.

(2) D corta a todo subconjunto cerrado, $\mathcal{G}_\delta$ y no vacío de K.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Si F es un cerrado, $\mathcal{G}_\delta$ y no vacío en K, el lema anterior nos asegura que se cumple $F = \{\, k \in K : |f(k)| = \|f\|_\infty \}$ para alguna función $f \in C(K)$. Ahora bien, si $D \cup (-D)$ es frontera, existirá un elemento $d \in D$ tal que $\|f\|_\infty = f(d)$ o $\|f\|_\infty = -f(d)$. En cualquier caso $\|f\|_\infty = |f(d)|$, y por lo tanto $F \cap D \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $f \in C(K)$ y sea $F = \{\, k \in K : |f(k)| = \|f\|_\infty \}$. F es no vacío, y además es cerrado y $\mathcal{G}_\delta$ por el lema previo. Nuestra hipótesis nos asegura que existe un elemento $d \in D \cap F$, luego $\|f\|_\infty = |f(d)| = \max\{\, f(d), -f(d)\}$ y por lo tanto $D \cup (-D)$ es una frontera de $B_{C(K)^*}$. ■

Así llegamos a la siguiente mejora del teorema de Grothendieck [38], que es la solución al problema de la frontera para el caso $X = C(K)$ y fronteras $D \subset K$.

Teorema 4.22 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y D un subconjunto de K tal que para cada $f \in C(K)$ existe $d \in D$ con $\|f\|_\infty = |f(d)|$. Entonces los subconjuntos acotados y $t_p(D)$-numerablemente compactos de $C(K)$ son débilmente compactos.*

Demostración. Sea $k \in K$, $\varepsilon > 0$ y (f_n) una sucesión en H. El conjunto

$$\begin{aligned} F &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \in K : |f_n(y) - f_n(k)| \le \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{n,k=1}^{\infty} \left\{ y \in K : |f_n(y) - f_n(k)| < \varepsilon + \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

es un cerrado, $\mathcal{G}_\delta$ y no vacío de K. La hipótesis sobre D asegura que $D \cup (-D)$ es una frontera de $B_{C(K)^*}$, y en virtud del lema 4.21 existe $d \in D$ tal que

$$|f_n(d) - f_n(k)| \le \varepsilon \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

La proposición 4.19 permite concluir que H es débilmente compacto. ■

Notemos aquí que el problema de la frontera para espacios $C(K)$ ha sido resuelto en general en [15]. Nosotros generalizaremos el resultado de [15] a espacios de funciones vectoriales en el epígrafe siguiente y hemos, de momento, preferido demostrar aquí el teorema anterior porque la demostración que damos es novedosa y pone de manifiesto de forma clara, vía la propiedad del intercambio de límites, en qué interviene exactamente el concepto de frontera.

4.5. El problema de la frontera en un espacio $C(K,E)$

En esta sección estudiaremos el problema de la frontera para un espacio de funciones continuas $C(K,E)$ definidas en un espacio topológico compacto y Hausdorff K, y con valores en un espacio de Banach E. Las fronteras que se consideran vienen dadas de forma natural como "productos" de fronteras de los espacios $C(K)$ y E. Como referencia utilizaremos algunos resultados del artículo [15], donde se resuelve el problema de la frontera para el espacio $C(K)$ y para fronteras cualesquiera.

Comenzamos recopilando algunos resultados sobre el espacio $C(K,E)$ que utilizaremos en lo que sigue. En primer lugar, es conocido que $C(K,E)$ es un espacio de Banach cuando se le dota de la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup\{\, \|f(k)\| : k \in K\,\}$$

La proposición siguiente recoge otros resultados sobre $C(K,E)$.

Proposición 4.23 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff y E un espacio de Banach. Entonces:*

(1) La aplicación $T : C(K,E) \to C(K \times B_{E^*})$ que a cada $f \in C(K,E)$ hace corresponder $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f}(k,x^*) = x^*(f(k))$ es una inmersión lineal e isométrica.

(2) El espacio $(C(K,E), t_p(K \times B_{E^*}))$ es angélico, donde $t_p(K \times B_{E^*})$ es la topología de convergencia puntual inducida en $C(K,E)$ por $C(K \times B_{E^*})$.

(3) Un subconjunto H de $C(K,E)$ es débilmente compacto si, y sólo si, es acotado y compacto para la topología $t_p(K \times B_{E^*})$.

Demostración.
(1) es fácil de probar.

(2) se deduce de lo siguiente: el espacio $C_p(Z)$, para Z compacto, es angélico ([31, 3.7]), y todo subespacio de un espacio angélico es angélico.

(3) La topología débil de $C(K,E)$ coincide con la inducida por la topología débil de $C(K \times B_{E^*})$ (recuérdese la inmersión isométrica del apartado (1)); por lo tanto H es débilmente compacto en $C(K,E)$ si, y sólo si, lo es como subconjunto de $C(K \times B_{E^*})$. Finalmente, un subconjunto acotado de $C(K \times B_{E^*})$ es débilmente compacto si, y sólo si, es $t_p(K \times B_{E^*})$-compacto, [38]. ■

4.5.1. Conjuntos normantes y fronteras en $C(K, E)$

El apartado (1) de la anterior proposición nos asegura que los elementos del dual de $C(K, E)$ son restricciones de los elementos de $C(K \times B_{E^*})^*$; por lo tanto, si F es un conjunto normante (una frontera) de $B_{C(K\times B_{E^*})^*}$, entonces el conjunto formado por las restricciones de los elementos de F a $C(K, E)$ constituye un subconjunto normante (una frontera) de $B_{C(K,E)^*}$. Tenemos así los siguientes resultados.

- Si D es un subconjunto denso de K y B es un subconjunto normante de B_{E^*}, entonces $D \times B$ es un subconjunto normante de $B_{C(K,E)^*}$, ya que para cada f de $C(K, E)$:
$$\|f\| = \sup\{\, \|f(k)\| : k \in K \,\} =$$
$$\sup\{\, \|f(d)\| : d \in D \,\} = \sup\{\, |x^*(f(d))| : d \in D,\ x^* \in B \,\}$$
- El conjunto $K \times B_{E^*}$ es una frontera de $B_{C(K,E)^*}$. En general, si B' es una frontera en B_{E^*}, entonces $K \times B'$ es una frontera para $B_{C(K,E)^*}$; en efecto, si $f \in C(K, E)$, se tiene:
$$\|f\| = \sup\{\, \|f(k)\| : k \in K \,\} = \|f(k_0)\| = b^*(f(k_0))$$
para ciertos $k_0 \in K$ y $b^* \in B'$ (se ha utilizado la compacidad de K y el hecho de que para cualquier elemento $x \in E$, $\|x\|$ es el máximo de $\{\, b(x) : b \in B' \,\}$).

El siguiente resultado usa las propiedades demostradas en el segundo capítulo.

Proposición 4.24 *Sea D un subconjunto denso de K y B un subconjunto normante de B_{E^*}. Si K no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$, E no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ y H es un subconjunto acotado y $t_p(D \times B)$-compacto de $C(K, E)$, entonces*

(1) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{t_p(D\times B)}$ *es $t_p(D \times B)$-compacto.*

(2) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{t_p(D\times B)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$.

(3) Si H es convexo, tiene la WRNP.

Demostración. Sea $F = \mathrm{co}(B \cup (-B))$. $D \times F$ es denso en $K \times B_{E^*}$. Teniendo en cuenta las hipótesis sobre K y E, y los teoremas A.7 y A.4, tenemos que $K \times B_{E^*}$ no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. El teorema 2.21 y el corolario 2.24.2 aseguran que todo subconjunto acotado y $t_p(D \times F)$-compacto verifica las correspondientes propiedades (1), (2) y (3). Finalmente, las topologías $t_p(D \times B)$ y $t_p(D \times F)$ coinciden en $C(K, E)$, y esto concluye la demostración. ■

En lo que sigue, nuestro interés se centrará en el siguiente tipo de conjuntos: si B y B' son fronteras respectivas de $B_{C(K)^*}$ y B_{E^*}, definimos el subconjunto de $B_{C(K,E)^*}$

$$B \otimes B' := \{\, \mu \otimes b' : \mu \in B\,,\, b' \in B' \,\} \tag{4.11}$$

donde $\mu \otimes b'$ actúa sobre cada elemento $f \in C(K, E)$ mediante

$$(\mu \otimes b')(f) = \int_K b'(f(t))\, d\mu(t)$$

Comprobaremos que estos subconjuntos son fronteras de $C(K, E)$. Para ello utilizaremos una extensión vectorial del lema 1 de [15].

Lema 4.25 *Sea E un espacio de Banach, K un espacio topológico Hausdorff y B una frontera de $B_{C(K)^*}$. Dada una familia numerable $\{\, f_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ en $C(K, E)$ y un elemento $k \in K$, existe una medida $\mu \in B$ tal que*

$$f_n(k) = \mu(f_n) = \int_K f_n(t)\, d\mu(t) \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Demostración. La función $g : K \to [0, 1]$ dada por

$$g(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{\|f_n(x) - f_n(k)\|}{1 + \|f_n(x) - f_n(k)\|} \right)$$

es continua y cumple

$$F := \{\, x \in K : f_n(x) = f_n(k),\ \forall n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, x \in K : \|g\|_\infty = g(x) \,\}$$

Por ser B una frontera, existe un elemento μ en B tal que $\mu(g) = \|g\|_\infty = 1$. μ es necesariamente una probabilidad con soporte en F y, por lo tanto:

$$\mu(f_n) = \int_K f_n(t)\, d\mu(t) = \int_F f_n(t)\, d\mu(t) = \int_F f_n(k)\, d\mu(t) = f_n(k)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Estamos ahora en condiciones de probar que el conjunto $B \otimes B'$ es una frontera para $C(K, E)$.

Proposición 4.26 *Sea B una frontera en $B_{C(K)^*}$ y B' una frontera en B_{E^*}. Entonces el conjunto $B \otimes B'$, definido en la ecuación (4.11), es una frontera en $B_{C(K,E)^*}$.*

Demostración. Si $f \in C(K, E)$, se tiene:

$$\|f\| = \sup\{\, \|f(k)\| : k \in K \,\} = b'(f(k_0))$$

para algún $b' \in B'$ y algún $k_0 \in K$. Basta utilizar el lema 4.25 en el caso escalar, considerando la familia de un único elemento $\{b' \circ f\}$ en $C(K)$, para asegurar que existe $\mu \in B$ tal que $(b' \circ f)(k_0) = \mu(b' \circ f)$, es decir, $\|f\| = (\mu \otimes b')(f)$. ■

A los conjuntos del tipo $B \otimes B'$ de la proposición anterior los llamaremos fronteras producto. Diremos que una frontera $C \subset B_{X^*}$ es de Grothendieck para X si todo subconjunto acotado y $\sigma(X, C)$-compacto es débilmente compacto.

4.5.2. El problema de la frontera para fronteras producto

Teorema 4.27 *Si B es una frontera en $B_{C(K)^*}$ y B' una frontera de Grothendieck para E, entonces la frontera $B \otimes B'$ es de Grothendieck para $C(K, E)$.*

Demostración. Hemos de demostrar que si H es un subconjunto de $C(K, E)$ que es acotado y compacto para la topología $t_p(B \otimes B') = \sigma(C(K, E), B \otimes B')$, entonces H es débilmente compacto. Para ello basta comprobar que H es numerablemente compacto para la topología $t_p(K \times B_{E^*})$ pues, en ese caso, por el carácter angélico del espacio $C(K \times B_{E^*})$ dotado de la topología de convergencia puntual ([31, 3.7]) tendríamos que H es $t_p(K \times B_{E^*})$-compacto, de modo que el apartado (3) de la proposición 4.23 asegura que H es débilmente compacto.

