Distancia a espacios de funciones

Carlos Angosto Hernández

Departamento de Matemáticas

Universidad de Murcia

30 de Octubre de 2007

DISTANCIA A ESPACIOS DE FUNCIONES

D. Víctor Jiménez López, Profesor Titular de Análisis Matemático y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral "DISTANCIA A ESPACIOS DE FUNCIONES" ha sido realizada por D. Carlos Angosto Hernández, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Bernardo Cascales Salinas, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a 30 de Octubre de 2007

Fdo: Víctor Jiménez

DISTANCIA A ESPACIOS DE FUNCIONES

D. Bernardo Cascales Salinas, Catedrático de Universidad del Área de Análisis Matemático, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZA:

La presentación de la Tesis Doctoral "DISTANCIA A ESPACIOS DE FUNCIONES", realizada por D. Carlos Angosto Hernández bajo mi inmediata dirección y supervisión en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 30 de Octubre de 2007

Fdo: Bernardo Cascales Salinas

Para empezar, quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a Bernardo Cascales, por guiarme en la realización de este trabajo durante estos años y mostrarme siempre su apoyo.

No puedo dejar de dar las gracias a Antonio Suárez Granero y Witold Marciszewski por su hospitalidad durante mis estancias en la Universidad Complutense de Madrid y en la Universidad de Varsovia respectivamente y que con sus ideas y sugerencias me han permitido mejorar algunas partes de esta memoria.

Así mismo debo agradecer a los miembros del grupo de investigación en Análisis Funcional de la Universidad de Murcia los numerosos seminarios en los que hemos podido discutir diversos temas de matemáticas relacionados o no con el contenido de esta memoria.

Debo de dar las gracias también a los distintos compañeros de despacho que he tenido durante este tiempo, ya sea por resolverme ocasionalmente alguna duda matemática, o simplemente por los buenos momentos compartidos durante estos años.

Finalmente, me gustaría mostrar mi más profundo agradecimiento a mis padres y hermanos que me han ofrecido siempre todo su apoyo.

A mis padres.

Esta memoria ha sido elaborada durante el período de disfrute de una Beca de Postgrado (referencia AP2003-4443) del Programa Nacional de Formación de Profesorado Universitario del Ministerio de Educación y Ciencia. Dos ayudas complementarias de dicho programa han permitido al autor realizar sendas estancias en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid (octubre-diciembre de 2005), y en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Varsovia (octubre-diciembre de 2006).

Esta investigación también ha estado financiada parcialmente por los proyectos: "Espacios de Banach: compacidad, fragmentabilidad, renormamiento y diferenciabilidad" (BFM2002-01719, Ministerio de Ciencia y Tecnología), "Geometría y topología infinito dimensional en espacios de Banach" (00690/PI/04, Fundación Séneca) y "Nuevas tendencias en Análisis Funcional y sus aplicaciones" (MTM2005-08379, Ministerio de Ciencia y Tecnología).

Contenidos

Contents

Introduction

THE general framework of this dissertation is the *study of distances to spaces of functions* and its applications to the study of compactness, Banach spaces, separately continuous functions, selection theorems, etc. Given arbitrary functions $f,g \in Z^X$ from a topological space X to a metric space (Z,d) the distance that we deal with is the *standard supremum metric* given by

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

that is allowed to take the value $+\infty$. If $\mathscr{F} \subset Z^X$ is some space of functions we consider, as usual

$$d(f,\mathscr{F}) = \inf_{g\in\mathscr{F}} d(f,g) = \inf_{g\in\mathscr{F}} \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)).$$

The spaces of functions $\mathscr{F}$ that we will consider are the space of continuous functions $C(X,Z)$, the space of Baire one functions $B_1(X,Z)$ and the space of measurable functions $M(\mu,E)$ where (Ω,Σ,μ) is a probability space. In the same context, if we consider a Banach space E and its bidual space E^{**} as subspaces of functions over the dual ball B_{E^*}, the *standard supremum metric* coincides with the norm of the bidual space.

WE study "quantitative" versions of many of the classical compactness results and their relatives. A bit of the history behind these classical results that we will quantify follows below. In 1940 Šmulian [Šmu40] showed that weakly relatively compact subsets of a Banach space are weakly relatively sequentially compact. He also proved that if a Banach space E has w^*-separable dual then a subset H of E is weakly relatively countably compact if, and only if, H is weakly relatively sequentially compact. Dieudonné and L. Schwartz [DS49] extended this last result to locally convex spaces with a coarser metrizable topology. The converse of Šmulian theorem was obtained by Eberlein [Ebe47] that proved that relatively countably compact sets are relatively compact sets for the weak topology of a Banach space. Grothendieck generalized these results to locally convex spaces that are quasicomplete for its Mackey topology. This result is based upon a similar one for spaces $(C(K),\tau_p)$ over continuous functions on a compact space K endowed with the pointwise convergence topology. Fremlin's notion of angelic space and some of its consequences can be used for proving those results in a clear way (see [Flo80]). Orihuela [Ori87] showed in 1987 that spaces $(C(X),\tau_p)$ with X a countable K-determined space (or more general spaces) are angelic. Similarly, for spaces $(B_1(X),\tau_p)$ of Baire one functions with the pointwise convergence topology, Rosenthal showed that relatively countably compact sets are relatively compact sets. Bourgain, Fremlin and Talagrand [BFT78] showed that in fact $(B_1(X), \tau_p)$ is angelic.

In a different framework, Srivatsa [Sri93] proved in 1993 that if $F : X \to \mathscr{P}(E)$ is a set-valued map from a metric space X into a Banach space E that is upper semicontinuous for the weak topology of E, then F has a Baire one selector, i.e. there exists a Baire one function $f : X \to E$ such that $f(x) \in F(x)$ for $x \in X$. In particular, if $f : X \to E$ is a w-continuous function, then f is a $\|\cdot\|$-Baire one function. This result is also true when we replace (E,w) by $(C(K),\tau_p)$ for a compact space K. From this result, the classical Namioka's theorem [Nam74] about separate and joint continuity can be deduced: if X is a complete metric space, K a compact space and $f : X \times K \to \mathbb{R}$ a separately continuous function, then there exists a G_δ dense set $D \subset X$ such that f is continuous in each $(x,k) \in D \times K$. Saint-Raymond [SR83] and Bouziad [Bou90] proved some generalizations of Namioka's theorem.

As said previously the goal of this dissertation is to offer, among others, quantitative versions of the above results: to do so we use distances to spaces of functions as presented at the beginning of this introduction. Note that in recent years, several *quantitative* counterparts for some other classical results such as Krein-Šmulian, Grothendieck, etc., have been proven. These new versions strengthen the original theorems and lead to new problems and applications in topology and analysis: see, for instance, [CMR06, FHMZ05, Gra06, GHS04, GS06, GS07a]. Along this line, our results offer quantitative versions of results by Orihuela, Gantmacher, Grothendieck, Rosenthal, Namioka, Saint-Raymond, Bouziad, etc.

The original results included in this dissertation are contained in our research papers [ACb], [ACa], [ACN], [Ang] and [ACR], the latter still in preparation.

We next summarize the content of this work.

Chapter 1. Preliminary results

This auxiliary chapter is devoted to prove some known results that will be used in the remaining chapters. In the first two sections we provide a formula to measure distances to spaces of continuous functions. In Section 1.1 we prove that distances to spaces of continuous functions can be computed with oscillations for functions from a normal space to $\mathbb{R}$. This result was known for bounded functions but this condition is not needed.

Theorem 1.1.9. *Let X be a normal space and $f \in \mathbb{R}^X$. Then*

$$d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$

In fact, Theorem 1.1.9 characterizes normal spaces

Corollary 1.1.12. *Let X be a topological space. The following assertions are equivalent:*

(i) *X is a normal space,*
(ii) *for all $f \in \mathbb{R}^X$, there exist $g \in C(X)$ such that $d(f,g) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$,*
(iii) *for all $f \in \mathbb{R}^X$, $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$,*

(iv) for all non continuous function $f \in \mathbb{R}^X$, $d(f, C(X)) < \operatorname{osc}(f)$.

In Section 1.2 we study some properties about paracompact spaces. For an arbitrary metric space (Z,d) we can also compute distances from a function $f \in Z^X$ to $C(X,Z)$ in the case when the space X is paracompact.

Theorem 1.2.19 ([CMR06]). *Let X be a paracompact space and Z a convex subset of a normal space E. Then for each $f : X \to Z$*

$$\frac{1}{2}\operatorname{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z)) \leq \operatorname{osc}(f).$$

The rest of the chapter contains several results that will be useful later in this dissertation: separation of convex sets, principe of local reflexivity, Pták Lemma and some properties about good partitions. We include proofs for the sake completeness.

Chapter 2. Distance to spaces of continuous functions

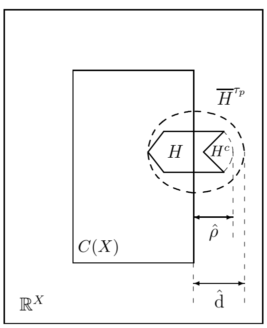


Figure 1

The kind of problems that we study in this chapter are illustrated in Figure 1. Take X a topological space and let $C(X)$ be the space of real-valued continuous functions defined on X. Consider $C(X) \subset \mathbb{R}^X$ as in Figure 1. In order to fix ideas we start with a pointwise bounded set $H \subset C(X)$ (in general we allow H to be a subset of $\mathbb{R}^X$ as in the figure): Tychonoff's theorem says that $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ is τ_p-compact. Therefore in order for H to be τ_p-relatively compact in $C(X)$ the only thing we must worry about is to have $\overline{H}^{\mathbb{R}^X} \subset C(X)$. Let $\hat{d}$ be the *worst* distance from $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ to $C(X)$. Since uniform limits of continuous functions are continuous functions, $\hat{d} = 0$ if, and only, if $\overline{H}^{\mathbb{R}^X} \subset C(X)$ if, and only if, H is τ_p-relatively compact in $C(X)$. In general $\hat{d} \geq 0$ gives us a measure of non τ_p-compactness for H relative to $C(X)$. Hence one question that naturally arises is:

(A) *are there useful estimates for $\hat{d}$ that are equivalent to qualitative properties of the sets H's?*

Here is a simplified case in the framework of (A) also pictured in Figure 1. Let H^c be the set of those elements in $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ that are cluster points of sequences in H (H^c is likely to be strictly smaller than $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$). If $\hat{\rho}$ is the *worst* distance from H^c to $C(X)$, the inclusion $H^c \subset \overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ clearly implies $\hat{\rho} \leq \hat{d}$. We will study the existence of a universal constant M such that for all pointwise bounded sets $H \subset \mathbb{R}^X$ we have that $\hat{d} \leq M\hat{\rho}$. In fact we study inequalities sharper than the previous one.