Para comprobar que H es $t_p(K \times B_{E^*})$-numerablemente compacto, tomamos una sucesión (f_n) en H. Por la compacidad de H en la topología $t_p(B \otimes B')$, existe una subred $(f_\alpha)_{\alpha \in D}$ que converge a $f \in H$ en $t_p(B \otimes B')$. El conjunto

$$\{\, f_\alpha : \alpha \in D \,\} \cup \{f\}$$

es numerable y puede aplicarse el lema 4.25: fijado $k \in K$, existe $\mu \in B$ tal que

$$f(k) = \mu(f) \quad \text{y} \quad f_\alpha(k) = \mu(f_\alpha) \quad \forall \alpha \in D \tag{4.12}$$

Ahora bien, la convergencia de (f_α) a f respecto a la topología $t_p(B \otimes B')$, junto con la ecuación (4.12) nos dice que $b'(f_\alpha(k)) \longrightarrow b'(f(k))$ para cada $b' \in B'$. Es decir,

$$f_\alpha(k) \longrightarrow f(k) \;\text{ en la topología } \sigma(E, B') \text{ para cada } k \in K \tag{4.13}$$

Ahora, para el $\mu \in B$ anterior definimos:

$$T_\mu : C(K,E) \to E$$

mediante la fórmula $T_\mu(f) = \int_K f\, d\mu = \mu(f)$. Si una red (g_β) en $C(K,E)$ converge a un elemento $g \in C(K,E)$ en la topología $t_p(B \otimes B')$, se cumple que

$$b'\left(\int_K g_\beta\, d\mu\right) \longrightarrow b'\left(\int_K g\, d\mu\right) \quad \text{para cada } b' \in B'$$

La anterior condición implica que $T_\mu(g_\beta)$ converge a $T_\mu(g)$ en $\sigma(E,B')$, es decir, T_μ es continua para las topologías $t_p(B \otimes B')$ y $\sigma(E,B')$. Así, H se transforma en el conjunto $T_\mu(H)$ que es $\sigma(E,B')$-compacto y acotado (ya que $\|T_\mu(f)\| \leq \|f\|$, para cada $f \in C(K,E)$). Como el problema de la frontera tiene solución positiva en E respecto a B', $T_\mu(H)$ es $\sigma(E,E^*)$-compacto. El conjunto numerable

$$\{\, f_\alpha(k) : \alpha \in D \,\} \cup \{f(k)\}$$

está así contenido en un conjunto $\sigma(E,E^*)$-compacto. Esto, junto con la condición (4.13), asegura que $(f_\alpha(k))$ converge a $f(k)$ en la topología débil, luego f_α converge a f en la topología $t_p(K \times B_{E^*})$, y se concluye la demostración. ∎

A partir del teorema anterior, podemos enunciar algunos casos donde el problema de la frontera tiene solución positiva.

Corolario 4.27.1 *Si B es una frontera en $B_{C(K)^*}$ y B' una frontera en B_{E^*}, entonces la frontera $B \otimes B'$ es de Grothendieck para $C(K,E)$ en los siguientes casos.*

(1) Si B' coincide con el conjunto de extremales de B_{E^*}.

(2) Si E no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$.

(3) Si $E = C(M)$ donde M es compacto y Hausdorff.

<u>Demostración</u>. Se deduce del teorema anterior, junto con el teorema 1 de [13], el corolario 4.7.1 y la proposición 3 de [15], respectivamente. ∎

4.5.3. El carácter angélico en $C(K, E)$

En [15] se prueba que si B es una frontera para $B_{C(K)^*}$, el espacio $(C(K), t_p(B))$ es angélico. En la misma línea de resultados aquí se prueba que $C(K, E)$ es angélico dotado de la topología de convergencia puntual sobre la frontera $B \otimes B_{E^*}$, donde B es una frontera cualquiera de $B_{C(K)^*}$. La ecuación (4.11) define cómo actúan los elementos de $B \otimes B'$ sobre $C(K, E)$. Esta definición puede extenderse a los elementos de $C(K \times B_{E^*})$; en efecto, dada una función f de $C(K \times B_{E^*})$, podemos considerar para cada $x^* \in B_{E^*}$ la función continua $f_{x^*} : K \to \mathbb{R}$ dada por $f_{x^*}(k) = f(k, x^*)$. Para un elemento $\mu \otimes x^* \in B \otimes B'$ definimos

$$(\mu \otimes x^*)(f) = \int_K f_{x^*}\, d\mu$$

Nótese que esta definición es compatible con la definición 4.11 cuando se miran los elementos de $C(K, E)$ como elementos de $C(K \times B_{E^*})$ a través de la inmersión isométrica de la proposición 4.23.

Lema 4.28 *Si B es una frontera de $B_{C(K)^*}$, y $D = B \cup (-B)$, entonces $D \otimes B_{E^*}$ es una frontera en $B_{C(K \times B_{E^*})^*}$.*

<u>Demostración</u>. Dado $f \in C(K \times B_{E^*})$ se tiene que

$$\|f\| = |f(k_0, x_0^*)|$$

para ciertos elementos $k_0 \in K$ y $x_0^* \in B_{E^*}$. La función $f_{x_0^*} : K \to \mathbb{R}$ que a cada elemento $k \in K$ hace corresponder $f_{x_0^*}(k) = f(k, x_0^*)$ es continua, y si aplicamos el lema 4.25 en el caso escalar y para el conjunto $\{f_{x_0^*}\}$, obtenemos una medida $\mu \in B$ tal que

$$f(k_0, x_0^*) = f_{x_0^*}(k_0) = \mu(f_{x_0^*}) = (\mu \otimes x_0^*)(f)$$

Es claro así que cierto elemento $\nu \in D$ es tal que $\|f\| = (\nu \otimes x_0^*)(f)$, lo que nos da la condición de frontera para $D \otimes B_{E^*}$. ■

El siguiente resultado es una mejora del apartado (2) de la proposición 4.23.

Proposición 4.29 *El espacio $(C(K, E), t_p(B \otimes B_{E^*}))$ es angélico para una frontera cualquiera $B \subset B_{C(K)^*}$.*

<u>Demostración</u>. Nótese que, si $D = B \cup (-B)$, las topologías $t_p(B \otimes B_{E^*})$ y $t_p(D \otimes B_{E^*})$ coinciden en $C(K \times B_{E^*})$. El resultado se obtiene así por ser $(C(K \times B_{E^*}), t_p(B \otimes B_{E^*}))$ angélico al ser $D \otimes B_{E^*}$ una frontera (ver el lema anterior y [15, prop. 5]), y teniendo en cuenta que todo subespacio de un espacio angélico es angélico. ■

4.6. La propiedad de la frontera en ε-productos de espacios de Banach

En [68, 69] aparece la siguiente definición.

Definición 4.30 *Sean X e Y dos espacios localmente convexos. Denotaremos por X_c^* al espacio dual de X dotado de la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos y convexos de X. El ε-producto de X e Y, que se denota $X\varepsilon Y$ se define como el espacio:*

$$X\varepsilon Y := \{\, T : X_c^* \to Y : T \textit{ es lineal y continua}\}$$

dotado de la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos equicontinuos de X^*.

En el caso particular en que E y F son dos espacios de Banach, el ε-producto de E y F es:

$$E\varepsilon F := \{\, T : E^* \to F : \ T\,|_{B_{E^*}} \text{ es } \omega^*\text{-norma continua } \}$$

Dotamos al espacio $E\varepsilon F$ de la norma usual de operadores: para $T \in E\varepsilon F$ se define

$$\|T\| = \sup\{\, \|T(x^*)\| : x^* \in B_{E^*}\,\}$$

Con dicha norma $E\varepsilon F$ es un espacio de Banach.

Consideramos la siguiente cadena de inclusiones:

$$E\varepsilon F \hookrightarrow C((B_{E^*}, \omega^*), F) \hookrightarrow C(B_{E^*} \times B_{F^*})$$

donde partimos de $T \in E\varepsilon F$, y le hacemos corresponder primero $T\,|_{B_{E^*}} : B_{E^*} \to F$, y a ésta le hacemos corresponder a su vez $\tilde{T} : B_{E^*} \times B_{F^*} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{T}(e^*, f^*) = f^*(T(e^*))$$

Puede verse que las inclusiones son isometrías pues

$$\|T\| = \sup\{\, \|T(e^*)\| : e^* \in B_{E^*}\,\} = \sup\{\, |f^*(T(e^*))| : e^* \in B_{E^*}, f^* \in B_{F^*}\,\}$$

es claramente la norma en los dos primeros espacios ($E\varepsilon F$ y $C(B_{E^*}, F)$), y también la norma del supremo en el espacio $C(B_{E^*} \times B_{F^*})$.

Una frontera natural de $E\varepsilon F$ proviene de fronteras en los espacios E y F. Si partimos de fronteras respectivas B y B' de B_{E^*} y B_{F^*}, entonces el conjunto $B \otimes B'$ puede mirarse como un subconjunto de $B_{(E\varepsilon F)^*}$ haciendo corresponder a cada $b \in B$ y a cada $b' \in B'$ el funcional en $E\varepsilon F$ dado por:

$$(b \otimes b')(T) = b'(T(b))$$

Para ver que $B \otimes B'$ es una frontera en $E\varepsilon F$, necesitamos un lema previo.

Lema 4.31 *Sea B una frontera absolutamente convexa en B_{E^*}. Entonces dados y^* en B_{E^*} y x en E, existe un elemento $b^* \in B$ tal que:*

$$y^*(x) = b^*(x)$$

Demostración. Consideramos el elemento $x \in E$ como aplicación de B_{E^*} en $\mathbb{R}$. Sabemos que:

$$\min_{x^* \in B_{E^*}} x^*(x) = -\|x\| \leq \|x\| = \max_{x^* \in B_{E^*}} x^*(x)$$

Al ser B una frontera, existe $b_1^* \in B$ donde se alcanza el máximo anterior: $\|x\| = b_1^*(x)$. Y al ser B absolutamente convexa, el mínimo se alcanza en el elemento $-b_1^* \in B$. Así, si utilizamos nuevamente por la convexidad, tenemos que $x(B)$ alcanza todos los valores entre $-\|x\|$ y $\|x\|$, y como $y^*(x)$ es uno de esos valores, debe existir $b^* \in B$ tal que $y^*(x) = b^*(x)$. ■

Proposición 4.32 *Sea B una frontera absolutamente convexa en B_{E^*} y B' una frontera en B_{F^*}. Entonces el conjunto $B \otimes B'$ es una frontera para $E\varepsilon F$.*

Demostración. Sea $T \in E\varepsilon F$. Al ser $T|_{B_{E^*}}$ continua para las topologías respectivas ω^* y de la norma $\|\ \|$, tendremos que para algún $e_0^* \in B_{E^*}$ y $f_0^* \in B'$ se cumple:

$$\|T\| = \sup\{\, \|T(e^*)\|_F : e^* \in B_{E^*}\,\} = \|T(e_0^*)\|_F = f_0^*(T(e_0^*))$$

donde hemos utilizado que B' es una frontera. La aplicación $f_0^* \circ T : B_{E^*} \to \mathbb{R}$ es ω^*-continua, y podemos aplicar un teorema de Grothendieck ([49, §21.9(4)]) para asegurar que existe un elemento $x_0 = f_0^* \circ T$ en E. Por lo tanto

$$\|T\| = (f_0^* \circ T)(e_0^*) = e_0^*(x_0)$$

El lema 4.31 nos asegura que existe $b_0^* \in B$ tal que $e_0^*(x_0) = b_0^*(x_0) = f^*(T(b_0^*))$, con lo que $B \otimes B'$ es una frontera en $B_{E\varepsilon F}$. ■

Teorema 4.33 *Sean E y F dos espacios de Banach tales que ninguno de ellos contiene una copia isomorfa a $\ell^1(c)$. Si B y B' son fronteras respectivas de B_{E^*} y B_{F^*}, entonces los subconjuntos $t_p(B \otimes B')$-compactos y acotados de $E\varepsilon F$ son débilmente compactos.*

Demostración. Denotamos por D y D' a las envolturas absolutamente convexas de B y B'. Comprobaremos primero que $(C(B_{E^*} \times B_{F^*}), t_p(D \otimes D'))$ verifica la propiedad *KSf* definida en 2.19, es decir, si H es un subconjunto acotado y $t_p(D \otimes D')$-compacto de $C(B_{E^*} \times B_{F^*})$, entonces su envoltura cerrada y convexa $\overline{\text{co}(H)}^{t_p(D \otimes D')}$ es $t_p(D \otimes D')$-compacto, y además

$$\overline{\text{co}(H)}^{t_p(D \otimes D')} = \overline{\text{co}(H)}^{\| \|} \tag{4.14}$$

Para ello basta tener en cuenta que:

- $B_{E^*} \times B_{F^*}$ no contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$ ya que ni B_{E^*} ni B_{F^*} la contienen (por el teorema A.7) y $\beta\mathbb{N}$ es primo (ver el teorema A.4).

- $D \otimes D'$ es denso en $B_{E^*} \times B_{F^*}$ ya que D y D' son densos en B_{E^*} y B_{F^*} respectivamente, al ser normantes (ver la proposición 2.12).

El corolario 2.21 nos permite asegurar que el espacio $C(B_{E^*} \times B_{F^*})$ verifica la propiedad *KSf* para la topología $t_p(D \otimes D')$. En particular, la igualdad (4.14) nos dice que $\overline{\text{co}(H)}^{t_p(D \otimes D')}$ es $t_p(D \otimes D')$-compacto en $E\varepsilon F$. Finalmente, teniendo en cuenta que las topologías $t_p(B \otimes B')$ y $t_p(D \otimes D')$ coinciden, y que $D \otimes D'$ es una frontera para $E\varepsilon F$ por la proposición anterior, el teorema 4.6 asegura que todos los subconjuntos $t_p(B \otimes B')$-compactos de $E\varepsilon F$ son débilmente compactos. ∎

4.7. Compacidad débil en un espacio $L^1(\mu)$ para una medida vectorial μ

En esta sección, X será un espacio de Banach, Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mu : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Una función Σ-medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice μ-integrable si:

1. f es $(x^* \circ \mu)$-integrable para cada $x^* \in X^*$.

2. Para cada $E \in \Sigma$, existe un (único) elemento $x_E \in X$ tal que
$$x^*(x_E) = \int_E f\, d(x^* \circ \mu) \quad \text{para cada } x^* \in X^*$$

En este caso el elemento x_E se representa por $\int_E f\, d\mu$ o por $\mu_f(E)$. La función $\mu_f : \Sigma \to X$ es de nuevo una medida vectorial numerablemente aditiva por el teorema de Orlicz-Pettis, [26, page 22], que se llama integral indefinida de f respecto a μ.

$\mathcal{L}^1(\mu)$ es el espacio de funciones μ-integrables. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, la semivariación de la medida μ_f define una seminorma
$$\|f\|_1 = \|\mu_f\|(\Omega) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* \circ \mu_f|(\Omega)$$
Con esta definición se tiene
$$\|f\|_1 = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |f|\, d|x^* \circ \mu| \tag{4.15}$$
Identificando las funciones f, g de $\mathcal{L}^1(\mu)$ tales que
$$|\mu|(\{\, \omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\,\}) = 0,$$
se obtiene el espacio $L^1(\mu)$, que es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\ \ \|_1$ ([48, chapter III]). Por otro lado, el espacio de funciones μ-integrables, Σ-medibles y μ-esencialmente acotadas, con la misma identificación de funciones, es el espacio $L^\infty(\mu)$ dotado de la norma usual del supremo esencial. Toda función de $L^\infty(\mu)$ es μ-integrable ([48, II.3.1]). Además, si $f \in L^\infty(\mu)$, se cumple
$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \cdot \|\mu\|(\Omega)$$
Se dice que una función $f \in L^1(\mu)$ es μ-nula si μ_f es idénticamente 0; un conjunto $E \in \Sigma$ es μ-nulo si χ_E es μ-nula, es decir, si $|x^* \circ \mu|(E) = 0$ para cada $x^* \in X^*$.

Hasta la fecha no se ha obtenido una descripción satisfactoria del espacio dual $L^1(\mu)^*$ (ver [57]). Utilizando el siguiente teorema de [22], los resultados obtenidos en esta memoria permiten caracterizar los conjuntos débilmente compactos de $L^1(\mu)$ como los conjuntos que son acotados y compactos respecto a la topología de convergencia puntual sobre una frontera cualquiera de $B_{L^1(\mu)^*}$.

Teorema 4.34 (Curbera) *$L^1(\mu)$ es un espacio débilmente compactamente generado.*

Corolario 4.34.1 *Sea B un subconjunto normante de $B_{L^1(\mu)^*}$ y H es un subconjunto acotado y $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto de $L^1(\mu)$, entonces:*

(1) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(L^1(\mu),B)}$ *es $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto y*

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(L^1(\mu),B)} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|_1}$$

(2) $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(L^1(\mu),B)}$ *cumple la propiedad débil de Radon-Nikodym.*

Si además B es una frontera de $B_{L^1(\mu)^*}$ entonces H es débilmente compacto.

Demostración. Todo espacio de Banach débilmente compactamente generado posee una bola dual ω^*-secuencialmente compacta ([3]), y por lo tanto dicha bola no puede contener una copia de $\beta\mathbb{N}$. El teorema A.7 asegura así que todo espacio débilmente compactamente generado no puede contener una copia de $\ell^1(c)$. El resultado se sigue de los teoremas 2.21, 2.24.1 y 4.7.1. ∎

El resultado anterior es válido para cualquier conjunto normante o frontera. En lo que sigue consideramos un conjunto normante particular de $B_{L^1(\mu)^*}$ que se obtiene de forma natural.

Dada una función h en $L^\infty(\mu)$ se cumple que h pertenece a $L^\infty(x^* \circ \mu)$, para cada $x^* \in X^*$. De esta forma, para cada $h \in L^\infty(\mu)$ y cada $x^* \in B_{X^*}$ tiene sentido definir la forma lineal $\gamma_{h,x^*} : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_{h,x^*}(f) = \int_\Omega f \cdot h \, d(x^* \circ \mu)$$

Cada elemento γ_{h,x^*} es una forma lineal continua sobre $L^1(\mu)$ pues:

$$|\gamma_{h,x^*}(f)| = \left| \int_\Omega f \cdot h \, d(x^* \circ \mu) \right| \leq \int_\Omega |f| \cdot |h| \, d|x^* \circ \mu| \leq$$

$$\|h\|_\infty \cdot \int_\Omega |f| \, d|x^* \circ \mu| \leq \|h\|_\infty \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |f| \, d|x^* \circ \mu| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_1, \tag{4.16}$$

donde hemos utilizado la ecuación (4.15).

A partir de aquí definimos los siguientes subconjuntos de $L^1(\mu)^*$:

$$B := \{ \gamma_{h,x^*} : h \in B_{L^\infty(\mu)} \text{ y } x^* \in B_{X^*} \} \tag{4.17}$$

$$S_1 := \{ \gamma_{h,x^*} : h = \sum_{\text{finita}} \varepsilon_j \cdot \chi_{A_j} \text{ con } \varepsilon_j \in \{1, -1\} \tag{4.18}$$

$$\text{y } A_j \in \Sigma \text{ disjuntos dos a dos, } x^* \in B_{X^*} \}$$

En la proposición 4.37 se prueba que B y S_1 son subconjuntos normantes de $B_{L^1(\mu)^*}$, y en las proposiciones 4.39 y 4.38 se demuestra que B es una frontera (y en consecuencia, cualquier subconjunto acotado y $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto de $L^1(\mu)$ es débilmente compacto) si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(α) X tiene la propiedad de Schur, es decir, si toda sucesión débilmente convergente de X es convergente en norma.

(β) La medida $\mu : \Sigma \to X$ tiene recorrido relativamente compacto en norma.

Estos resultados mejoran las proposiciones 17 y 18 de [56], en las que se demuestra que si se cumple alguna de las condiciones (α) o (β), entonces la medida μ verifica la siguiente definición de Diestel.

Definición 4.35 *Una medida vectorial μ tiene la propiedad de convergencia σ-débil si cada sucesión acotada de $L^1(\mu)$ que converge débilmente a 0 en $L^1(x^* \circ \mu)$ para cada $x^* \in B_{X^*}$, también converge a 0 en la topología débil de $L^1(\mu)$.*

La mejora de los resultados señalados de Okada mediante nuestras proposiciones 4.39 y 4.38 se debe a la siguiente observación.

Proposición 4.36 *Sea $\mu : \Sigma \to X$ una medida vectorial y B el conjunto definido en la ecuación (4.17). Si cada subconjunto acotado y $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto de $L^1(\mu)$ es débilmente compacto, entonces μ verifica la propiedad de convergencia σ-débil.*

<u>Demostración</u>. Sea (f_n) una sucesión acotada en $L^1(\mu)$ tal que (f_n) converge a 0 en la topología débil de $L^1(x^* \circ \mu)$, para cada $x^* \in B_{X^*}$. Como $L^\infty(\mu) \subset L^\infty(x^* \circ \mu)$ para cada $x^* \in X^*$, si $h \in L^\infty(\mu)$, se cumple:

$$\int_\Omega f_n h \, d(x^* \circ \mu) \longrightarrow 0$$

Por lo tanto (f_n) converge a 0 respecto a la topología $\sigma(L^1(\mu), B)$. El conjunto

$$H := \{ f_n : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$$

es $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto, y por hipótesis será también débilmente compacto. La identidad $id : (H, \omega) \to (H, \sigma(L^1(\mu), B))$ es así un homeomorfismo, lo que implica que (f_n) converge a 0 en la topología débil. ■

Nos resta comprobar que, en efecto, tanto B como S_1 son subconjuntos normantes de $B_{L^1(\mu)^*}$ y que, bajo las condiciones (α) o (β), B es una frontera, y por lo tanto los conjuntos acotados y $\sigma(L^1(\mu), B)$-compactos son débilmente compactos.

Proposición 4.37 *Se verifica que $S_1 \subset B \subset B_{L^1(\mu)^*}$. Además tanto S_1 como B son subconjuntos normantes de $B_{L^1(\mu)^*}$.*

Demostración. Los contenidos $S_1 \subset B \subset B_{L^1(\mu)^*}$ son inmediatos, teniendo en cuenta la ecuación (4.16). Veamos que S_1 es normante. Sea así $f \in L^1(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Por la definición de la norma de f, podemos elegir $x_0^* \in B_{X^*}$ tal que

$$\|f\|_1 - |x_0^* \circ \mu_f|(\Omega) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.19}$$

Ahora bien, por la definición de la semivariación de $x_0^* \circ \mu_f$, podemos elegir una partición finita Π_0 en subconjuntos de Σ tales que

$$|x_0^* \circ \mu_f|(\Omega) - \sum_{A \in \Pi_0} |x_0^*(\mu_f(A))| = |x_0^* \circ \mu_f|(\Omega) - \sum_{A \in \Pi_0} \left| \int_\Omega f \cdot \chi_A \, d(x_0^* \circ \mu) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.20}$$

Consideramos $h_0 = \sum_{A \in \Pi_0} \varepsilon_A \cdot \chi_A$, donde se elige $\varepsilon_A \in \{1, -1\}$ de modo que se cumpla la igualdad

$$\sum_{A \in \Pi_0} \left| \int_\Omega f \cdot \chi_A \, d(x_0^* \circ \mu) \right| = \int_\Omega f \cdot h_0 \, d(x_0^* \circ \mu) = \gamma_{h_0, x_0^*}(f)$$

Por tanto, las ecuaciones (4.19) y (4.20) nos aseguran que

$$\|f\|_1 - \gamma_{h_0, x_0^*}(f) < \varepsilon$$

y como $\gamma_{h_0, x_0^*} \in S_1$, tenemos que S_1 es normante. ■

Proposición 4.38 *Si la medida vectorial $\mu : \Sigma \to X$ tiene recorrido relativamente compacto en norma, entonces el conjunto B definido en (4.17) es una frontera, y en consecuencia todo subconjunto acotado y $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto es débilmente compacto.*

Demostración. Basta demostrar que B es una frontera de $B_{L^1(\mu)^*}$, y aplicar el corolario 4.34.1.

Dada $f \in L^1(\mu)$, la proposición 4.37 asegura que existe una sucesión (γ_n) en S_1 tal que

$$\|f\|_1 = \lim_n \gamma_n(f) = \int_\Omega f h_n \, d(x_n^* \circ \mu)$$

donde (h_n) es una sucesión de funciones Σ-simples con coeficientes ± 1 contenida en $B_{L^\infty(\mu)}$ y (x_n^*) está en B_{X^*}.