In [CMR06] Cascales, Marziscewski and Raja studied the distance $\hat{d}$ when X is a compact space. For this study they introduced the notion of ε-interchange of limits. This notion was first considered by Grothendieck in [Gro52], for $\varepsilon = 0$. For $\varepsilon \geq 0$, this concept has also been used, in the framework of Banach spaces in [AT90, FHMZ05, KP01] amongst others.

Definition 2.1.1 *Let (Z,d) be a metric space, X a set and $\varepsilon \geq 0$.*

(i) We say that a sequence $(f_m)_m$ in Z^X ε-interchanges limits with a sequence $(x_n)_n$ in X if

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) \leq \varepsilon$$

whenever all limits involved do exist.

(ii) We say that a subset H of Z^X ε-interchanges limits with a subset A of X, if each sequence in H ε-interchanges limits with each sequence in A. When $\varepsilon = 0$ we simply say that H interchanges limits with A.

We begin this chapter studying the tools developed in [CMR06] for compact spaces K. The proofs that we give here of the results from [CMR06] are different from the proofs given in the cited paper. If H is a subset of $C(K,Z)$ we denote

$$\gamma_K(H) := \sup\{\varepsilon > 0 : H\varepsilon\text{-interchanges limits with } K\}.$$

In terms of γ_K, if H is a uniformly bounded subset of $C(K)$ and K is compact, Corollary 2.6 in [CMR06] reads as

$$\hat{d}(H, C(K)) \leq \gamma_K(H) \leq 2\hat{d}(H, C(K)).$$

In the main result of [CMR06] the authors studied the relation between the distance $\hat{d}$ and the distance $\hat{d}$ when H is replaced by its convex hull $\operatorname{conv}(H)$: if K is a compact set and $H \subset \mathbb{R}^K$ is a uniformly bounded set, then

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 5\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

If $H \subset C(K)$ in the previous inequality constant 5 can be replaced by 2. For this inequality they used the ε-interchange of limits and some ideas from the proof of the Krein-Šmulian theorem in Kelley and Namioka's book [KN76, Chapter 5, Section 17]. The proof that we give here is original and it is based on the proof of Krein-Šmulian theorem due to Pták [Ptá63], using his combinatorial lemma together with the ε-interchange of limits notion as Fabian, Hájek, Montesinos and Zizler [FHMZ05] did for Banach spaces.

Next we introduce the notion below.

Definition 2.4.5 ([ACb]). *Let X be a topological space, let (Z,d) be a metric space and H a subset of Z^X, we define*

$$\operatorname{ck}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi), C(X,Z)),$$

where $\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi)$ denotes the set of all cluster points of the sequence φ in the product space Z^X.

By definition $\inf \emptyset = +\infty$ so if H is not relatively compact in H then $\operatorname{ck}(\emptyset) = +\infty$. The index $\operatorname{ck}(H)$ is smaller than the distance $\hat{\rho}$ that we included in Figure 1. Observe that if H is a τ_p-relatively countably compact subset of $C(X,Z)$ then $\operatorname{ck}(H) = 0$. The following result says something about the approximation of points in the τ_p-closure of H by sequences from H and about the quantitative difference between τ_p-compactness and τ_p-countable compactness of H relative to $C(K)$.

Corollary 2.4.9 ([ACb]). *Let K be a compact space and let H be a uniformly bounded subset of $C(K)$. Then*

$$\mathrm{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H). \tag{A}$$

If $f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$, there exists a sequence $(f_n)_n$ in H such that

$$\sup_{x\in K} |f(x) - g(x)| \leq 2\,\mathrm{ck}(H)$$

for all cluster point g of $(f_n)_n$ in $\mathbb{R}^K$.

In particular, if the uniformly bounded subset H is a τ_p-relatively countably compact set in $C(K)$ then, it is τ_p-relatively compact and each point in the τ_p-closure of H is the limit of a sequence of H. In fact the space $(C(K), \tau_p)$ is angelic. Therefore, Corollary 2.4.9 is the quantitative version of the angelicity of $(C(K), \tau_p)$ spaces. We provide the Example 2.4.10 that shows that constant 2 in inequality (A) is sharp.

In Section 2.5 we extend Corollary 2.4.9 to the case of spaces $C(X)$ where X is countably K-determined. By doing so we provide a quantitative version of the angelicity of these kind of spaces proven by Orihuela in [Ori87]. We use the following notation: if $\alpha = (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and if $n \in \mathbb{N}$, then $\alpha|n := (a_1, a_2, ..., a_n)$. Let Σ be a subset of $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and let $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ be a family of non-void subsets of the set X. Given $\alpha = (a_1, a_2, \dots) \in \Sigma$ and $n \in \mathbb{N}$ we write

$$C_{\alpha|n} = \bigcup \{A_\beta : \beta \in \Sigma \text{ and } \beta|n = \alpha|n\}.$$

As usual, for a given set $C \subset X$ and a sequence $(x_n)_n$ in X we say that $(x_n)_n$ is eventually in C if there is $m \in \mathbb{N}$ such that $x_n \in C$ for $n \geq m$. The following lemma is the main technical tool of Section 2.5.

Lemma 2.5.5 ([ACb]). *Let (Z,d) be a separable metric space, X a set and H a subset of the space (Z^X, τ_p) and $\varepsilon \geq 0$. We assume that:*

(i) there is $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and a family $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ of non-void subsets of X that covers X;

(ii) for every $\alpha = (a_1, a_2, \dots) \in \Sigma$ the set H ε-interchanges limits in Z with every sequence $(x_n)_n$ in X that is eventually in each set $C_{\alpha|m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Then for any $f \in \overline{H}^{Z^X}$ there exists a sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H such that

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

for any cluster point g of $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Z^X.

We use the lema to prove:

Theorem 2.5.6 and 2.5.7 ([ACb]). *Let X be countably K-determined space, (Z,d) a metric separable space and H a relatively compact subset of the space (Z^X, τ_p). Then*

$$\mathrm{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq 3\,\mathrm{ck}(H) + 2\hat{d}(H, C(X,Z)) \leq 5\,\mathrm{ck}(H).$$

If $f \in \overline{H}^{Z^X}$*, there exists a sequence* $(f_n)_n$ *in* H *such that*

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H) + 2\hat{d}(H, C(X,Z)) \leq 4\,\mathrm{ck}(H)$$

for each cluster point g *of* (f_n) *in* Z^X.

Note that if X and (Z,d) are as in previous result and $H \subset C(X,Z)$ is relatively compact in Z^X then the following conditions are equivalent:

(i) $\mathrm{ck}(H) = 0$,
(ii) *H is a τ_p-relatively countably compact subset of* $C(X,Z)$,
(iii) *H is a τ_p-relatively compact subset of* $C(X,Z)$.

Whereas (ii)⇒(i) is obvious and (ii)⇔(iii) was known [Ori87], the implication (i)⇒(ii) seems to require indeed the inequalities in Theorem 2.5.7.

Section 2.6 is devoted to studying other kinds of spaces X for which estimates as those that we have presented in the two previous sections can be proven. The main result of this section is the following one:

Corollary 2.6.4 ([ACb]). *Let X be a topological space, E a Banach space and H a τ_p-relatively compact subset of* E^X.

(i) *If X is a metric space, then*

$$\mathrm{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, C(X,E)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H).$$

(ii) *If X is a normal space with countable tightness and $E = \mathbb{R}$, then*

$$d(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) = \mathrm{ck}(H).$$

To finish this chapter, in Section 2.7 we obtain a quantitative version of the Mazur's theorem about the uniform approximation of a pointwise limit of a sequence continuous functions by elements of the convex hull of the sequence. We use this result in Chapter 4.

Theorem 2.7.1 ([ACN]). *Suppose that X is a countable compact space, $a > 0$ and $(f_n)_n \subset \mathbb{R}^X$ is a uniformly bounded sequence such that for each $x \in X$ there exists an n_x such that*

$$\text{if } n > n_x, \text{ then } |f_n(x) - f(x)| \leq a,$$

(i.e. $|f_n(x) - f(x)| \leq a$ eventually in n). Then for each $\varepsilon > 0$, there exists $g \in \mathrm{conv}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ such that

$$\|g - f\|_\infty < 2d + a + \varepsilon.$$

Chapter 3. Distance to Banach spaces

In Chapter 2, using the distances to spaces of continuous functions, we have studied how far a subset of $C(X,Z)$ is from being τ_p-relatively compact. For a Banach space E we can also use a similar argument: if H is a bounded subset of E and we consider the w^*-closure of H in E^{**} we can *measure* how far H is from being w-relatively compact using the distance

$$\mathrm{k}(H) = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E).$$

Observe that k is a measure of weak noncompactness, see Definition 3.3.1. Measures of noncompactness or weak noncompactness have been successfully applied in operator theory, differential equations and integral equations, see for instance [AT90, TBL97, Bla92, Fan06, Kry04, KP01] and [KPS00]. We deal here with the following non-negative functions defined on the family of bounded sets H of Banach spaces E, see Definitions 3.3.2, 3.3.10 and 3.3.12:

- ► $\gamma(H)$ is the worst distance between iterated limits for sequences in H and sequences in the dual unit ball B_{E^*},
- ► $\mathrm{ck}(H)$ is the *worst* distance to E of the sets of weak*-cluster points in the bidual E^{**} of sequences in H,
- ► $\omega(H)$ is the worst distance from H to weakly compact sets of E.

The function ω was introduced by de Blasi [Bla92] as a measure of weak noncompactness that can be regarded as the counterpart for the weak topology of the classical Hausdorff measure of norm noncompactness. The function γ already appeared in [AT90] and in [KP01]: in the latter the sup is taken over all the sequences in the convex hull $\mathrm{conv} H$ instead of sequences only in H; as we show in this chapter $\gamma(H) = \gamma(\mathrm{conv} H)$ which says that our definition for γ is equivalent to the one given in [KP01]. The index k has been used in [CMR06, FHMZ05, Gra06]. Whereas ω and γ are measures of weak noncompactness in the sense of the axiomatic definition given in [BM95] the function k fails to satisfy $\mathrm{k}(\mathrm{conv} H) = \mathrm{k}(H)$, that is one of the properties required in order to be a measure of weak noncompactness in the sense of [BM95]. Nonetheless, k as well as γ and ω does satisfy the condition $\mathrm{k}(H) = 0$ if, and only if, H is relatively weakly compact in E.

In Section 3.1 we prove a result of [CMR06] that says the results obtained in terms of distances for spaces of continuous functions over a compact set can be specialized to obtain the corresponding results in Banach spaces. As a consequence of this proposition, the main results of [FHMZ05] and [Gra06] follow directly from the results obtained in the previous chapter.

In Section 3.2 we study some type of Banach spaces E where each bounded set $H \subset E$ satisfies that

$$\mathrm{k}(\mathrm{conv} H) = \mathrm{k}(H).$$

This equality holds for Banach spaces with w^*-angelic dual ball (or more generally, Banach spaces that has property J [Gra06], see Definition 3.2.1) and Banach spaces whose dual space E^* does not contain an isomorphic copy of ℓ_1 [FHMZ05].

Section 3.3 is devoted to studying different relations between the measures of weak noncompactness k, ck, γ and ω. As a consequence of results in the previous chapter we prove:

Corollary 3.3.16 ([ACa]). *Let H be a bounded subset of a Banach space E. Then*

$$\operatorname{ck}(H) \leq \operatorname{k}(H) \leq \gamma(H) \leq 2\operatorname{ck}(H) \leq 2\operatorname{k}(H) \leq 2\omega(H). \tag{B}$$

$$\gamma(H) = \gamma(\operatorname{conv}(H)) \text{ and } \omega(H) = \omega(\operatorname{conv}(H)).$$

For any $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$, there is a sequence $(x_n)_n$ in H such that

$$\|x^{**} - y^{**}\| \leq \gamma(H)$$

for any cluster point y^{**} of $(x_n)_n$ in E^{**}.

We show using several examples that all constants involved in inequality (B) are sharp.

Recall that a Banach space E is said to have the Corson property $\mathfrak{C}$ if each collection of closed convex subsets of E with empty intersection has a countable subcollection with empty intersection. It is shown in [Pol80] that the Banach space E has the property $\mathfrak{C}$ if, and only if, whenever $A \subset E^*$ and $x^* \in \overline{A}^{w^*}$, there is a countable subset C of A such that $x^* \in \overline{\operatorname{conv} C}^{w^*}$. In particular Banach spaces with w^* angelic dual unit ball have Corson property $\mathfrak{C}$. To finish this section we prove that the equality $\operatorname{ck} = \operatorname{k}$ holds for the class of Banach spaces with Corson property $\mathfrak{C}$. The Example 2.4.10 shows us that the last equality does not hold in general.

Theorem 3.3.18 ([ACa]). *If E is a Banach space with Corson property $\mathfrak{C}$, then for every bounded set $H \subset E$ we have $\operatorname{ck}(H) = \operatorname{k}(H)$.*

In Section 3.4 we prove that for each bounded subset H of c_0, the following equalities holds:

$$\omega(H) = \gamma(H) = \operatorname{k}(H) = \operatorname{ck}(H),$$

see Corollary 3.4.3. The equality $\omega(H) = \gamma(H)$ follows from [KPS00, Theorem 2.9]: for completeness we include the proof of this theorem, see Theorem 3.4.2. The other equalities follow from the tools developed in this memoir.

Section 3.5 is devoted to studying the relationship between the different measures of weak noncompactness in $L_1(\mu)$ where μ is a finite measure. Apell and De Pascale proved that the measure of weak noncompactness of de Blasi ω can be computed using Rosenthal's modulus of uniform integrability.

Theorem 3.5.2 ([AP84]). *Let H be a bounded subset of $L_1(\mu)$. Then*

$$\omega(H) = \inf_{\delta>0} \sup\{\int_E |h| d\mu : h \in H, E \in \Sigma \; y \; \mu(E) \leq \delta\}.$$

Using this result, Kryczka and Prus proved in [KP01] that if H is a bounded subset of $L_1(\mu)$ then

$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\overline{\gamma}(H),$$

where

$$\overline{\gamma}(H) = \sup\{d(z, L_1(\mu)) : z \text{ is a cluster point of a sequence in } \operatorname{conv}(H)\}.$$

Using the tools developed in previous sections we obtain the following result.

Theorem 3.5.4. *Let H be a bounded subset of $L_1(\mu)$. Then*

$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\,\mathrm{ck}(H) = 2\,\mathrm{k}(H).$$

In Section 3.6 we prove a quantitative version of a Gantmacher theorem. The Hausdorff measure of norm noncompactness is defined for bounded sets H of Banach spaces E as

$$\mathrm{h}(H) := \inf\{\varepsilon > 0 : H \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_E \text{ and } K_\varepsilon \subset X \text{ is finite}\}.$$

A theorem of Schauder states that a continuous linear operator $T : E \to F$ is compact if, and only if, its adjoint operator $T^* : F^* \to E^*$ is compact. A quantitative strengthening of Schauder's result was proved by Goldenstein and Marcus (*cf.* [AT90, p. 367]) who established the inequalities

$$\frac{1}{2}\mathrm{h}(T(B_E)) \leq \mathrm{h}(T^*(B_{F^*})) \leq 2\mathrm{h}(T(B_E)). \tag{C}$$

For weak topologies Gantmacher established that the operator T is weakly compact if, and only if, T^* is weakly compact. Nonetheless, the corresponding quantitative version to (C) where h is replaced by ω fails for general Banach spaces ([AT90]). On the positive side we prove a quantitative version of Gantmacher result for γ.

Theorem 3.6.6 ([ACa]). *Let E and F be Banach spaces, $T : E \to F$ an operator and $T^* : F^* \to E^*$ its adjoint. Then*

$$\gamma(T(B_E)) \leq \gamma(T^*(B_{F^*})) \leq 2\gamma(T(B_E)).$$

From the last theorem we get the following corollary.

Corollary 3.6.8 ([AT90]). *The measures of weak noncompactness γ and ω are not equivalent.*

To finish this chapter, in Section 3.7 we give another application of the techniques we have developed here:

Theorem 3.7.1 ([ACa]). *Let K be a compact space and let H be a uniformly bounded subset of $C(K)$. Then we have*

$$\gamma_K(H) \leq \gamma(H) \leq 2\gamma_K(H).$$

Note that this result clearly implies that such an H is weakly compact if, and only if, H is a τ_p-compact and norm bounded (Grothendieck). Our proof does not use the Lebesgue Convergence theorem as the classical proof does: it is purely topological.

Chapter 4. Distance to spaces of Baire one functions

In this chapter we study the distances to spaces of Baire one function. Recall that a function $f : X \to Z$ is said to be a Baire one function if f is the pointwise limit of a sequence of continuous functions $(f_n)_n \in C(X,Z)$. If E is a Banach space, since uniform limits of Baire one functions are Baire one functions, Proposition 4.0.1, $f \in B_1(X,E)$ if, and only if, $d(f, B_1(X,E)) = 0$. So, as in the case of spaces of continuous functions, when we restrict ourselves to scalar-valued functions, a pointwise bounded set $H \subset B_1(X)$ is τ_p-relatively countably compact in $B_1(X)$ if and only $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)) = 0$. We start this chapter by giving an answer to the following question.

(A) *for which kind of topological spaces X and metric spaces Z can we theoretically compute $d(f, B_1(X,Z))$?*

For this we use the concept of fragmented and σ-fragmented maps. Recall that a function $f : X \to (Z,d)$ is said to be ε-fragmented for some $\varepsilon > 0$ if for each nonempty set $F \subset X$, there exists an open set $U \subset X$ such that $U \cap F \neq \emptyset$ and $\operatorname{diam}(f(U \cap F)) \leq \varepsilon$. The function f is ε-σ-fragmented by *closed sets* if there exists a closed countable cover $(X_n)_n$ of X such that $f|_{X_n}$ is ε-fragmented for each $n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.1.2 ([GS06] and [ACN]). *Let X be a topological space, (Z,d) a metric space and $f \in Z^X$ a function. We define:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{frag}(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : f \textit{ is } \varepsilon\textit{-fragmented}\}, \\ &\sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : f \textit{ is } \varepsilon\text{-}\sigma\textit{-fragmented by closed sets}\}, \end{aligned}$$

where by definition, $\inf \emptyset = +\infty$.

Obviously $\sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f) \leq \operatorname{frag}(f)$. We prove that if X is a hereditarily Baire space we have the equality $\sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f) = \operatorname{frag}(f)$, see Proposition 4.1.3. Our index $\sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f)$ can be used to compute distances.

Theorem 4.1.6 ([ACN]). *If X is a metric space, E a Banach space and if $f \in E^X$ then*

$$\frac{1}{2}\sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f) \leq d(f, B_1(X,E)) \leq \sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f).$$

In the case $E = \mathbb{R}$ we have the equality

$$d(f, B_1(X)) = \frac{1}{2}\sigma\text{-}\operatorname{frag}_{\mathrm{c}}(f).$$

In particular, if X is a complete metric space,

$$d(f, B_1(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{frag}(f).$$

This last equality extends [GS06, Proposition 6.4.], where the above equality is only proven for X Polish.

As in Chapter 2 we can study how far a set $H \subset B_1(X,E)$ is from being τ_p-relatively countably compact using

$$\operatorname{ck}_{B_1}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi), B_1(X,E)).$$

Using this index, in Section 4.2 we prove the following quantitative result about the difference between τ_p-relative compactness and τ_p-relative countable compactness with respect to $B_1(X,E)$.

Corollary 4.2.3 ([ACN]). *Let X be a Polish space, E a Banach space and H a τ_p-relatively compact subset of E^X. Then*

$$\mathrm{ck}_{B_1}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, B_1(X,E)) \leq 2\,\mathrm{ck}_{B_1}(H).$$

In the particular case when $E = \mathbb{R}$ we have

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)) = \mathrm{ck}_{B_1}(H).$$

In particular, under the assumptions of Corollary 4.2.3, H is τ_p-relatively countably compact if, and only if, H is τ_p-relatively compact (Rosenthal [Ros74]), so Corollary 4.2.3 strengthen this result of Rosenthal. Observe now, as we did in the case of spaces of continuous functions, that we get as a corollary that if $H \subset B_1(X,E)$ then the following conditions are equivalent:

(i) $\mathrm{ck}_{B_1}(H) = 0$,
(ii) *H is a relatively countably compact subset of* $(B_1(X,E),\tau_p)$,
(iii) *H is a relatively compact subset of* $(B_1(X,E),\tau_p)$.