Si μ tiene recorrido relativamente compacto en norma, también lo tiene μ_f, luego

$$K_1 = \overline{\operatorname{co}(\mu_f(\Sigma) \cup (-\mu_f(\Sigma)))}^{\|\ \|}$$

es un subconjunto compacto de X. Como h_n es de la forma $\sum_j \epsilon_j^{(n)} \chi_{A_j^{(n)}}$, con $\epsilon_j^{(n)}$ en $\{1, -1\}$, se tiene que para ciertos conjuntos disjuntos B_n y C_n de Σ, se cumple

$$\int_\Omega h_n \, d\mu_f = \mu_f(B_n) - \mu_f(C_n)$$

luego $\int_\Omega h_n \, d\mu_f \in 2K_1 := K$. Por otra parte, el teorema de Ascoli asegura la existencia una subsucesión de (x_n^*), que denotamos igual, y un punto $x_0^* \in B_{X^*}$ tal que

$$(x_n^*) \text{ converge uniformemente sobre } K \text{ a } x_0^* \tag{4.21}$$

Por otro lado, la familia $\{ x^* \circ \mu : x^* \in B_{X^*} \}$ es uniformemente numerablemente aditiva ([26, I.1.17]), por lo que existe una medida escalar $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty)$ de modo que λ y μ tienen los mismos conjuntos nulos (como consecuencia se tiene que $L^\infty(\mu) = L^\infty(\lambda)$) y además la familia $\{x^* \circ \mu : x^* \in B_{X^*}\}$ es uniformemente λ-continua ([26, I.2.4 y I.2.5]), es decir,

$$\lim_{\lambda(E) \to 0} |x^* \circ \mu|(E) = 0 \quad \text{uniformemente en } x^* \in B_{X^*} \tag{4.22}$$

El teorema de Radon-Nikodym para el caso escalar nos asegura que para cada x^* de B_{X^*}, existe una función $g_{x^*} \in L^1(\lambda)$ tal que

$$(x^* \circ \mu)(E) = \int_E g_{x^*} \, d\lambda \quad \text{ para cada } E \in \Sigma$$

De la anterior igualdad, deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\gamma_n(f) = \int_\Omega f \cdot h_n \, d(x_n^* \circ \mu) = \int_\Omega f \cdot h_n \cdot g_{x_n^*} \, d\lambda \tag{4.23}$$

El operador $T : L^\infty(\lambda) \to X$ dado por $T(h) = \int_\Omega h \, d\mu_f$ es ω^*-ω continuo; en efecto, si h_α es una red en $L^\infty(\lambda)$ que converge a h en la topología ω^*, entonces para cada $x^* \in X^*$

$$x^* \left(\int_\Omega (h_\alpha - h) d\, \mu_f \right) = \int_\Omega (h_\alpha - h) f g_{x^*} \, d\lambda$$

converge a 0. Usamos la notación

$$x_n = \int_\Omega h_n \, d\mu_f \quad \text{y} \quad x = \int_\Omega h \, d\mu_f$$

Por la compacidad de $B_{L^\infty(\lambda)}$ respecto a la topología ω^* y la continuidad de T, existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) que converge a x en la topología débil, y por lo tanto

$$x_0^*(x_{n_j}) = \int_\Omega f h_{n_j} g_{x_0^*} \, d\lambda \longrightarrow \int_\Omega f h g_{x_0^*} \, d\lambda = x_0^*(x) \tag{4.24}$$

Se sigue que $\lim_j x_{n_j}^*(x_{n_j}) = x_0^*(x)$ pues

$$|x_{n_j}^*(x_{n_j}) - x_0^*(x)| \leq |x_{n_j}^*(x_{n_j}) - x_0^*(x_{n_j})| + |x_0^*(x_{n_j}) - x_0^*(x)|$$

tiende a 0 en virtud de (4.21) y (4.24). Resulta así que la norma

$$\|f\|_1 = \lim_j x_{n_j}^*(x_{n_j}) = x_0^*(x) = x_0^*\left(\int_\Omega h \, d\mu_f\right) = \gamma_{h,x_0^*}(f)$$

se alcanza en un elemento de B. ∎

Proposición 4.39 *Sea $\mu : \Sigma \to X$ una medida vectorial donde X es un espacio de Banach con la propiedad de Schur y B el conjunto definido en la ecuación (4.17). Entonces B es una frontera y todo subconjunto de $L^1(\mu)$ acotado y $\sigma(L^1(\mu), B)$-compacto, es débilmente compacto.*

Demostración. Basta demostrar que B es una frontera de $B_{L^1(\mu)^*}$, y aplicar el corolario 4.34.1.

Ahora bien, si $f \in L^1(\mu)$, la proposición 4.37 asegura que existen sucesiones (x_n^*) en B_{X^*} y (h_n) en $B_{L^\infty(\mu)}$ tales que:

$$\|f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \cdot h_n \, d(x_n^* \circ \mu) = \lim_{n\to\infty} x_n^*\left(\int_\Omega f \cdot h_n \, d\mu\right) = \lim_{n\to\infty} x_n^*\left(\int_\Omega h_n \, d\mu_f\right)$$

Si llamamos de nuevo λ a la medida escalar no negativa y T al operador $h \to \int_\Omega h \, d\mu_f$, definido de $L^\infty(\lambda)$ en X, que se consideran en la demostración de la proposición 4.38, tenemos que T es continuo respecto a las topologías ω^* en $L^\infty(\lambda)$ y ω en X. Por lo tanto, el teorema de Eberlein-Smulian asegura que existe una subsucesión de (h_n), que denotamos igual, tal que

$$\left(x_n := \int_\Omega h_n \, d\mu_f\right) \text{ converge débilmente a } x := \int_\Omega h \, d\mu_f \text{ en } X$$

donde $h \in B_{L^\infty(\lambda)}$. Ahora bien, X tiene la propiedad de Schur, luego (x_n) converge a x en norma. La compacidad de (B_{X^*}, ω^*) asegura que $(x_n^*(x))$ se acumula en $x_0^*(x)$, para cierto $x_0^* \in B_{X^*}$, y por lo tanto, existe una subsucesión $(x_{n_j}^*)$ tal que

$$\lim_j x_{n_j}^*(x) = x_0^*(x) \tag{4.25}$$

Entonces $\|f\|_1 = \lim_j x_{n_j}^*(x_{n_j}) = x_0^*(x)$ pues

$$\begin{aligned} |x_{n_j}^*(x_{n_j}) - x_0^*(x)| &\leq |x_{n_j}^*(x_{n_j}) - x_{n_j}^*(x)| + |x_{n_j}^*(x) - x_0^*(x)| \\ &\leq \|x_{n_j} - x\| + |x_{n_j}^*(x) - x_0^*(x)| \end{aligned}$$

Por lo tanto, la norma

$$\|f\|_1 = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}^*(x_{n_j}) = x_0^*(x) = x_0^*\left(\int_\Omega h\, d\mu_f\right) = \gamma_{h,x_0^*}(f)$$

se alcanza en algún elemento de B. ■

4.8. Espacios de Orlicz

Los principales resultados de esta sección son las proposiciones 4.42, 4.43 y 4.44, y son una generalización de los que aparecen en el artículo [18] sobre los espacios $L^p(\mu, X)$ (ejemplo E y teorema 13).

Sean Φ y Ψ un par de funciones conjugadas de Young, es decir,

$$\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$$

es una función convexa, no decreciente, continua por la izquierda y tal que $\Phi(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$ y $\Psi : [0, \infty) \to [0, +\infty]$ está definida por

$$\Psi(y) = \sup\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\}$$

(para más detalles puede verse [59]). Sean X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo. Denotaremos por $L^\Phi(\mu, X)$ al espacio vectorial de clases de funciones medibles Bochner $f : \Omega \to X$ tales que $\int_\Omega \Phi(k\|f\|)\, d\mu < \infty$ para algún $k > 0$. Si $X = \mathbb{R}$, denotamos $L^\Phi(\mu, X) = L^\Phi(\mu)$. $L^\Phi(\mu, X)$ está dotado de dos normas equivalentes con las que es un espacio de Banach ([59, chapter 3]):

$$|||f||| = \inf\left\{\frac{1}{k} : k > 0 \text{ y } \int_\Omega \Phi(k\|f\|)\, d\mu < \infty\right\}$$

$$\|f\| = \sup\left\{\int_\Omega \|f\| h \, d\mu : h \in L^\Psi(\mu) \text{ y } \int_\Omega \Psi(|h|)\, d\mu \leq 1\right\}$$

Se cumple que $|||f||| \leq \|f\| \leq 2|||f|||$, para cada $f \in L^\Phi(\mu, X)$ ([59, page 61]).

$L^\Psi(\mu, X^*)$ puede mirarse como un subespacio vectorial cerrado de $L^\Phi(\mu, X)^*$. En efecto, dada $g \in L^\Psi(\mu, X^*)$ el operador lineal

$$T_g : L^\Phi(\mu, X) \to \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad T_g(f) = \int_\Omega < g, f > \, d\mu$$

verifica $|T_g(f)| \leq \text{mín}\{|||f|||_\Phi \|g\|_\Psi, \|f\|_\Phi |||g|||_\Psi\}$. Es más

$$\frac{1}{2}\|g\|_\Psi \leq \|T_g\| \leq \|g\|_\Psi$$

([78, page 138]). De esta forma la aplicación $g \to T_g$ define un isomorfismo topológico de $L^\Psi(\mu, X^*)$ sobre un subespacio cerrado de $L^\Phi(\mu, X)^*$.

En lo que sigue denotaremos $\sigma' = \sigma(L^\Phi(\mu, X), L^\Psi(\mu, X^*))$. Veremos que esta topología está dada por un subconjunto normante de $B_{L^\Phi(\mu,X)^*}$, y que pueden aplicarse los resultados de capítulos anteriores para obtener la propiedad fuerte de Krein-Smulian y la fragmentabilidad en norma de los σ'-compactos.

Consideramos un subconjunto particular de funciones de $L^\Psi(\mu, X^*)$: dados x^* en X^* y h en $L^\Psi(\mu)$, la aplicación $g_{h,x^*} = h \cdot x^* : \Omega \to X^*$ es medible Bochner y verifica $\|g_{h,x^*}\|_\Psi = \|h\|_{L^\Psi(\mu)} \|x^*\|$. Denotamos por $S(\Sigma, X)$ el conjunto de funciones Σ-simples en X.

Proposición 4.40 (Bombal, [11, lema 2]) *Para cada $f \in L^\Phi(\mu, X)$ se cumple:*

$$\|f\|_\Phi = \sup\left\{\left|\int_\Omega < g, f > \, d\mu\right| : g \in S(\Sigma, X^*)\, ,\ \int_\Omega \Psi(\|g\|)\, d\mu \leq 1\right\}$$

En consecuencia, los conjuntos $B = \{g \in S(\Sigma, X^*) : \|g\|_\Psi \leq 1\}$ y $B_{L^\Psi(\mu,X^*)}$ son normantes en $B_{L^\Phi(\mu,X)^*}$.

Definición 4.41 *Sea $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función de Young. Se dice que Φ satisface la condición de regularidad Δ_2 si existe $K > 0$ tal que*

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x) \quad \forall x \geq 0$$

En los resultados que demostramos a partir de ahora se impone como hipótesis la condición Δ_2. Bajo esta condición, las funciones simples son densas (en norma) en $L^\Phi(\mu, X)$, y en el caso escalar se cumple además que $L^\Phi(\mu)^* = L^\Psi(\mu)$.

Proposición 4.42 *Si Φ cumple la condición de regularidad Δ_2, entonces la aplicación $T : L^\Phi(\mu, X) \to C(B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*})$ dada por*

$$T(f)(h, x^*) = \int_\Omega h(x^* \circ f)\, d\mu$$

es una inyección $\sigma' - t_p$ continua. En consecuencia:

(1) El espacio $(L^\Phi(\mu, X), \sigma')$ es angélico.

(2) Todo subconjunto σ'-compacto de $L^\Phi(\mu, X)$ es un compacto de Eberlein.

(3) Si H es σ'-compacto y $L = \overline{\operatorname{span}(H)}^{\sigma'}$, entonces existe un conjunto Γ y un operador lineal inyectivo $S : L \to c_0(\Gamma)$ que es $\sigma' - t_p$ continuo.

Demostración. Como $h \in L^\Psi(\mu)$ y $x^* \circ f \in L^\Phi(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$, se tiene que $h(x^* \circ f) \in L^1(\mu)$ (ver [59, page 62]), y por lo tanto

$$T : L^\Phi(\mu, X) \to \mathbb{R}^{B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*}}$$

está bien definida.

Por otro lado se cumple $T(f)(h, x^*) = x^*\left(\int_\Omega hf\, d\mu\right)$. En efecto, esta igualdad es inmediata si $f \in L^\Phi(\mu, X)$ es simple, y la densidad de las funciones simples en $L^\Phi(\mu, X)$ en el caso en que se cumple la condición de regularidad Δ_2 nos da la igualdad general.