The goal in Section 4.3 is to get a quantitative version of the Srivatsa's theorem [Sri93] that says that if K is a compact set and $f : X \to C(K)$ is a continuous function for the τ_p topology in $C(K)$, then f is a $\|\cdot\|_\infty$-Baire one function. Observe that $F : X \to (C(K),\tau_p)$ is continuous if, and only if, for each $k \in K$, $\pi_k \circ F$ is continuous where the function $\pi_k : C(K) \to \mathbb{R}$ is defined as $h \rightsquigarrow h(k)$. We also know by Theorem 1.1.9 that distances to spaces of continuous functions can be computed using oscillations. The question here is how far F is from being a Baire one function if we replace τ_p-continuity by bounded oscillation of $\pi_k \circ F$ for all $k \in K$. We prove the following:

Theorem 4.3.2 and Corollary 4.3.3 ([ACN]). *Let X be a metric space, K a compact space and $F : X \to \mathbb{R}^K$ a function. Then*

$$d(F, B_1(X, C(K))) \leq \frac{3}{2}\sup_{x\in X}\mathrm{osc}(F(x)) + 2\sup_{k\in K}\mathrm{osc}(\pi_k \circ F).$$

If E is a Banach space and $F : X \to E^{**}$ a function, then

$$d(F, B_1(X,E)) \leq \frac{3}{2}\sup_{x\in X}\mathrm{osc}(F(x)) + 2\sup_{x^*\in B_{E^*}}\mathrm{osc}(x^* \circ F),$$

where $F(x)$ is considered a function on (B_{E^*}, w^*).

This theorem can be used to prove a quantitative version of the Namioka's theorem about separate continuity and joint continuity. On the other hand, this quantitative version of Namioka's theorem can be proved under more general conditions and with better constants using topological games. We do so in Section 4.4 using σ-β-unfavorable spaces that are defined using topological games, see Definition 4.4.4. Examples of this kind of spaces are separable Baire spaces, locally compact spaces, complete metric spaces or more generally, countably Čech-complete spaces.

Theorem 4.4.6 ([ACN]). *Let $f : X \times K \to \mathbb{R}$ be a map, where X is a σ-β-unfavorable space and K is a compact space. Then there exists a G_δ dense subset D of X such that, for each $(y,k) \in D \times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 6 \sup_{x\in X} \operatorname{osc}(f_x) + 8 \sup_{k\in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

If X is also a normal space, the constant 8 can be replaced by 7, see Corollary 4.4.8. In this section we also use $\mathscr{G}(\Delta,L)$-α-favorable compact spaces. Examples of this kind of spaces are Valdivia compact spaces.

Corollary 4.4.14 ([ACN]). *Let X be a Baire space, let K be a $\mathscr{G}(\Delta,L)$-α-favorable compact space for some dense subset L of $K \times K$, and let $f : X \times K \to \mathbb{R}$ be a map. Then there exists a G_δ dense subset D of X such that, for each $(y,k) \in D \times K$ we have*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 7 \sup_{x\in X} \operatorname{osc}(f_x) + 6 \sup_{k\in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

If $L = K \times K$, the constant 7 can be replaced by 2 and the constant 6 can be replaced by 4, see Theorem 4.4.15.

We end the chapter with Section 4.5 and we prove the following quantitative version of a theorem of Rudin, see [Rud81].

Theorem 4.5.1. *Let (X,d) be a metric space, Y a topological space, E a normed space and $f : X \times Y \to E$ a function such that*

(i) $\operatorname{osc}(f^y) < \delta$ *for all* $y \in Y$.
(ii) $\operatorname{osc}(f_x) < \varepsilon$ *for all* $x \in D$ *where* $D \subset X$ *is a dense subset.*

Then there exist a sequence of functions $f_n : X \times Y \to E$ such that

(i) $\operatorname{osc}(f_n) < \varepsilon$ *for all* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) For each $(x,y) \in X \times Y$ there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that if $n > n_0$ then $\|f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$ (i.e. $\|f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$ eventually in n).

Theorem 4.5.1 can be used to prove a quantitative version of Srivatsa theorem, see Theorem 4.5.4. It was the first method we used, but the result obtained is worse than Theorem 4.3.1. Thus we have preferred to present the proof we have finally included.

Chapter 5. Multifunctions and distances to other spaces

In Section 4.3 we proved a quantitative version of the Srivatsa's theorem for single-valued maps. But as we have said at the beginning of this introduction, Srivatsa's theorem is more general: all set-valued maps from a metric space X into a Banach space E that are w-upper semicontinuous have a Baire one selector [Sri93].

The first goal in this chapter is to extend the Corollary 4.3.3 obtained in Section 4.3 to the framework of set-valued maps and consequently to provide a quantitative version of the above mentioned Srivatsa result for set-valued maps. For this, in Section 5.1 we introduce the notion of d-τ-semioscillation for a set-valued function $F : X \to \mathscr{P}(Y)$.

Definition 5.1.1 ([Ang]). *Let X be a topological space, let (Y,τ) be a topological space, d a metric in Y and $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ a set-valued map. We say that the map F has d-τ-semioscillation (τ-semioscillation if d is tacitly assumed) smaller than ε in $x \in X$ if for each τ-open subset $V \subset Y$ such that $\{z \in Y : d(z,F(x)) \leq \varepsilon\} \subset V$, there exists a neighborhood U of x in X such that $F(U) \subset V$. Then we denote*

$$d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = \inf\{\varepsilon > 0 : F \textit{ has } \tau\textit{-semioscillation in } x \textit{ smaller than } \varepsilon\}.$$

The d-τ-semioscillation is defined as

$$d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F) = \sup_{x\in X} \operatorname{osc}^*_\tau(F,x).$$

We denote $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F,x)$ and $\operatorname{osc}^*_\tau(F) = d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F)$ when d is tacitly assumed.

This notion has the following properties when d is stronger than τ:

(i) If F is a τ-upper semicontinuous map then the d-τ-semioscillation is 0.

(ii) If τ is a vector topology in a normed space and $F(x)$ is τ-compact for $x \in X$ then F is τ-upper semicontinuous if and only if, d-τ-semioscillation is 0, see Proposition 5.1.4.

(iii) If F is single-valued then F is continuous if and only if, d-τ-semioscillation is 0.

(iv) If F is single-valued and τ is the topology induced by the metric, then the d-τ-semioscillation is equal to the usual notion of semioscillation $\operatorname{osc}^*(F,x)$.

If F is single-valued and (Y,τ) is the bidual space of a Banach space with the w^* topology or a space of functions with the τ_p topology, the d-τ-semioscillation coincides with the supremum of the "pointwise semioscillations":

Proposition 5.1.7 ([Ang]). *Let X be a topological space, E a Banach space, E^{**} the bidual space of E and $f : X \to E^{**}$ a function. Then, for every $x \in X$*

$$\operatorname{osc}^*_{w^*}(f,x) = \sup_{y^*\in B_{E^*}} \operatorname{osc}^*(y^* \circ f, x).$$

Proposition 5.1.8 ([Ang]). *Let X be a topological space, $x \in X$, Y a set and $f : X \to \mathbb{R}^Y$ a function. Then*

$$\operatorname{osc}^*_{\tau_p}(f,x) = \sup_{y\in Y} \operatorname{osc}^*(\pi_y \circ f, x)$$

where the map $\pi_y : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}$ is given by $h \rightsquigarrow h(y)$.

It is well-known that if a set-valued map $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ from a first countable space into a topological space is upper semicontinuous whenever for each sequence $(x_n)_n$ that converges to some $x \in X$ if $z_n \in F(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap F(x) \neq \emptyset.$$

The following proposition gives a similar characterization for the τ-semioscillation.

Proposition 5.1.9 ([Ang]). *Let X be a first countable space, $x \in X$, (Y,τ) a topological space, d a metric on Y and $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ a set-valued map. Given $a \geq 0$ the following statements are equivalent:*

(i) *for each sequence $(x_n)_n$ that converges to $x \in X$, $z_n \in F(x_n)$ and $a' > a$*

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \{z \in Y : d(z, F(x)) \leq a'\} \neq \emptyset,$$

(ii) $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) \leq a$.

Using the notion of d-τ-semioscillation, in Section 5.2 we get the following quantitative version of Srivatsa theorem. $\operatorname{Sel}(F)$ denotes the set of selectors of the set-valued map F.

Theorem 5.2.2 ([Ang]). *Let X be a metric space, E a Banach space and E^{**} the bidual space. If $F : X \to \mathscr{P}(E^{**})$ is a set-valued map then*

$$d(\operatorname{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq \frac{3}{2}\sup\{\operatorname{osc} z : z \in F(X)\} + 2\operatorname{osc}^*_{w^*}(F)$$

where $z \in F(X) \subset E^{**}$ is considered a function on (B_{E^*}, w^*).

In the following Theorem, $\tau = \sigma(E,B)$ where $B \subset B_{E^*}$ is a boundary (i.e. for each $x \in E$ there exists $b \in B$ such that $x(b) = \|x\|$) and the $\sigma(X,B)$-relatively countably compact bounded sets are w-relatively compact. This happens for B the set of extreme points of the dual ball (see [BT80]), for any boundary B when $E = C(K)$ for some compact set K (see [CG98]) or for any boundary when (B_{E^*}, w^*) is angelic (see [CV95]).

Theorem 5.2.4 ([Ang]). *Let X be a metric space, let E be a Banach space and $\tau = \sigma(E,B)$ where $B \subset B_{E^*}$ is a boundary such that the $\sigma(X,B)$-relatively countably compact bounded sets are w-relatively compact. If $F : X \to \mathscr{P}(E)$ is a set-valued map then*

$$d(\operatorname{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\operatorname{osc}^*_\tau(F).$$

Theorem 5.2.2 tell us that if $F : X \to \mathscr{P}(E)$ is a map from a metric space into a Banach space such that $\operatorname{osc}^*_w(F) = 0$ or $\operatorname{osc}^*_{w^*}(F) = 0$ then

$$d(\operatorname{Sel}(F), B_1(X,E)) = 0;$$

we do not know if F has a Baire one selector. On the other hand, if F is w-upper semicontinuous then F has a Baire one selector. In Theorem 5.2.6 we prove that if F only satisfies that $\operatorname{osc}^*_w(F) = 0$ but requiring that F takes closed values then F has a Baire one selector.

Theorem 5.2.6 ([Ang]). *Let X be a metric space, E a Banach space and E^{**} the bidual space. Let $F : X \to \mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(E^{**})$ be a set-valued map with $\operatorname{osc}^*_{w^*}(F) = 0$. If $F(x)$ is closed for all $x \in X$, then F has a Baire one selector.*

Theorem 5.2.6 also holds when we consider topologies $\tau = \sigma(E,B)$ where $B \subset B_{E^*}$ is a boundary such that the $\sigma(X,B)$-relatively countably compact bounded sets are w-relatively compact.

Corollary 5.2.8 ([Ang]). *Let X be a metric space, let E be a Banach space and $\tau = \sigma(E,B)$ where $B \subset B_{E^*}$ is a boundary such that $\sigma(X,B)$-relatively countably compact bounded sets are w-relatively compact. Let $F : X \to \mathscr{P}(E)$ be a set-valued map such that $\operatorname{osc}^*_\tau(F) = 0$. If $F(x)$ is closed for all $x \in X$, then F has a Baire one selector.*

The dissertation concludes with Section 5.3 that is devoted to the study of distances to spaces of measurable functions $M(\mu,E)$ where E is a Banach space and (Ω,Σ,μ) is a probability space. The first objective of this section is to provide a formula to measure distances to spaces of measurable function. To this end we introduce the following definition.

Definition 5.3.2. *Given $f \in X^\Omega$, we define*

$$\operatorname{meas}(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : \textit{ for all } A \in \Sigma^+ \textit{ exists } B \in \Sigma^+_A \textit{ such that } \operatorname{osc}(f|_B) \leq \varepsilon\}.$$

We use the convention $\inf(\emptyset) = +\infty$.

It is known that $f \in M(\mu,E)$ if, and only if, $\operatorname{meas}(f) = 0$. We prove that in fact, distances to $M(\mu,E)$ can be computed using $\operatorname{meas}(f)$.

Theorem 5.3.3 ([ACR]). *Let $f \in E^\Omega$. Then:*

$$\frac{1}{2}\operatorname{meas}(f) \leq d(f,M(\mu,E)) \leq \operatorname{meas}(f).$$

Moreover, if $E = \mathbb{R}$, then

$$d(f,M(\mu,E)) = \frac{1}{2}\operatorname{meas}(f).$$

The rest of the section is devoted to the study of a quantitative version of Bourgain property. Bourgain property has been used as a very nice and powerful tool to study integration for Banach valued functions, see [RS85], [GGMS87], [CMV97] and [CR05]. If $f : \Omega \to E$ is a bounded function, the Bourgain property of the set

$$\{x^* \circ f : x^* \in B_{E^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$$

characterizes the Birkhoff integrability of f.

Definition 5.3.6. *Given $H \subset E^\Omega$, we define*

$$\mathscr{B}(H) = \inf\{\varepsilon > 0 : \textit{ for all } A \in \Sigma^+ \textit{ there exist } B_1,\ldots,B_n \in \Sigma^+_A \\ \textit{such that } \sup_{h\in H} \min_{1\leq 1\leq n} \operatorname{diam} f(B_i) \leq \varepsilon\}.$$

H has the Bourgain property if $\mathscr{B}(H) = 0$. Bourgain property has interesting properties that we can quantify. Bourgain proved that if $\mathscr{B}(H) = 0$ and $f \in \overline{H}^{\tau_p}$ then there exists a sequence $(f_n)_n$ in H that converges to f in μ-almost everywhere (see [RS85]). We obtain a quantitative version of this result:

Proposition 5.3.8 ([ACR]). *Let $H \subset E^\Omega$ and $g \in \overline{H}^{E^\Omega}$. There exists a sequence $(h_n)_n$ in H such that*

$$\limsup_{n\to\infty} \|h_n(x) - g(x)\| \leq 2 \cdot \mathscr{B}(H)$$

for μ-almost every point $x \in \Omega$.

If H is a uniformly bounded family then $\mathscr{B}(\mathrm{aconv}(H)) = 0$ when $\mathscr{B}(H) = 0$. On the other hand, it is not true in general for non-bounded families. The version that we get of this result is the following one that finish this section and the disertation.

Proposition 5.3.14 ([ACR]). *Let $H \subset \mathbb{R}^\Omega$ be a pointwise set. If $\mathscr{B}(\mathrm{aconv}(H)) < +\infty$, then*

$$\mathscr{B}(H) = \mathscr{B}(\mathrm{aconv}(H)).$$

Research papers

We finish this introduction with the summaries of the research papers that we have written with material included in this dissertation.

Title: The quantitative difference between countable compactness and compactness.
Authors: C. Angosto and B. Cascales.
Submitted.

Abstract: We establish here some inequalities between distances of pointwise bounded subsets H of $\mathbb{R}^X$ to the space of real-valued continuous functions $C(X)$ that allow us to examine the quantitative difference between (pointwise) countable compactness and compactness of H relative to $C(X)$. We prove, amongst other things, that if X is a countably K-determined space the *worst* distance of the pointwise closure $\overline{H}$ of H to $C(X)$ is at most 5 times the *worst* distance of the sets of cluster points of sequences in H to $C(X)$: here distance refers to the metric of uniform convergence in $\mathbb{R}^X$. We study the quantitative behavior of sequences in H approximating points in $\overline{H}$. As a particular case we obtain the results known about angelicity for these $C_p(X)$ spaces obtained by Orihuela. We indeed prove our results for spaces $C(X,Z)$ (hence for Banach-valued functions) and we give examples that show when our estimates are sharp.

Title: Measures of weak noncompactness in Banach spaces.
Authors: C. Angosto and B. Cascales.
To appear in Topology Appl.

Abstract: Measures of weak noncompactness are formulae that *quantify* different characterizations of weak compactness in Banach spaces: we deal here with De Blasi's measure ω and the measure of double limits γ inspired by Grothendieck's characterization of weak compactness. Moreover for bounded sets H of a Banach space E we consider the *worst* distance $\mathrm{k}(H)$ of the weak*-closure in the bidual $\overline{H}$ of

H to E and the *worst* distance $\mathrm{ck}(H)$ of the sets of weak*-cluster points in the bidual of sequences in H to E. We prove the inequalities

$$\mathrm{ck}(H) \overset{\text{(I)}}{\leq} \mathrm{k}(H) \leq \gamma(H) \overset{\text{(II)}}{\leq} 2\,\mathrm{ck}(H) \leq 2\,\mathrm{k}(H) \leq 2\omega(H)$$

which say that ck, k and γ are equivalent. If E has Corson property $\mathfrak{C}$ then (I) is always an equality but in general constant 2 in (II) is needed: we indeed provide an example for which $\mathrm{k}(H) = 2\,\mathrm{ck}(H)$. We obtain quantitative counterparts to Eberlein-Smulyan's and Gantmacher's theorems using γ. Since it is known that Gantmacher's theorem cannot be quantified using ω we therefore have another proof of the fact that γ and ω are not equivalent. We also offer a quantitative version of the classical Grothendieck's characterization of weak compactness in spaces $C(K)$ using γ.

Title: Distances to spaces of Baire one functions.
Authors: C. Angosto, B. Cascales and I. Namioka.
Submitted.

Abstract: Given a metric space X and a Banach space $(E,\|\cdot\|)$ we use an index of σ-fragmentability for maps $f \in E^X$ to estimate the distance of f to the space $B_1(X,E)$ of Baire one functions from X into $(E,\|\cdot\|)$. When X is Polish we use our estimations for these distances to give a quantitative version of the well known Rosenthal's result stating that in $B_1(X,\mathbb{R})$ the pointwise relatively countably compact sets are pointwise compact. We also obtain a quantitative version of a Srivatsa's result that states that whenever X is metric any weakly continuous function $f \in E^X$ belongs to $B_1(X,E)$: our result here says that for an arbitrary $f \in E^X$ we have

$$d(f, B_1(X,E)) \leq 2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \mathrm{osc}(x^* \circ f),$$

where $\mathrm{osc}(x^* \circ f)$ stands for the supremum of the oscillations of $x^* \circ f$ at all points $x \in X$. As a consequence of the above we prove that for functions in two variables $f : X \times K \to \mathbb{R}$, X complete metric and K compact, there exists a G_δ-dense set $D \subset X$ such that the oscillation of f at each $(x,k) \in D \times K$ is bounded by the oscillations of the *partial* functions f_x and f^k. A representative result in this direction, that we prove using games, is the following: if X is a σ-β-unfavorable space and K is a compact space, then there exists a dense G_δ-subset D of X such that, for each $(y,k) \in D \times K$,

$$\mathrm{osc}(f,(y,k)) \leq 6 \sup_{x \in X} \mathrm{osc}(f_x) + 8 \sup_{k \in K} \mathrm{osc}(f^k).$$

When the right hand side of the above inequality is zero we are dealing with separately continuous functions $f : X \times K \to \mathbb{R}$ and we obtain as a particular case some well-known results obtained by the third named author in the mid 1970's.

Title: Distances from selectors to spaces of Baire one functions.
Author: C. Angosto.
To appear in Topology Appl.

Abstract: Given a metric space X and a Banach space $(E, \|\cdot\|)$ we study distances from the set of selectors $\mathrm{Sel}(F)$ of a set-valued map $F : X \to \mathscr{P}(E)$ to the space $B_1(X,E)$ of Baire one functions from X into E. For this we introduce the d-τ-semioscillation of a set-valued map with values in a topological space (Y,τ) also endowed with a metric d. Being more precise we obtain that

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\,\mathrm{osc}^*_w(F)$$

where $\mathrm{osc}^*_w(F)$ is the $\|\cdot\|$-w-semioscillation of F. In particular when F takes closed values and $\mathrm{osc}^*_w(F) = 0$ we get that then F has a Baire one selector: we point out that if F is weakly upper semicontinuous then $\mathrm{osc}^*_w(F) = 0$ and therefore our results strengthen a Srivatsa selection Theorem when F takes closed set. We also obtain similar results when τ is the topology of convergence on some boundary B or τ is the w^* topology of a bidual Banach space.

Notation and terminology

Most of the notation and terminology is standard, otherwise it is either explained here or whenever it is needed. All topological spaces we consider are Hausdorff spaces. We denote by the symbols $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ the set of natural numbers and the set of real numbers respectively. Given a set X, $\mathscr{P}(X)$ denotes the set of all the subsets of X.

By letters $X, Y, \ldots$ we denote sets or topological spaces. We denote by (Z,d) a metric space (Z if d tacitly assumed). With Y^X we denote the set of all the the functions from X to Y. In particular, $X^{\mathbb{N}}$ is the set of sequences in X. We denote by $X^{(\mathbb{N})}$ the set of all the finite sequences of X. The domain of a arbitrary function f is denoted by $\mathrm{dom}(f)$. The space Y^X is equipped with the product topology τ_p. We also consider in the space Z^X the *standard supremum metric* that abusively is also denoted by d and that we allow to take the value $+\infty$, i.e.