Para cada $f \in L^\Phi(\mu, X)$, $T(f)$ está en $C(B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*})$, donde en $B_{L^\Psi(\mu)}$ y en B_{X^*} consideramos las topologías ω^* (en el caso en que se cumple la condición Δ_2, $L^\Phi(\mu)^* = L^\Psi(\mu)$, ver [59, corollary 4.1.9]). En efecto, si (g_α) es una red en $B_{L^\Psi(\mu)}$ que converge a g en la topología ω^*, entonces

$$\int_\Omega f g_\alpha\, d\mu \to \int_\Omega f g\, d\mu$$

en norma, ya que si $f = \sum x_i \chi_{E_i}$ es simple, entonces

$$\left\| \int_\Omega f(g_\alpha - g)\, d\mu \right\| \leq \sum \|x_i\| \left| \int_\Omega \chi_{E_i}(g_\alpha - g)\, d\mu \right|$$

y si $f \in L^\Phi(\mu, X)$ es arbitraria, se toma una sucesión (f_n) de funciones simples que convergen en la norma $\| \ \|_\Phi$ a f de modo que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\Omega f(g_\alpha - g)\, d\mu \right\| &\leq \left\| \int_\Omega (f - f_n)(g_\alpha - g)\, d\mu \right\| + \left\| \int_\Omega f_n(g_\alpha - g)\, d\mu \right\| \\
&\leq 2\|f - f_n\|_\Phi + \left\| \int_\Omega f_n(g_\alpha - g)\, d\mu \right\|
\end{aligned}$$

Nótese que, para n fijo, el segundo sumando converge a 0 por el caso de las funciones simples.

De esta forma, si (x_α^*) es una red en B_{X^*} tal que $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$, la convergencia en norma anterior asegura que

$$x_\alpha^* \left(\int_\Omega f g_\alpha \, d\mu \right) = T(f)(g_\alpha, x_\alpha^*) \longrightarrow x^* \left(\int_\Omega f g \, d\mu \right) = T(f)(g, x^*)$$

T es inyectiva, ya que si $f \in L^\Phi(\mu, X)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega g(x^* \circ f)\, d\mu = 0$ para cada $(g, x^*) \in B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*}$, entonces para cada función simple $s : \Sigma \to X^*$ se cumple $\displaystyle\int_\Omega < s, f > \, d\mu = 0$, y por lo tanto $f = 0$, pues el conjunto de funciones simples de $L^\Psi(\mu, X^*)$ es normante por la proposición 4.40.

Finalmente, T es $\sigma' - t_p$ continua. En efecto, T es continua si se considera en $L^\Phi(\mu, X)$ la topología de convergencia puntual sobre el conjunto F de funciones de la forma $g_{h,x^*} = h \cdot x^*$, con $h \in B_{L^\Psi(\mu)}$ y $x^* \in B_{X^*}$, y en $C(B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*})$ se considera la topología t_p. Como $F \subset L^\Psi(\mu, X^*)$, T es $\sigma' - t_p$ continua.

De lo anterior, del hecho de ser $C_p(B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*})$ angélico ([31, 3.7]) y de [31, 3.3], se sigue que $(L^\Phi(\mu, X), \sigma')$ es angélico. Además, todo subconjunto σ'-compacto es acotado en norma (puede aplicarse el teorema de Banach-Steinhaus), y por lo tanto es homeomorfo a un subconjunto puntualmente compacto y acotado en norma de $C(B_{L^\Psi(\mu)} \times B_{X^*})$, de donde es un compacto de Eberlein. La propiedad (3) se deduce finalmente de la $\sigma' - t_p$ continuidad de T y de [18, lemma 14]. ∎

La siguiente proposición extiende la propiedad del ejemplo [18, example E] al caso de los espacios de Orlicz.

Proposición 4.43 *Si se cumple la condición de regularidad Δ_2, entonces cada subconjunto σ'-compacto y σ'-separable de $L^\Phi(\mu, X)$ es separable en norma.*

Demostración. Sean $H \subset L^\Phi(\mu, X)$ σ'-compacto y σ'-separable y M un subconjunto numerable de H tal que $H = \overline{M}^{\sigma'}$. Cada función $f \in M$ es medible Bochner y toma valores (en casi todo punto) en un subespacio separable de X. Como M es numerable, existe un subespacio vectorial cerrado y separable $Y \subset X$ y un conjunto $A \in \Sigma$ μ-nulo tales que $f(\Omega \setminus A) \subset Y$ para cada $f \in M$. Por otro lado, cada $f \in M$ es el límite de una sucesión de funciones Σ-simples, luego es medible respecto a una subálgebra numerablemente generada; al ser M numerable, podemos considerar una σ-álgebra

$\Sigma_0 \subset \Sigma$ tal que que cada $f \in M$ es Σ_0-medible. El espacio $L^\Phi(\mu, \Sigma_0, Y)$ es un espacio de Banach separable que puede identificarse con un subespacio cerrado Z de $L^\Phi(\mu, X)$.

El espacio $(L^\Phi(\mu, X), \sigma')$ es angélico por la proposición 4.42, luego dada $f \in H$, existe una sucesión (f_n) en M tal que $f_n \xrightarrow{\sigma'} f$. En particular, para cada $E \in \Sigma$ se cumple que la sucesión en Y, $\left(\int_E f_n \, d\mu\right)$ converge a $\int_E f \, d\mu$ débilmente, con lo que f es μ-equivalente a una función $g \in L^\Phi(\mu, \Sigma, Y)$. Por otro lado, para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ f_n \longrightarrow x^* \circ g$ en la topología débil de $L^\Phi(\mu)$ (recuérdese que si se cumple la condición Δ_2, entonces $L^\Phi(\mu)^* = L^\Psi(\mu)$), de modo que $x^* \circ g \in L^\Phi(\mu, \Sigma_0)$ para cada $x^* \in X^*$. En particular, $x^* \circ g$ es Σ_0-medible para cada $x^* \in X^*$ y g toma valores en un espacio de Banach separable. El teorema de medibilidad de Pettis asegura que g es Σ_0-medible, y por lo tanto $g \in L^\Phi(\mu, \Sigma_0, Y)$, de modo que $H \subset Z$ es separable en norma. ■

Proposición 4.44 *Si H es σ'-compacto y se cumple la condición de regularidad Δ_2, entonces:*

(1) H tiene la propiedad KSf, es decir, $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma'}$ es σ'-compacto y

$$\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma'} = \overline{\mathrm{co}(H)}^{\|\ \|}$$

(2) H está fragmentado por la norma de $L^\Phi(\mu, X)$.

(3) Si H es convexo, entonces H tiene la RNP.

Demostración. (2) se deduce de la proposición 4.43 y de la demostración de la implicación (10) $\Rightarrow$ (5) del teorema 4.6, donde sólo se utiliza que el conjunto B que allí aparece es normante. (3) se deduce de (2) y del teorema 3.7. Finalmente (1) es una consecuencia del corolario 3.11.1 y del teorema 2.20. ■

Apéndice A

Compactos que contienen a $\beta\mathbb{N}$ y espacios de Banach que contienen a $\ell^1(c)$

A.1. Compactos que contienen a $\beta\mathbb{N}$

Incluiremos algunos resultados sobre el compactificado de Stone-Čech del espacio de los números naturales dotado con la topología discreta. Recordemos que este espacio, que representaremos por $\beta\mathbb{N}$, es el único (salvo homeomorfismos) espacio compacto y Hausdorff tal que $\mathbb{N}$ es un subespacio denso de $\beta\mathbb{N}$, y de modo que cualquier función continua de $\mathbb{N}$ en un espacio compacto y Hausdorff Z puede extenderse a una función continua de $\beta\mathbb{N}$ en Z. A continuación reunimos algunas propiedades notables de $\beta\mathbb{N}$.

1. El cardinal de $\beta\mathbb{N}$ es 2^c ([77, page 149, problem 108]). En efecto, por un lado basta tener en cuenta que existe una aplicación sobreyectiva y continua de $\beta\mathbb{N}$ en $[0,1]^c$ debido a que este último espacio es compacto, Hausdorff y separable, por lo que $\text{card}(\beta\mathbb{N}) \geq 2^c$; por otro lado, si un conjunto A es denso en un espacio Hausdorff se cumple que $\text{card}(X) \leq 2^{2^{\text{card}(A)}}$ (basta considerar la aplicación inyectiva de X en el conjunto de partes $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ que a cada $x \in X$ le hace corresponder
$$\{\, P : P \subset A, x \in \overline{P}\,\})$$
por lo que al ser $\mathbb{N}$ denso en $\beta\mathbb{N}$ debe ser $\text{card}(\beta\mathbb{N}) \leq 2^c$.

2. $\beta\mathbb{N}$ es un espacio extremadamente disconexo ([77, page 400]), lo que significa que la clausura de cada subconjunto abierto de $\beta\mathbb{N}$ es también abierto; de forma equivalente, dados dos subconjuntos abiertos y disjuntos de $\beta\mathbb{N}$ sus clausuras son disjuntas ([77, theorem 14.1.1]).

3. Como cualquier espacio extremadamente disconexo y Hausdorff, $\beta\mathbb{N}$ no tiene sucesiones convergentes no triviales ([77, theorem 14.1.5]) y como consecuencia $\beta\mathbb{N}$ no es secuencialmente compacto.

4. Se deduce del apartado anterior que cualquier subconjunto infinito de $\beta\mathbb{N}$ contiene un subconjunto numerable y discreto. Por lo tanto, cualquier subconjunto infinito de $\beta\mathbb{N}$ contiene un subconjunto numerable cuya clausura es homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$ (ya que si dos espacios topológicos de Tychonoff son homeomorfos, también lo son sus correspondientes compactificaciones de Stone-Čech —véase [6, page 219]—).

5. Si $C = A \cup B$ es un subconjunto numerable y discreto de $\beta\mathbb{N}$ de modo que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Esta propiedad puede verse como consecuencia

de lo siguiente: si C es un subconjunto numerable y discreto en un espacio Hausdorff X, entonces existe una familia numerable de abiertos disjuntos dos a dos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada U_n contiene un único punto de C; si además X es extremadamente disconexo (como es el caso de $\beta\mathbb{N}$), la familia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elegida es tal que los conjuntos $\overline{U_n}$ son disjuntos dos a dos. Ésta última familia nos da fácilmente la propiedad enunciada al principio.

6. Si X e Y son espacios compactos Hausdorff tales que Y contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$ y existe una aplicación $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva, entonces X contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$. Esto se debe a que podemos tomar el cerrado $F = f^{-1}(\beta\mathbb{N})$ y restringir $f : F \to \beta\mathbb{N}$. Entonces se aplica lo siguiente:

   - Para la aplicación f anterior, existe un subconjunto cerrado C de F (y por lo tanto cerrado en X) tal que $f|_C : C \to \beta\mathbb{N}$ es minimal ([77, 14.2]). Recordemos que una función $g : Z \to W$ entre dos espacios topológicos es minimal cuando es continua y además cualquier subconjunto cerrado M de Z distinto de Z cumple $f(M) \neq f(Z)$.
   - Cualquier función minimal y sobreyectiva de un espacio compacto y Hausdorff en $\beta\mathbb{N}$ es un homeomorfismo ([77, 14.2]).

7. $\beta\mathbb{N}$ puede identificarse con el conjunto de ultrafiltros en $\mathbb{N}$, de modo que los abiertos son los conjuntos de la forma $V(E) = \{\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N} : E \in \mathcal{F}\}$ para cada subconjunto no vacío E de $\mathbb{N}$ ([64]). De la misma forma $\beta\mathbb{N}$ puede identificarse con el conjunto de medidas finitamente aditivas $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$, con la topología inducida por la topología producto de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\beta\mathbb{N})}$.

8. $\beta\mathbb{N}$ tiene peso c, es decir, c es el menor de los cardinales de las bases de $\beta\mathbb{N}$ ([6, page 221]). En primer lugar, existe una base de cardinal c; esto es inmediato teniendo en cuenta que $\beta\mathbb{N}$ es equivalente a la compactación de Wallman de $\mathbb{N}$ al ser $\mathbb{N}$ un espacio normal ([6, page 218]), y por lo tanto la familia de abiertos $\mathcal{B} = \{\overline{M}^{\beta\mathbb{N}} : M \subset \mathbb{N}\}$ es una base de $\beta\mathbb{N}$ con cardinal c (nótese que dados dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ distintos, sus clausuras son distintas como se deduce del hecho de que todo par de abiertos disjuntos de $\beta\mathbb{N}$ tienen clausuras disjuntas). Para demostrar que no existe una base con cardinal menor basta ver que existe una familia de abiertos no vacíos de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ con cardinal c y disjuntos dos a dos. En efecto, existe una familia no numerable $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ formada por subconjuntos

infinitos y tal que si A y B están en $\mathcal{F}$, entonces card$(A \cap B)$ es finito (considérese en $\mathbb{Q}$ la siguiente familia: para cada número irracional r se toma una sucesión de racionales que converge a r y el correspondiente conjunto se incluye en la familia). Entonces utilizamos que para A, B en $\mathbb{N}$ con $A \cap B$ finito se tiene:

$$(\overline{A}^{\beta\mathbb{N}} \cap \overline{B}^{\beta\mathbb{N}}) \cap (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) = \emptyset$$

y se concluye el resultado deseado.