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)) \quad \text{for} \quad f,g \in Z^X.$$

By $(E, \|\cdot\|)$ we denote a normed space (E if $\|\cdot\|$ is tacitly assumed). In E^X we consider the *supremum norm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\| \quad \text{for} \quad f \in E^X$$

that is allowed to take the value $+\infty$.

The (closed) unit ball of a normed space E is denoted by B_E. If x belongs to a metric space (Z,d) and $\varepsilon > 0$ we denote by $B_Z(x,\varepsilon)$ (or $B(x,\varepsilon)$ if we know the metric in the space Z) the closed ball of Z with center x and radius ε. If A, B are two subsets of the metric space Z and $x \in Z$ we denote

$$d(x,B) = \inf_{b\in B} d(x,b),$$

$$d(A,B) = \inf_{a\in A} d(a,B)$$

and

$$\hat{d}(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B).$$

The diameter of A is denoted by

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}.$$

If A is a subset of a topological space (X,τ), we denote by $\mathrm{int}A$ the interior of A and by $\overline{A}$ the closure of A in X. Sometimes, we put $\overline{A}^X$ to specify the topological space where the closure is taken or $\overline{A}^\tau$ to specify the topology we are using. If φ is a sequence of the topological space X we denote by $\mathrm{clust}_X(\varphi)$ the set of all the cluster points of φ in X. A subset $A \subset X$ is a $\mathscr{F}_\sigma$ set if A is a countable union of closed sets of X. A is a $\mathscr{G}_\delta$ set if A is the intersection of a countable family of open sets of X.

All vectorial spaces V that we consider here are real spaces. For sets $A,B\subset V$ and $r\in\mathbb{R}$, we put $A+B=\{a+b:\ a\in A,\ b\in B\}$ and $rA=\{ra:\ a\in A\}$. For each $S\subset V$, by the symbols $\mathrm{span}(S)$, $\mathrm{conv}(S)$ and $\mathrm{aco}(S)$ we denote the linear span of S, the convex hull of S and the absolute convex hull of S respectively, i.e.

$$\mathrm{conv}(S)=\Big\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i:\ x_i\in S,\ \lambda_i\in[0,1],\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\Big\}$$

and

$$\mathrm{aco}(S)=\Big\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i:\ x_i\in S,\ \lambda_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\leq 1\Big\}.$$

If E is a normed space, we denote its algebraic dual space (the set of all the real-valued lineal applications on E) by E' and its topological dual space (the subset of the algebraic dual of continuous and lineal functions) by E^*. We denote by w the weak topology of a normed space E and by w^* the weak star topology of a dual space E^*. If $B\subset E^*$ we denote by $\sigma(E,B)$ the topology of the pointwise convergence in B.

If Γ is a nonempty set we write

$$\ell_\infty(\Gamma)=\{f\in\mathbb{R}^\Gamma:\ \|f\|_\infty=\sup_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)|<+\infty\},$$

$$c_0(\Gamma)=\{f\in\ell_\infty(\Gamma):\ \text{the set}\{\gamma\in\Gamma:|f(\gamma)|>\varepsilon\}\text{ is finite for each }\varepsilon>0\}.$$

If $\Gamma=\mathbb{N}$ we denote $\ell_\infty(\mathbb{N})=\ell_\infty$ and $c_0(\mathbb{N})=c_0$.

If (Ω,Σ,μ) is a space of finite measure, the vectorial space of all the real-valued measurable and μ-integrable functions on Ω is denoted by $\mathscr{L}_1(\mu)$. The set $L_1(\mu)$ is the Banach space of the equivalent classes (f and g are equivalent if $f(\omega)=g(\omega)$ μ-a.e.) of the elements of $\mathscr{L}_1(\mu)$, with the norm $\|f\|_1=\int_\Omega|f|\,d\mu$.

The space of continuous maps from X to Y is denoted by $C(X,Y)$. As usual, $C(X)$ is the corresponding space of real-valued functions. Recall that a map $f:X\to Y$ is a Baire one function if it is equal to the pointwise limit of a sequence $(f_n)_n$ of $C(X,Y)$. The set of all the Baire one maps from X into Y is denoted by $B_1(X,Y)$ or by $B_1(X)$ if $Y=\mathbb{R}$.

Bibliography

[ACa] C. Angosto and B. Cascales, *Measures of weak noncompactness in banach spaces*, To appear in Topology Appl.

[ACb] ______, *The quantitative difference between countable compactness and compactness*, Submitted.

[ACN] C. Angosto, B. Cascales, and I. Namioka, *Distances to spaces of Baire one functions*, Submitted.

[ACR] C. Angosto, B. Cascales, and J. Rodriguez, *Distances to spaces of measurable functions*.

[Ang] C. Angosto, *Distances from selectors to spaces of baire one functions*, To appear in Topology Appl.

[AP84] J. Appell and E. De Pascale, *Su alcuni parametri connessi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili*, Boll. Un. Mat. Ital. **B 3** (1984), 497–515.

[Are52] Richard Arens, *Extension of functions on fully normal spaces*, Pacific J. Math. **2** (1952), 11–22. MR MR0049543 (14,191h)

[Ark92] A. V. Arkhangelʹskiĭ, *Topological function spaces*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 78, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992, Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. MR 92i:54022

[Ast80] Kari Astala, *On measures of noncompactness and ideal variations in Banach spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes (1980), no. 29, 42. MR MR575533 (83a:46027)

[AT90] K. Astala and H. O. Tylli, *Seminorms related to weak compactness and to Tauberian operators*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107** (1990), no. 2, 367–375. MR MR1027789 (91b:47016)

[BFT78] J. Bourgain, D. H. Fremlin, and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), no. 4, 845–886. MR 80b:54017

[BL00] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR 2001b:46001

[Bla92] F.S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in a banach space*, Colloq. Math. **65** (1992), 333–343.

[BM95] Józef Banaś and Antonio Martinón, *Measures of weak noncompactness in Banach sequence spaces*, Portugal. Math. **52** (1995), no. 2, 131–138. MR MR1342976 (96i:46010)

[Bou90] A. Bouziad, *Une classe d'espaces co-Namioka*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), no. 11, 779–782. MR MR1054296 (91e:54066)

[BT80] J. Bourgain and M. Talagrand, *Compacité extrémale*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), no. 1, 68–70. MR 81h:46011

[CG98] B. Cascales and G. Godefroy, *Angelicity and the boundary problem*, Mathematika **45** (1998), no. 1, 105–112. MR 99f:46019

[Cho69] G. Choquet, *Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory*, Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. MR 40 #3253

[Chr81] J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), no. 3, 455–461. MR MR612739 (82h:54012)

[CMR06] B. Cascales, W. Marciszewski, and M. Raja, *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), no. 13, 2303–2319. MR MR2238732

[CMV97] B. Cascales, G. Manjabacas, and G. Vera, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), no. 190, 161–167. MR 99c:46009

[CR05] B. Cascales and J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 259–279. MR MR2115456 (2006i:28006)

[CV95] B. Cascales and G. Vera, *Norming sets and compactness*, Rocky Mountain J. Math. **25** (1995), no. 3, 919–925. MR 96i:46011

[DG93] Robert Deville and Gilles Godefroy, *Some applications of projective resolutions of identity*, Proc. London Math. Soc. (3) **67** (1993), no. 1, 183–199. MR MR1218125 (94f:46018)

[Die84] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 85i:46020

[Din67] N. Dinculeanu, *Vector measures*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 95, Pergamon Press, Oxford, 1967. MR 34 #6011b

[DJ77] J. Diestel and J. J. Uhl Jr, *Vector measures*, Mathematical Surveys, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis. MR 56 #12216

[DS49] Jean Dieudonné and Laurent Schwartz, *La dualité dans les espaces F et (LF)*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **1** (1949), 61–101 (1950). MR MR0038553 (12,417d)

[Ebe47] W. F. Eberlein, *Weak compactness in Banach spaces. I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **33** (1947), 51–53. MR MR0021239 (9,42a)

[Eng77] R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. MR 58 #18316b

[Fan06] Ming Fan, *Lions-Schechter's methods of complex interpolation and some quantitative estimates*, J. Approx. Theory **140** (2006), no. 1, 46–60. MR MR2226676 (2007c:46021)

[FHH$^+$01] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 8, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 2002f:46001

[FHMZ05] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *A quantitative version of Krein's theorem*, Rev. Mat. Iberoamericana **21** (2005), no. 1, 237–248. MR MR2155020 (2006b:46011)

[Flo80] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001

[GGMS87] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **70** (1987), no. 378, iv+116. MR 89h:46024

[GHS04] A. S. Granero, P. Hájek, and V. Montesinos Santalucía, *Convexity and w^*-compactness in Banach spaces*, Math. Ann. **328** (2004), no. 4, 625–631. MR MR2047643 (2005c:46020)

[Gra06] Antonio S. Granero, *An extension of the Krein-Šmulian theorem*, Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 1, 93–110. MR MR2267314

[Gro52] A. Grothendieck, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math. **74** (1952), 168–186. MR 13,857e

[Gru84] G. Gruenhage, *Covering properties on $X^2\setminus\Delta$, W-sets, and compact subsets of Σ-products*, Topology Appl. **17** (1984), no. 3, 287–304. MR MR752278 (86e:54029)

[GS06] A. S. Granero and M. Sánchez, *Convexity, compactness and distances*, to appear in Methods in Banach spaces, Ed. Jesús M.F. Castillo and William R. Jonhson, Proceed. of the 3th Conference in Cáceres, Lecture Notes Series of the London Math. Soc., 2006.

[GS07a] ______, *The class of universally Krein-šmulian Banach spaces*, to appear in J. London Math. Soc., 2007.

[GS07b] ______, *Distances to convex sets*, to appear in Studia. Math., 2007.

[HJT85] R. W. Hansell, J. E. Jayne, and M. Talagrand, *First class selector for weakly upper semi-continuous multivalued maps in banach spaces*, J. Reine Angew. Math **361** (1985), 201–220.