9. La estrechez ("tightness") de $\beta\mathbb{N}$ es c, es decir, c es el menor cardinal τ tal que si A es un subconjunto de $\beta\mathbb{N}$ y x está en $\overline{A}^{\beta\mathbb{N}}$, entonces existe un subconjunto C de A con cardinal menor o igual que τ y tal que $x \in \overline{C}$ ([6, page 222]).

Señalaremos ahora algunas clases de espacios topológicos compactos que contienen copias de $\beta\mathbb{N}$. Recordemos primero que, por definición, un espacio vectorial topológico X tiene la propiedad $\mathcal{C}$ de Corson cuando para cada familia $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ de cerrados convexos no vacíos de X con $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$, existe un subconjunto numerable J en I tal que $\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha = \emptyset$.

Proposición A.1 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff. Cualquiera de las siguientes condiciones implica que K no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.*

(1) K es secuencialmente compacto.

(2) Existe un espacio de Hausdorff compacto Y que no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ y una aplicación continua y sobreyectiva $f : Y \to K$.

(3) El peso de K es menor que c.

(4) La estrechez de K es menor que c.

(5) $(C(K), t_p(K))$ tiene la propiedad $\mathcal{C}$ de Corson (esto incluye los casos en que $(C(K), t_p(K))$ es Lindelöf o $(C(K), \omega)$ tiene la propiedad $\mathcal{C}$ de Corson).

Demostración. Las cuatro primeras condiciones se deducen directamente de las propiedades enunciadas anteriormente.

Para la propiedad (5) sirve el razonamiento de [73, proposition 6.3]: basta probar que la estrechez de K es numerable. Supongamos que A es un subconjunto de K y que $a \in \overline{A} \setminus A$. Para cada subconjunto finito $F \subset A$ se define:

$$C_F = \{\, f \in C(K) : f(a) = 0 \text{ y } \ f(x) \geq 1 \ \forall x \in F \,\}$$

Cada C_F es $t_p(K)$-cerrado, convexo y no vacío (puede usarse el teorema de extensión de Tietze para comprobar esto último); como a está en $\overline{A}$, se tiene que $\bigcap C_F = \emptyset$. Por la hipótesis, existe una familia numerable (F_n) de subconjuntos finitos de A tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{F_n} = \emptyset$. Ahora bien, el lema de Urysohn nos asegura ahora que

$$a \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n},$$

donde el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es numerable. ■

La segunda proposición que incluimos es de mayor profundidad y combina algunos resultados y comentarios de Haydon ([40, lemma 1.1, remark 2.5]) y de Lacey ([50, theorem 2, page 111]).

Proposición A.2 *Sea K un espacio compacto y Hausdorff. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

(1) K contiene un subespacio homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.

(2) Existe un cerrado $F \subset K$ y una sobreyección continua $\phi : F \to \{0,1\}^c$.

(3) Existe una sobreyección continua $\psi : K \to [0,1]^c$.

(4) Existe una familia independiente $(A^0_\alpha, A^1_\alpha)_{\alpha\in c}$ que consiste en subconjuntos cerrados de K.

(5) $C(K)$ contiene un subespacio isométrico a $\ell^1(c)$.

<u>Demostración</u>.
(1) $\Rightarrow$ (2) Al ser $\{0,1\}^c$ separable, existe una sobreyección continua de $\beta\mathbb{N}$ en $\{0,1\}^c$. Basta así tomar F la copia homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$ en K, y ϕ la aplicación correspondiente.
(2) $\Rightarrow$ (3) Por un lado $[0,1]$ es imagen continua de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, y por lo tanto, el espacio producto $[0,1]^c$ será imagen continua de $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^c \cong \{0,1\}^c$. De esta forma si F es

un subconjunto cerrado de K y $\phi : F \to \{0,1\}^c$ es continua y sobreyectiva, entonces existirá una aplicación continua y sobreyectiva de F en $[0,1]^c$, y esta aplicación puede extenderse a K de forma continua utilizando el teorema de extensión de Tietze.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sea $\psi : K \longrightarrow [0,1]^c$ una sobreyección continua y sean los conjuntos

$$A_\alpha^0 = (P_\alpha \circ \psi)^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \qquad \text{y} \qquad A_\alpha^1 = (P_\alpha \circ \psi)^{-1}\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right]\right)$$

donde P_α es la proyección correspondiente para cada $\alpha \in c$. Entonces, la familia $(A_\alpha^0, A_\alpha^1)_{\alpha\in c}$ es independiente, y está formada por cerrados en K (usamos aquí la sobreyectividad y la continuidad de ψ, respectivamente).

(4) $\Rightarrow$ (2) Para cada $\alpha \in c$, consideramos el cerrado $F_\alpha = A_\alpha^0 \bigcup A_\alpha^1$. La familia $(F_\alpha)_{\alpha\in c}$ cumple la propiedad de la intersección finita por la independencia de la familia $(A_\alpha^0, A_\alpha^1)_{\alpha\in c}$, luego el conjunto $F = \bigcap_{\alpha\in c} F_\alpha$ es un compacto no vacío. Si definimos $\phi : F \longrightarrow \{0,1\}^c$ mediante

$$\phi_\alpha(\omega) = 0 \text{ si } \ \omega \in A_\alpha^0 \quad \text{ y } \quad \phi_\alpha(\omega) = 1 \text{ si } \ \omega \in A_\alpha^1$$

para cada $\alpha \in c$, entonces ϕ es continua (si P_α es la proyección proyección correspondiente para cada $\alpha \in c$, entonces $P_\alpha \circ \phi$ es continua), y sobreyectiva (si fijamos un punto $\varepsilon = (\varepsilon_\alpha) \in \{0,1\}^c$, el compacto F contiene un punto f tal que $\phi(f) = \varepsilon$, ya que al ser la familia $(A_\alpha^0, A_\alpha^1)_{\alpha\in c}$ independiente, puede elegirse una familia apropiada que verifica la propiedad de la intersección finita).

(2) $\Rightarrow$ (1) Utilizamos la identificación de $\beta\mathbb{N}$ con el conjunto de medidas finitamente aditivas $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}$ con la topología inducida por la topología producto de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$. De esta forma, $\{0,1\}^c$ contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$. Así, si F es un cerrado de K tal que existe una sobreyección continua $\phi : F \longrightarrow \{0,1\}^c$, podemos considerar un cerrado minimal T de F tal que $\phi(T) = \beta\mathbb{N}$, y este cerrado resulta ser homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.

(3) $\Rightarrow$ (5) La sobreyección continua $\psi : K \longrightarrow [0,1]^c$, induce una inmersión isométrica de $C([0,1]^c)$ en $C(K)$, y basta así tener en cuenta que $\ell^1(c)$ es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C([0,1]^c)$. En efecto, sea la función continua y sobreyectiva $h : [0,1] \longrightarrow [-1,1]$ definida por $h(t) = 2t - 1$. Dado $t \in [0,1]$ definimos $h_t : [0,1]^{[0,1]} \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$h_t(f) = 2f(t) - 1 \quad \text{ para cada } \quad f \in [0,1]^{[0,1]}$$

Cada h_t es continua, y se cumple que el subespacio lineal cerrado engendrado por

$$\{ h_t : t \in C([0,1]^{[0,1]} \}$$

es isométricamente isomorfo a $\ell^1(c)$, ya que $(h_t)_{t\in[0,1]}$ es equivalente a la base canónica de $\ell^1(c)$ y cumple para cada $A \subset [0,1]$ finito y cada familia de escalares reales α_i, con $i \in A$ se cumple $\sum_{i\in A} |\alpha_i| = \left\|\sum_{i\in A} \alpha_i h_i\right\|$ (el último supremo se alcanza en cualquier función $f \in [0,1]^{[0,1]}$ que valga 1 si $\alpha_i \geq 0$ y 0 si $\alpha_i < 0$).

(5) $\Rightarrow$ (4) Sea $T : \ell^1(c) \longrightarrow C(K)$ una isometría lineal, y sea $f_i = T(e_i)$ para cada i en c. Tendremos así que $\|f_i\|_\infty = 1$. Consideramos ahora los conjuntos $A_i = f_i^{-1}(\{-1\})$ y $B_i = f_i^{-1}(\{1\})$, para cada $i \in c$, que verifican $A_i \bigcap B_i = \emptyset$. Consideramos ahora un conjunto finito $F \subset c$ y una sucesión $\{ \varepsilon_i : i \in F \}$ formada por unos y menos unos, y sea $\varepsilon_i' = -\varepsilon_i$ para cada $i \in F$. Denotamos por $1 \cdot A_i = A_i$ y $(-1) \cdot A_i = B_i$ y demostraremos que se tiene

$$\bigcap_{i\in F} \varepsilon_i \cdot A_i \neq \emptyset \quad \text{o bien} \quad \bigcap_{i\in F} \varepsilon_i' \cdot A_i \neq \emptyset \tag{A.1}$$

En efecto: por un lado se cumple que $\left\|\sum_{i\in F} \varepsilon_i f_i\right\| = \sum_{i\in F} |\varepsilon_i| = \text{card}(F)$ (ya que T es isometría lineal), luego existe t en K tal que

$$\left|\sum_{i\in F} \varepsilon_i f_i(t)\right| = \text{card}(F)$$

es decir, o bien $\sum_{i\in F} \varepsilon_i f_i(t) = \text{card}(F)$ o bien $\sum_{i\in F} \varepsilon_i' f_i(t) = \text{card}(F)$; como se cumple que $|\varepsilon_i \cdot f_i(t)| \leq 1$, para todo i en F, tendremos que o bien $t \in \bigcap_{i\in F} \varepsilon_i \cdot A_i$ o bien $t \in \bigcap_{i\in F} \varepsilon_i' \cdot A_i$.

Escribimos ahora $c = \{\alpha : \alpha < \alpha_0\}$ para un ordinal α_0, y sea así una sucesión finita $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ tales que $\bigcap_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot A_{\alpha_i} = \emptyset$. Denotamos $A_\alpha' = A_{\alpha+\alpha_n}$ y $B_\alpha' = B_{\alpha+\alpha_n}$, y probamos que $(A_\alpha', B_\alpha')_{\alpha\in c}$ es independiente: en otro caso, existirían $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$ en c y $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in \{1, -1\}$ tales que $\bigcap_{j=1}^k \delta_j \cdot A_{\beta_j}' = \emptyset$. Por lo tanto la ecuación (A.1) nos asegura que

$$\left(\bigcap_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot A_{\alpha_i}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^k \delta_j' \cdot A_{\beta_j}'\right) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i=1}^n \varepsilon_i' \cdot A_{\alpha_i}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^k \delta_j \cdot A_{\beta_j}'\right) \neq \emptyset$$

en contradicción con las suposiciones anteriores.

■

El siguiente resultado nos asegura que el espacio $\beta\mathbb{N}$ es primo, es decir, si un producto finito de espacios contiene a $\beta\mathbb{N}$ es que alguno de los factores lo contiene. El resultado es también válido para productos numerables ([52] y [75, théorème 3]), aunque los razonamientos que seguiremos sirven sólo para el caso finito. La demostración que sigue es puramente topológica y se basa en [52].

Lema A.3 *Sea X un espacio topológico Hausdorff y $f : \beta\mathbb{N} \to X$ continua y sobreyectiva. Si para cada $x \in X$, $f^{-1}(\{x\})$ es finito, entonces X contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.*

Demostración.
Primera etapa: Veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{card}(f^{-1}(\{x\})) \leq n$ para cada $x \in X$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un conjunto numerable $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\mathrm{card}(f^{-1}(\{x_n\})) > n$. Es claro que podemos suponer que S es discreto, y por ser X compacto, existirá $p \in \overline{S} \setminus S$. Comprobaremos que $f^{-1}(\{p\})$ es infinito, en contradicción con la hipótesis inicial. Primeramente elegimos subconjuntos numerables $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $f^{-1}(S)$ disjuntos dos a dos, y tales que $Y_m \cap f^{-1}(\{x_n\}) \neq \emptyset$ para $n \geq m$. De esta forma, cada $F(Y_m)$ contiene todos los elementos de S salvo, a lo más, una cantidad finita; así $p \in \overline{f(Y_m)}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, de donde $f^{-1}(\{p\}) \cap \overline{Y_m} \neq \emptyset$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Ahora bien, los conjuntos $\overline{Y_m}$ son disjuntos dos a dos, ya que cada unión $Y_n \cup Y_m$ es numerable y discreta, por lo que $f^{-1}(\{p\})$ sería infinito.