[Jam74] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974. MR 57 #3828

[JOPV93] J. E. Jayne, J. Orihuela, A. J. Pallarés, and G. Vera, *σ-fragmentability of multivalued maps and selection theorems*, J. Funct. Anal. **117** (1993), no. 2, 243–273. MR 94m:46023

[Jun80] Heikki J. K. Junnila, *Three covering properties*, Surveys in general topology, Academic Press, New York, 1980, pp. 195–245. MR MR564103 (81e:54019)

[KN76] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 36, Springer-Verlag, New York, 1976, With the collaboration of W. F. Donoghue, Jr., Kenneth R. Lucas, B. J. Pettis, Ebbe Thue Poulsen, G. Baley Price, Wendy Robertson, W. R. Scott, and Kennan T. Smith, Second corrected printing. MR 52 #14890

[Köt69] G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750

[KP01] A. Kryczka and S. Prus, *Measure of weak noncompactness under complex interpolation*, Studia Math. **147** (2001), no. 1, 89–102. MR MR1853479 (2002h:46122)

[KPS00] A. Kryczka, S. Prus, and M. Szczepanik, *Measure of weak noncompactness and real interpolation of operators*, Bull. Austral. Math. Soc. **62** (2000), no. 3, 389–401. MR MR1799942 (2001i:46116)

[Kry04] Andrzej Kryczka, *Quantitative approach to weak noncompactness in the polygon interpolation method*, Bull. Austral. Math. Soc. **69** (2004), no. 1, 49–62. MR MR2040049 (2005a:46152)

[LT96] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. 1: Sequence spaces. 2. Function spaces. Repr. of the 1977 a. 1979 ed.*, Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. xx, 432 p. DM 59.00; öS 430.70; sFr 57.00 , 1996.

[Nam74] I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math. **51** (1974), 515–531. MR 51 #6693

[Ori87] J. Orihuela, *Pointwise compactness in spaces of continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 1, 143–152. MR 88f:46058

[Oxt57] John C. Oxtoby, *The Banach-Mazur game and Banach category theorem*, Contributions to the theory of games, vol. 3, Annals of Mathematics Studies, no. 39, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, pp. 159–163. MR MR0093741 (20 #264)

[Pol80] R. Pol, *On a question of H. H. Corson and some related problems*, Fund. Math. **109** (1980), no. 2, 143–154. MR 82a:46022

[Ptá63] Vlastimil Pták, *A combinatorial lemma on the existence of convex means and its application to weak compactness*, 437–450. MR MR0161128 (28 #4337)

[Ros74] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413. MR 50 #10773

[RS85] L. H. Riddle and E. Saab, *On functions that are universally Pettis integrable*, Illinois J. Math. **29** (1985), no. 3, 509–531. MR 86i:28012

[Rud57] Walter Rudin, *Continuous functions on compact spaces without perfect subsets*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 39–42. MR MR0085475 (19,46b)

[Rud81] W. Rudin, *Lebesgue's first theorem*, Mathematical analysis and applications, Part B, Adv. in Math. Suppl. Stud., vol. 7, Academic Press, New York, 1981, pp. 741–747. MR 82k:28006

[Sán07] M. Sánchez, *Compacidad, convexidad y distancias en espacios de Banach duales: extensiones del teorema de Krein-šmulian*, Ph.D. thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2007.

[Šmu40] V. Šmulian, *Über lineare topologische Räume*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. **7 (49)** (1940), 425–448. MR MR0002703 (2,102e)

[SR83] J. Saint-Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 3, 499–504. MR MR684646 (83m:54060)

[Sri93] V. V. Srivatsa, *Baire class* 1 *selectors for upper semicontinuous set-valued maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 2, 609–624. MR 93h:54013

[Tal79] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 407–438. MR 81a:46021

[TBL97] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides, and G. López, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 99, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. MR MR1483889 (99e:47070)

[Tod97] S. Todorčević, *Topics in topology*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1652, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR 98g:54002

[vD78] D. van Dulst, *Reflexive and superreflexive Banach spaces*, Mathematical Centre Tracts, vol. 102, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978. MR MR513590 (80d:46019)

Introducción

El marco general de trabajo de esta memoria es el *estudio de distancias a espacios de funciones* y sus aplicaciones al estudio de compacidad, espacios de Banach, funciones separadamente continuas, teoremas de selección, etc. Dadas funciones arbitrarias $f,g \in Z^X$ de un espacio topológico X a un espacio métrico (Z,d) la distancia que vamos a estudiar es *la métrica estándar del supremo* dada por

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

que puede tomar el valor $+\infty$. Si $\mathscr{F} \subset Z^X$ es algún espacio de funciones, consideraremos como es usual

$$d(f,\mathscr{F}) = \inf_{g\in\mathscr{F}} d(f,g) = \inf_{g\in\mathscr{F}} \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)).$$

Los espacios de funciones $\mathscr{F}$ que vamos a considerar son el espacio de funciones continuas $C(X,Z)$, el espacio de funciones de la primera clase de Baire $B_1(X,Z)$ y el espacio de funciones medibles $M(\mu,E)$ donde (Ω,Σ,μ) es un espacio de probabilidad. En el mismo contexto, si consideramos un espacio de Banach E y su espacio bidual E^{**} como subespacios de funciones sobre la bola dual B_{E^*}, la *métrica el supremo* coincide con la norma del espacio bidual.

Estudiamos versiones "cuantitativas" de varios resultados clásicos sobre compacidad y relacionados. A continuación exponemos parte de la historia detrás de esos resultados clásicos de los que daremos versiones cuantitativas. En 1940 Šmulian [Šmu40] mostró que los subconjuntos débilmente relativamente compactos de un espacio de Banach son débilmente relativamente sucesionalmente compactos. Además probó que si el espacio de Banach E tiene dual w^*-separable entonces un subconjunto H de E es débilmente relativamente numerablemente compacto sí, y sólo si, H es débilmente relativamente sucesionalmente compacto. Dieudonné y L. Schwartz [DS49] extendieron este último resultado a espacios localmente convexos con una topología más gruesa metrizable. La implicación recíproca del teorema de Šmulian fue obtenida por Eberlein [Ebe47] que probó que los conjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos para la topología débil de un espacio de Banach. Grothendieck generalizó estos resultados a espacios localmente convexos cuasicompletos para su topología de Mackey. Este resultado se basa en uno similar para espacios $(C(K),\tau_p)$ de funciones continuas sobre un espacio compacto K con la topología de la convergencia puntual. La noción de angelicidad de Fremlin y algunas de sus consecuencias se pueden usar para probar este resultado de una forma clara (véase [Flo80]). Orihuela

[Ori87] mostró en 1987 que los espacios $(C(X),\tau_p)$ con X numerablemente K-determinado (de hecho en algunos espacios más generales) son angélicos. De forma similar, para espacios $(B_1(X),\tau_p)$ de funciones de la primera clase de Baire con la topología de la convergencia puntual, Rosenthal mostró que los conjuntos relativamente numerablemente compactos y los conjuntos relativamente compactos son los mismos. Bourgain, Fremlin y Talagrand [BFT78] probaron que de hecho $(B_1(X),\tau_p)$ es angélico.

En un contexto diferente, Srivatsa [Sri93] probó en 1993 que si $F : X \to \mathscr{P}(E)$ es una aplicación multivaluada de un espacio métrico X a un espacio de Banach E que es superiormente semicontinua para la topología débil de E, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire, es decir, existe una función de la primera clase de Baire $f : X \to E$ tal que $f(x) \in F(x)$ para $x \in X$. En particular, si $f : X \to E$ es una función w-continua, entonces f es una función de la primera clase de Baire para la norma $\|\cdot\|$ de E. Este resultado también es cierto cuando reemplazamos (E,w) por $(C(K),\tau_p)$ para un espacio compacto K. De este resultado, se puede deducir el teorema clásico de Namioka [Nam74] sobre continuidad separada y continuidad conjunta: si X es un espacio métrico completo, K un espacio compacto y $f : X\times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua, entonces existe un conjunto G_δ denso $D \subset X$ tal que f es continua en cada $(x,k) \in D\times K$. Saint-Raymond [SR83] y Bouziad [Bou90] probaron algunas generalizaciones del teorema de Namioka.

COMO hemos dicho anteriormente, el objetivo de esta memoria es ofrecer, entre otras cosas, versiones cuantitativas de los resultados mencionados: para ello usamos distancias a espacios de funciones como hemos dicho al principio de esta introducción. Notemos que en los últimos años, varias versiones *cuantitativas* de resultados clásicos como los teoremas de Krein-Šmulian, Grothendieck, etc., han sido probadas. Estas nuevas versiones mejoran los teoremas originales y llevan a nuevos problemas y aplicaciones en topología y análisis: véase por ejemplo [CMR06, FHMZ05, Gra06, GHS04, GS06, GS07a]. Siguiendo esta línea, nuestros resultados ofrecen versiones cuantitativas de resultados de Orihuela, Gantmacher, Grothendieck, Rosenthal, Namioka, Saint-Raymond, Bouziad, etc.

Los resultados originales de esta memoria están contenidos en nuestros artículos [ACb], [ACa], [ACN], [Ang] y [ACR], el último todavía en preparación.

A continuación resumimos el contenido de este trabajo.

Capítulo 1. Preliminares

Este capítulo auxiliar está dedicado a mostrar algunos resultados conocidos que serán usados más adelante. En las dos primeras secciones, proporcionamos una fórmula para medir distancias a espacios de funciones continuas. En la Sección 1.1 probamos que las distancias a espacios de funciones continuas pueden ser calculadas usando oscilaciones de funciones de un espacio normal a $\mathbb{R}$. Este resultado es conocido para funciones acotadas, pero de hecho tal y como ponemos de manifiesto esta condición no es necesaria.

Teorema 1.1.9. *Sea X un espacio normal y sea $f \in \mathbb{R}^X$. Entonces*

$$d(f,C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$

De hecho, el Teorema 1.1.9 caracteriza los espacios normales.

Corolario 1.1.12. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes*

(i) X *es normal,*
(ii) *para toda función* $f \in \mathbb{R}^X$*, existe* $g \in C(X)$ *tal que* $d(f,g) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$*,*
(iii) *para toda función* $f \in \mathbb{R}^X$ *se tiene que* $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$*,*
(iv) *para toda función no continua* $f \in \mathbb{R}^X$ *se tiene que* $d(f, C(X)) < \operatorname{osc}(f)$*.*

En la Sección 1.2 estudiamos algunas propiedades de los espacios paracompactos. Además, si (Z,d) es un espacio métrico, podemos aproximar la distancia de una función $f \in Z^X$ a $C(X,Z)$ cuando X es paracompacto.