Segunda etapa: Construyamos la copia de $\beta\mathbb{N}$ en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto

$$X_n = \{x \in X : \mathrm{card}(f^{-1}(\{x\})) = n\}$$

Al ser X infinito, podemos considerar n_0 como el mayor número natural n tal que X_n es infinito. Definimos $F = \{\, x \in X : \mathrm{card}(f^{-1}(\{x\})) > n_0 \,\}$. Este conjunto es finito, por lo que debe existir un abierto U de X tal que $F \subset U$ y $X_{n_0} \setminus U$ es finito. Sea $A \subset X_{n_0} \setminus U$ numerable y discreto. Podemos elegir una familia numerable $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos dos a dos de $f^{-1}(A)$, de modo que

$$Z_j \cap f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset \qquad \text{para cada } a \in A \text{ y cada } j \leq n_0$$

Nótese que para $j \leq n_0$ se tiene que $\overline{Z_j}$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. La prueba terminará si probamos que para cualquiera de estos j se tiene que $f|_{\overline{Z_j}} : \overline{Z_j} \to \overline{A}$ es un homeomorfismo; y para probar esto basta ver que es biyectiva. Ahora bien, como $f(Z_j) = A$, tendremos que por ser f cerrada $\overline{A} \subset f(\overline{Z_j})$, luego $\overline{Z_j} \cap f^1(\overline{A}) \neq \emptyset$, y $f|_{\overline{Z_j}}$ es sobreyectiva. Por otro lado, $\text{card}(f^{-1}(\{x\})) \leq n_0$ para cada $x \in \overline{A}$, y al ser $f^{-1}(\{x\}) \cap \overline{Z_j} \neq \emptyset$ para cada $j \leq n_0$, se tiene que $\text{card}(f^{-1}(\{x\}) \cap \overline{Z_j}) = 1$ para cada $j \leq n_0$, lo que nos da la inyectividad. ■

Teorema A.4 *Un producto finito de espacios compactos de Hausdorff contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ si y sólo si uno de los factores contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.*

Demostración. La única propiedad no obvia del enunciado se deduce del hecho siguiente: si el producto de dos espacios $X_1 \times X_2$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ (llamamos B a esa copia), entonces uno de ellos la contiene. Supongamos que no es así, y que ni X_1 ni X_2 contienen una copia de $\beta\mathbb{N}$. Entonces se cumple que para cada $x_1 \in X_1$ el conjunto $(\{x_1\} \times X_2) \cap B$ es finito, pues en otro caso, X_2 contendría una copia de $\beta\mathbb{N}$. La aplicación $P_B : B \to X_1$ definida como restricción de la proyección es continua, sobreyectiva sobre $P_B(B)$ y es tal que $P_B^{-1}(\{x\})$ es finito para cada $x \in P_B(B)$; el lema anterior asegura que $P_B(B)$ contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$, y por lo tanto, X_1 también contiene dicha copia homeomorfa. ■

A.2. Espacios de Banach que contienen a $\ell^1(c)$

En esta sección estudiamos la clase de espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$. Daremos algunas condiciones equivalentes (ver la proposición A.5 y el teorema A.7) que nos permitirán asegurar que dicha clase es bastante amplia (ver el epígrafe A.2.3).

A.2.1. Copias de $\ell^1(c)$ y cocientes de ℓ^∞

El primer resultado que presentamos (cuya dificultad principal se basa en ideas de Pelczynski—[58, lemma 3.1]—) está en conexión con la existencia de operadores sobreyectivos de un espacio de Banach X en ℓ^∞. La idea principal de la siguiente proposición es el hecho de que las copias de $\ell^1(c)$ pueden “levantarse” al espacio inicial de un operador lineal.

Proposición A.5 *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Existe un operador sobreyectivo $T : X \longrightarrow \ell^\infty$.

(2) Existe un espacio de Banach Y que contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ y un operador $T : X \longrightarrow Y$ con rango denso en dicha copia.

(3) X contiene un subespacio isomorfo a $\ell^1(c)$.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Es inmediato teniendo en cuenta que $\ell^\infty = C(\beta\mathbb{N})$ contiene una copia isométrica de $\ell^1(c)$, por la proposición A.2.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\{\, y_t : t \in c \,\}$ una familia en Y tal que existen escalares $c_1, c_2 > 0$ con

$$c_2 \sum_{t\in c} |\alpha_t| \leq \left\| \sum_{t\in c} \alpha_t \cdot y_t \right\| \leq c_1 \sum_{t\in c} |\alpha_t|$$

Elegimos una constante positiva $k < c_2$. Para cada t en c consideramos un elemento x_t en X tal que $\|T(x_t) - y_t\| < k$ y definimos $C_n = \{\, t \in c : \|x_t\| \leq n \,\}$. Para algún $m \in \mathbb{N}$, C_m tiene el cardinal del continuo, y para $(\beta_t)_{t\in C_m}$ se cumple

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_{t\in C_m} |\beta_t| &\geq \left\| \sum_{t\in C_m} \beta_t \cdot x_t \right\| \geq \frac{1}{\|T\|} \left\| \sum_{t\in C_m} \beta_t \cdot T(x_t) \right\| \\ &\geq \frac{1}{\|T\|} \cdot \left| \| \sum_{t\in C_m} \beta_t \cdot y_t \| - \| \sum_{t\in C_m} \beta_t \cdot (y_t - T(x_t)) \| \right| \\ &\geq \frac{1}{\|T\|} \cdot \left(c_2 \sum_{t\in C_m} |\beta_t| - k \cdot \sum_{t\in C_m} |\beta_t| \right) = \frac{c_2 - k}{\|T\|} \cdot \sum_{t\in C_m} |\beta_t| \end{aligned}$$

Tenemos así que el subespacio cerrado de X engendrado por $\{\, x_t : t \in C_m \,\}$ es isomorfo a $\ell^1(c)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Como la dimensión de ℓ^∞ es c, existe un operador sobreyectivo de $\ell^1(c)$ en ℓ^∞, que por la hipótesis puede extenderse a un operador sobreyectivo de X en ℓ^∞. ■

A.2.2. Copias de $\beta\mathbb{N}$ en (B_{X^*}, ω^*)

El segundo resultado de esta sección conecta la topología de (B_{X^*}, ω^*) con la estructura de X como espacio de Banach: la existencia de una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$ en (B_{X^*}, ω^*) es equivalente al hecho de que el propio espacio X contenga una copia isomorfa de $\ell^1(c)$. Por un lado, puede probarse que si un espacio de Banach X contiene un subespacio isomorfo a $\ell^1(c)$, entonces existe una sobreyección continua $T : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow [0,1]^c$, es decir, la bola del dual B_{X^*} con la topología w^* contiene una copia homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$ (por el teorema A.2). En efecto, si $J : \ell^1(c) \longrightarrow X$ es una inmersión lineal, por trasposición obtenemos un operador sobreyectivo y continuo $I : X^* \longrightarrow \ell^\infty(c)$; el teorema de la aplicación abierta nos permite asegurar que existe una constante $\alpha > 0$ y un subconjunto ω^*-cerrado F de B_{X^*} tal que $I|_F : F \longrightarrow [-\alpha, \alpha]^c$ es continua y sobreyectiva; el teorema de extensión de Tietze nos permite concluir que existe una sobreyección continua $T : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow [0,1]^c$.

El recíproco fue demostrado por Talagrand en [75] y se apoya en la construcción de una familia independiente de funciones con el cardinal del continuo. La principal dificultad está en el siguiente resultado de teoría combinatoria de conjuntos, que incluimos, sin demostración, en el caso particular del cardinal del continuo.

Teorema A.6 (Talagrand, [75]) *Sea Ω un conjunto y $(X_i, Y_i)_{i\in c}$ una familia independiente de subconjuntos de Ω. Supongamos que las familias de subconjuntos $(X_{i,j})_{i\in c, j\in\mathbb{N}}$ e $(Y_{i,j})_{i\in c, j\in\mathbb{N}}$ son tales que $X_{i,j} \subset X_i$ y $Y_{i,j} \subset Y_i$ para cada i en c y $j \in \mathbb{N}$ y además para cada i en c existe un subconjunto finito P_i de $\mathbb{N}$ tal que*

$$X_i \times Y_i \subset \bigcup_{j\in P_i} X_{i,j} \times Y_{i,j}$$

Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ y un subconjunto no numerable I de c tal que la familia $(X_{i,p}, Y_{i,p})_{i\in I}$ es independiente.

Teorema A.7 *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

(1) X contiene un subespacio isomorfo a $\ell^1(c)$.

(2) Existe una sobreyección continua $T : (B_{X^*}, \omega^*) \to [0,1]^c$

(3) La bola del dual (B_{X^*}, ω^*) contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Se sigue de la proposición A.2.

(1) $\Rightarrow$ (2) Es la observación que precede al teorema A.6.

(2) $\Rightarrow$ (1) Basta utilizar el teorema anterior con $K = (B_{X^*}, w^*)$ y X como subespacio de $C(K)$ que separa K. En estas condiciones existe un familia no numerable $(x_i)_{i\in c}$ de elementos de X, y dos escalares reales $\alpha < \beta$ tales que la familia

$$(\{x_i \leq \alpha\}, \{x_i \geq \beta\})_{i\in c}$$

es independiente, de donde X contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$, por el teorema de Rosenthal. ■

Relacionando este último resultado con la proposición A.2, observamos que para un espacio de funciones continuas sobre un compacto, $C(K)$, se cumple:

$$C(K) \text{ contiene una copia isométrica de } \ell^1(c) \quad \Leftrightarrow \quad \beta\mathbb{N} \subset K \tag{A.2}$$

$$C(K) \text{ contiene una copia isomorfa de } \ell^1(c) \quad \Leftrightarrow \quad \beta\mathbb{N} \subset B_{C(K)^*} \tag{A.3}$$

Es evidente que cualquiera de las condiciones de (A.2) implica las de (A.3). Sin embargo, no son equivalentes entre sí. En [74, théorème 5], Talagrand prueba, utilizando el axioma de Martin, que existe un compacto separable K tal que todo punto de K tiene una base de entornos con cardinal menor que c, y tal que ℓ^∞ es un cociente de $C(K)$ (es decir, $C(K)$ contiene una copia isomorfa de $\ell^1(c)$ utilizando la proposición A.5). Teniendo en cuenta que los puntos de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ no poseen bases de entornos con cardinal menor que c (esto se debe a que si la intersección de una familia de abiertos en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ con cardinal menor que c es no vacío, dicha intersección tiene interior no vacío, [6, pág. 221]), el compacto anterior no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$, y utilizando la proposición A.2, para dicho compacto, $C(K)$ no contiene una copia isométrica de $\ell^1(c)$ y sin embargo sí contiene una copia isomorfa del mismo espacio.

El ejemplo de Talagrand anterior nos sirve pues para afirmar que para un compacto K, el hecho de que $B_{C(K)^*}$ contenga una copia de $\beta\mathbb{N}$ no implica, en general, que K contenga una copia de $\beta\mathbb{N}$. Sin embargo, en el caso concreto en que $K = (B_{X^*}, \omega^*)$, y si suponemos cierto el axioma de Martin y falsa la hipótesis del continuo, se tiene la siguiente equivalencia (ver [55, theorem 4.11]):

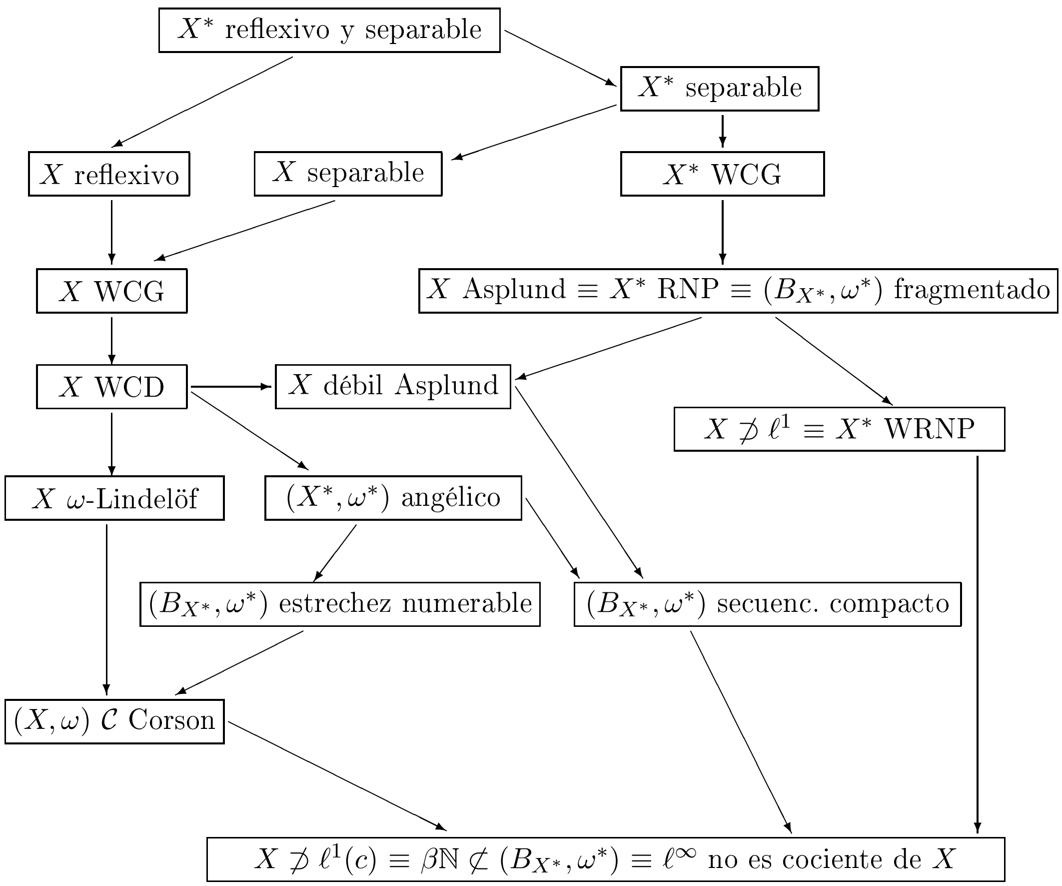
$$\beta\mathbb{N} \subset (B_{X^*}, \omega^*) \iff \beta\mathbb{N} \subset B_{C(B_{X^*})^*}$$

o bien, si tenemos en cuenta el teorema A.7 y la ecuación A.3, se verifica:

$$\ell^1(c) \subset X \iff \ell^1(c) \subset C(B_{X^*})$$

A.2.3. Otras clases de espacios de Banach

Para terminar, en el siguiente cuadro se consideran algunas clases de espacios de Banach que están contenidas en la clase de los espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de $\ell^1(c)$. La terminología que se emplea es la que se ha utilizado en la memoria; además, se usan las abreviaturas: WCG por débilmente compactamente generado y WCD por débilmente numerablemente determinado.



Bibliografía

[1] A. ALEXIEWICZ y W. ORLICZ. Sur la continuité et classification de Baire des fonctions abstraites. *Fund. Math.* , 35:105–126, 1948.

[2] K. ALSTER y R. POL. On function spaces of compact subspaces of Σ-products of the real line. *Fund. Math.*, 107:135–143, 1980.

[3] D. AMIR y J. LINDENSTRAUSS. The structure of weakly compact sets in Banach spaces. *Ann. of Math.*, 88:34–46, 1968.

[4] A.V. ARKANGEL'INSKII. A survey of C_p-theory. *Question Answer*, 5:1–109, 1987. Special Issue.

[5] A.V. ARKANGEL'INSKII. C_p-theory. En M. Hušek y J. van Mill, editores, *Recent progress in General Topology*, pág. 1–56. North-Holland, 1992.

[6] A.V. ARKANGEL'SKII y V.I. PONOMAREV. *Fundamentals of General Topology.* D. Reidel Publishing Company, 1984.

[7] R. BAIRE. Sur les fonctions des variables réelles. *Ann. Math. Pura Appl.*, 3:16–30, 1899.

[8] J. BATT y W. HIERMEYER. On compactness in $L^p(\mu, X)$ in the weak topology and in the topology $\sigma(L^p(\mu, X), L^q(\mu, X^*))$. *Math. Z.*, 182:409–423, 1983.

[9] B. BEAUZAMY. *Introduction to Banach spaces and their geometry (sec. ed.).* North-Holland, 1985.

[10] A. BELLOW. Lifting compact spaces. *Proc. of Measure Theory Oberwolfach 1979. LNM. Springer-Verlag*, 794:233–253, 1980.

[11] F. BOMBAL. Sobre los espacios de Orlicz de funciones vectoriales. *Collectanea Math.*, XXXII:2–12, 1981.

[12] J. BOURGAIN, H. FREMLIN y M. TALAGRAND. Pointwise compact sets of Baire measurable functions. *Amer. J. of Math.*, 100:845–886, 1978.

[13] J. BOURGAIN y M. TALAGRAND. Compacité extrémale. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80(1):68–70, 1980.

[14] A. BOUZIAD. Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(3):953–959, 1996.

[15] B. CASCALES y G. GODEFROY. Angelicity and the boundary problem. Aparecerá en *Mathematika*.

[16] B. CASCALES, G. MANJABACAS y G. VERA. Fragmentability and compactness in $C(K)$-spaces. Aparecerá en *Studia Math.*

[17] B. CASCALES, G. MANJABACAS y G. VERA. A Krein-Šmulian type result in Banach spaces. *Quart. Journ. Math., Oxford*, 48:161–167, 1997.

[18] B. CASCALES y G. VERA. Topologies weaker than the weak topology of a Banach space. *J. Math. Anal. y Appl.*, 182(1):41–68, 1994.

[19] B. CASCALES y G. VERA. Norming sets and compactness. *Rocky Mountain J. Math. 23*, pág. 919–925, 1995.

[20] G. CHOQUET. *Lectures on Analysis II.* Benjamin, 1969.

[21] D.L. COHN. *Measure theory.* Birkäuser, 1993.

[22] G.P. CURBERA. Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices. *Math. Ann.*, 293:317–330, 1992.

[23] R. DEVILLE, G. GODEFROY y V. ZIZLER. *Smoothness and renormings in Banach Spaces.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, volume 64, 1993.

[24] J. DIESTEL. *Geometry of Banach spaces-Selected topics.* Springer-Verlag, LNM n. 485, 1975.

[25] J. DIESTEL. *Sequences and series in Banach spaces.* Springer-Verlag, 1984.

[26] J. DIESTEL y J.UHL. *Vector measures.* Math. Surveys. Amer. Math. Soc., volume 15, 1977.

[27] M. VAN DULST. *Characterizations of Banach spaces not containing ℓ^1*. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989.

[28] N. DUNFORD y J.T. SCHWARTZ. *Linear operators. Part I: General theory.* Interscience, 1958.

[29] G.A. EDGARD. Measurability in a Banach space. *Indiana Univ. Math. J.*, 26:663–677, 1977.

[30] V. FARMAKI. Weak fragmentability. *Mathematica Balkanica 7*, pág. 229–237, 1993.

[31] K. FLORET. *Weakly compact sets.* LNM, volume 801. Springer-Verlag, 1980.

[32] D.H. FREMLIN. K-analytic spaces with metrizable compacts. Manuscript, Colchester, 1977.

[33] P. GÄNSSLER. Compactness and sequential compactness in spaces of measures. *Ztsch. Wahrsch. verw. Gebiete*, 17:124–146, 1971.

[34] G. GODEFROY. Compacts de Rosenthal. *Pacific Journ. Math. 91*, pág. 293–306, 1980.

[35] G. GODEFROY. Boundaries of a convex set and interpolation sets. *Math. Ann.*, 277:173–184, 1987.

[36] G. GODEFROY. Five lectures in geometry of Banach spaces. En *Seminar of Functional Analysis, Univ. Murcia*, 1987.

[37] G. GODEFROY y M. TALAGRAND. Espaces de Banach representables. *Israel Journ. Math. 41*, pág. 321–330, 1982.

[38] A. GROTHENDIECK. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *Amer. J. Math.*, 74:168–186, 1952.

[39] R. HAYDON. Some more characterization of Banach spaces containing ℓ_1. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 80:269–276, 1976.

[40] R. HAYDON. On Banach spaces which contain $\ell^1(\tau)$ and types of measures on compact spaces. *Israel J. Math. 28*, pág. 313–324, 1977.

[41] A. IONESCU-TULCEA y C. IONESCU-TULCEA. On the lifting property I. *Ann. of Math. 52*, pág. 518–527, 1961.

[42] R.C. JAMES. KMP, RNP and PCP for Banach spaces. *Contemporary Mathem.*, 85, 1989.

[43] L. JANICKA. Some measure-theoretical characterization of Banach spaces not containing ℓ_1. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 27:561–565, 1979.

[44] H. JARCHOW. *Locally convex spaces.* B. G. Teubner, 1981.

[45] J.E. JAYNE, I. NAMIOKA y C.A. ROGERS. Norm fragmented weak* compact sets. *Collect. Math. 41*, pág. 133–163, 1990.

[46] J.E. JAYNE, I. NAMIOKA y C.A. ROGERS. Topological properties related to the Radon-Nikodym property. *Proc. London Math. Soc*, 66:651–672, 1993.

[47] J.E. JAYNE y C.A. ROGERS. Borel selectors for upper semicontinuous set-valued maps. *Acta Math.*, 155:41–79, 1985.

[48] I. KLUVÁNEK y G. KNOWLES. *Vector measures and Control Systems.* North-Holland, 1975.

[49] G. KOTHE. *Topological vector spaces I.* Springer-Verlag, 1969.

[50] H.E. LACEY. *The isometric theory of classical Banach spaces.* Springer-Verlag, 1974.

[51] F. MAHARAM. On a theorem of von Neumann. *PAMS 9*, pág. 987–994, 1958.

[52] V.I. MALYHIN. $\beta\mathbb{N}$ is prime. *Bull. de L'Acad. Polonaise des Sciences XXVII, 3-4*, pág. 295–297, 1978.

[53] W. MORAN. Measures on metacompact spaces. *Proc. London Math. Soc.*, 20(3):507–524, 1970.

[54] I. NAMIOKA. Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability. *Mathematika*, 34:258–281, 1989.

[55] S. NEGREPONTIS. Banach spaces and Topology. En K. Kunen y J.E. Vaughan, editores, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, pág. 1045–1142. Elsevier Science Pub., 1984.

[56] S. OKADA. The dual space of $L^1(\mu)$ for a vector measure μ. *J. Math. Analysis and Applications*, 117:583–599, 1993.

[57] S. OKADA y W.J. RICKER. Non-weak compactness of the integration map for vector measures. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, 54:287–303, 1993.

[58] A. PELCZYNSKI. On Banach spaces containing $L^1(\mu)$. *Studia Math. 30*, pág. 231–246, 1968.

[59] M.M. RAO y Z.D. REN. *Theory of Orlicz spaces.* Marcel Dekker, Inc., 1991.

[60] L. RIDDLE y E. SAAB. On functions that are universally Pettis integrable. *Illinois J. Math.*, 29:509–531, 1985.

[61] H.P. ROSENTHAL. A characterization of Banach spaces containing ℓ^1. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 71:2411–2413, 1974.

[62] H.P. ROSENTHAL. Pointwise compact sets of the first Baire class. *Amer. J. Math. 99*, pág. 362–378, 1977.

[63] H.P. ROSENTHAL. Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. 84*, pág. 803–831, 1978.

[64] W. RUDIN. Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications. *Duke Math. J. 23*, pág. 409–420, 1956.

[65] W. RUDIN. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[66] E. SAAB y P. SAAB. A dual geometric characterization of Banach spaces not containing ℓ^1. *Pac. J. Math.*, 105:415–425, 1983.

[67] H.H. SCHAEFFER. *Topological vector spaces.* Springer-Verlag, 1964.

[68] L. SCHWARTZ. Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *J. d'Analyse Math. 4*, pág. 88–148, 1954–55.

[69] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions à valeurs vectorielles I. *Ann. Inst. Fourier 7*, pág. 1–139, 1957.

[70] L. SCHWARTZ. *Radon measures.* Oxford, 1973.

[71] S. SIMONS. A convergence theorem with boundary. *Pacific J. Math. 40*, pág. 703–708, 1972.

[72] C. STEGALL. Functions of the first Baire class. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(4):981–991, 1991.

[73] M. TALAGRAND. Espaces de Banach faiblement K-analytiques. *Ann. of Math.*, 110:407–438, 1979.

[74] M. TALAGRAND. Sur les mesures vectorielles definies par una application Pettis-integrable. *Bull. Soc. Math. France*, 108:475–483, 1980.

[75] M. TALAGRAND. Sur les espaces de Banach contenant $\ell^1(\tau)$. *Israel Journ. Math. 40*, pág. 324–330, 1981.

[76] M. TALAGRAND. *Pettis integral and measure theory.* Mem. Amer. Math. Soc., volume 307, 1984.

[77] A. WILANSKI. *Topology for analysis.* Robert E. Krieger, 1970.

[78] A.C. ZAANEN. *Linear analysis.* North Holland, 1953.