Teorema 1.2.19 ([CMR06]). *Sea X un espacio paracompacto y sea Z un subconjunto convexo de un espacio normado E. Entonces para cada aplicación $f : X \to Z$ tendremos*

$$\frac{1}{2}\operatorname{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z)) \leq \operatorname{osc}(f).$$

El resto del capítulo contiene varios resultados que serán útiles más adelante en el resto de esta memoria: separación de conjuntos convexos, principio de reflexividad local, lema de Pták y algunas propiedades sobre buenas particiones. Incluimos demostraciones para hacer este trabajo autocontenido.

Capítulo 2. Distancia a espacios de funciones continuas

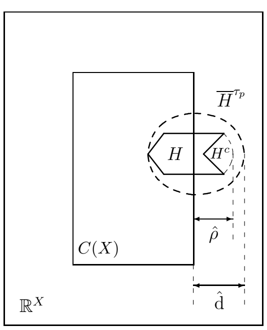


Figura 1

El tipo de problemas que vamos a estudiar en este capítulo están ilustrados en la Figura 1. Tomemos X un espacio topológico y sea $C(X)$ el espacio de las funciones continuas definidas en X que toman valores reales. Consideremos $C(X) \subset \mathbb{R}^X$ como en la figura. Para fijar ideas empezamos con un conjunto puntualmente acotado $H \subset C(X)$ (en general permitimos que H sea un subconjunto de $\mathbb{R}^X$ como en la figura): el teorema de Tychonoff nos dice que $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ es τ_p-compacto. Por lo tanto para saber si H es τ_p-relativamente compacto en $C(X)$ sólo tenemos que ver si se cumple que $\overline{H}^{\mathbb{R}^X} \subset C(X)$. Observemos que si $\hat{d}$ es la *peor* distancia $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ a $C(X)$, como los límites uniformes de funciones continuas son funciones continuas se tiene que $\hat{d} = 0$ si, y sólo si, $\overline{H}^{\mathbb{R}^X} \subset C(X)$, lo que ocurre si, y sólo si, H es τ_p-relativamente compacto en $C(X)$. En general $\hat{d} \geq 0$ es una medida de no τ_p-compacidad para H relativa a $C(X)$. Una pregunta que se nos plantea de forma natural es:

> (A) *¿existen estimaciones útiles de $\hat{d}$ que sean equivalentes a propiedades cualitativas de los conjuntos H?*

Mostramos ahora un ejemplo simple de (A) ilustrado en la Figura 1. Sea H^c el conjunto de los elementos de $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ que son puntos de aglomeración de sucesiones en H (H^c puede ser estrictamente más pequeño que $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$). Si $\hat{\rho}$ es la *peor* distancia de H^c a $C(X)$, la inclusión $H^c \subset \overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ claramente implica que $\hat{\rho} \leq \hat{d}$. Estudiamos la existencia de una constante universal M tal que para todo conjunto puntualmente acotado $H \subset \mathbb{R}^X$ tengamos que $\hat{d} \leq M\hat{\rho}$. De hecho estudiamos una desigualdad más fina que la previa.

En [CMR06] Cascales, Marziscewski y Raja estudiaron la distancia $\hat{d}$ cuando X es un espacio compacto. Para ello introdujeron la noción de ε-intercambio de límites. Esta noción fue primero considerada por Grothendieck en [Gro52] para $\varepsilon = 0$. Para $\varepsilon \geq 0$, este concepto ha sido también utilizado, en el campo de los espacios de Banach en [AT90, FHMZ05, KP01] entre otros.

Definición 2.1.1 *Sea (Z,d) un espacio métrico, X un conjunto y $\varepsilon \geq 0$.*

(i) Diremos que una sucesión $(f_m)_m$ en Z^X ε-intercambia límites con una sucesión $(x_n)_n$ en X si

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) \leq \varepsilon$$

cuando los límites involucrados existan.

(ii) Diremos que un subconjunto H de Z^X ε-intercambia límites con un subconjunto A de X, si toda sucesión en H ε-intercambia límites con cada sucesión en A. Cuando $\varepsilon = 0$ simplemente diremos que H intercambia límites con A.

Empezamos el capítulo estudiando las herramientas desarrolladas en [CMR06] para espacios compactos K. Las pruebas que damos aquí de los resultados de [CMR06] son diferentes de las dadas en dicho artículo. Si H es un subconjunto de $C(K,Z)$ denotamos

$$\gamma_K(H) := \sup\{\varepsilon > 0 : H \varepsilon\text{-intercambia límites con } K\}.$$

En estos términos, si H es un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$, el Corolario 2.6 de [CMR06] se puede leer como

$$\hat{d}(H, C(K)) \leq \gamma_K(H) \leq 2\hat{d}(H, C(K)).$$

En el principal resultado de [CMR06] los autores estudiaron la relación entre la distancia $\hat{d}$ y la distancia $\hat{d}$ cuando se reemplaza H por su envoltura convexa $\operatorname{conv}(H)$: si K es un conjunto compacto y $H \subset \mathbb{R}^K$ es un conjunto uniformemente acotado, entonces

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 5\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

Si $H \subset C(K)$, en la desigualdad anterior la constante 5 se puede reemplazar por un 2. Para ello, los autores usaron el ε-intercambio de límites y algunas ideas de la prueba del teorema de Krein-Šmulian que aparece en el libro de Kelley y Namioka [KN76, Chapter 5, Section 17]. La prueba que damos aquí es original y se basa en la prueba del teorema de Krein-Šmulian debida a [Ptá63], usando su lema combinatorio junto al ε-intercambio de límites como Fabian, Hájek, Montesinos y Zizler [FHMZ05] hicieron para espacios de Banach.

A continuación introducimos la siguiente noción.

Definición 2.4.5 ([ACb]). *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y $H \subset Z^X$, definimos*

$$\operatorname{ck}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi), C(X,Z)),$$

donde $\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi)$ *denota al conjunto de puntos de aglomeración de la sucesión φ en el espacio producto Z^X.*

Por definición $\inf \emptyset = +\infty$ así que si el conjunto H no es relativamente compacto en Z^X consideramos $\operatorname{ck}(H) = +\infty$. El índice $\operatorname{ck}(H)$ es menor que la distancia $\hat{\rho}$ que incluimos en la Figura 1. Obsérvese que si H es un subconjunto τ_p-relativamente numerablemente compacto de $C(X,Z)$ entonces $\operatorname{ck}(H) = 0$. El siguiente resultado nos habla de la aproximación de puntos de la τ_p-clausura de H por sucesiones de H y de la diferencia cuantitativa entre τ_p-compacidad y τ_p-compacidad numerable de H relativa a $C(K)$.

Corolario 2.4.9 ([ACb]). *Sea K un espacio compacto y H un subconjunto de $C(K)$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\operatorname{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\operatorname{ck}(H). \tag{A}$$

Si $f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$, entonces existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que

$$\sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| \leq 2\operatorname{ck}(H)$$

para todo punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}^K$.

En particular, si el conjunto uniformemente acotado H es τ_p-relativamente numerablemente compacto en $C(K)$ entonces H es τ_p-relativamente compacto y cada punto de la clausura puntual de H es el limite de una sucesión de H. De hecho, el espacio $(C(K),\tau_p)$ es angélico. Por lo tanto, el Corolario 2.4.9 es una versión cuantitativa de la angelicidad de los espacios $(C(K),\tau_p)$. Presentamos además el Ejemplo 2.4.10 que muestra que la constante 2 en la desigualdad (A) es óptima.

En la Sección 2.5 extendemos el Corolario 2.4.9 al caso de espacios $C(X)$ donde X es numerablemente K-determinado: así obtenemos una versión cuantitativa de la angelicidad de ese tipo de espacios probada por Orihuela en [Ori87]. Usamos la siguiente notación: si $\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha|n := (a_1, a_2, ..., a_n)$. Sea Σ un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ una familia de los subconjuntos no vacíos de X. Dado $\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ y $n \in \mathbb{N}$ denotamos

$$C_{\alpha|n} = \bigcup \{A_\beta : \beta \in \Sigma \text{ y } \beta|n = \alpha|n\}.$$

Como es normal, dado un conjunto $C \subset X$ y una sucesión $(x_n)_n$ en X diremos que $(x_n)_n$ está eventualmente en C si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in C$ para cada $n \geq m$. El siguiente lema es la principal herramienta técnica de la Sección 2.5.

Lema 2.5.5 ([ACb]). *Sea (Z,d) un espacio métrico separable, X un conjunto, H un subconjunto del espacio (Z^X,τ_p) y $\varepsilon \geq 0$. Supongamos que:*

(i) existe $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ de subconjuntos no vacíos de X que cubre X;
(ii) para cada $\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ el conjunto H ε-intercambia límites en Z con cada sucesión $(x_n)_n$ en X que está eventualmente en cada conjunto $C_{\alpha|m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Entonces para cada $f \in \overline{H}^{Z^X}$ existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

para cualquier punto de aglomeración g de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z^X.

Usamos el lema anterior para probar:

Teorema 2.5.6 y 2.5.7 ([ACb]). *Sea X un espacio numerablemente K-determinado, (Z,d) un espacio métrico separable y H un subconjunto relativamente compacto del espacio (Z^X,τ_p). Entonces*

$$\operatorname{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq 3\operatorname{ck}(H) + 2\hat{d}(H, C(X,Z)) \leq 5\operatorname{ck}(H).$$

Si $f \in \overline{H}^{Z^X}$ existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq 2\operatorname{ck}(H) + 2\hat{d}(H, C(X,Z)) \leq 4\operatorname{ck}(H)$$

para cualquier punto de aglomeración g de (f_n) en Z^X.

Obsérvese que si X y (Z,d) son como en el resultado previo y $H \subset C(X,Z)$ es relativamente compacto en Z^X, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\operatorname{ck}(H) = 0$,
(ii) H es un conjunto τ_p-relativamente numerablemente compacto de $C(X,Z)$,
(iii) H es un conjunto τ_p-relativamente compacto de $C(X,Z)$.

Mientras (ii)⇒(i) es obvio y (ii)⇔(iii) era conocido [Ori87], la implicación (i)⇒(ii) parece que requiere efectivamente las desigualdades del Teorema 2.5.7.

La Sección 2.6 está dedicada a estudiar otro tipo de espacios X para los que estimaciones del tipo que hemos presentado en la sección anterior pueden ser probadas. El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Corolario 2.6.4 ([ACb]). *Sea X un espacio topológico, sea E un espacio de Banach y sea H un subconjunto τ_p-relativamente compacto de E^X.*

(i) Si X es un espacio métrico, entonces

$$\operatorname{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, C(X,E)) \leq 2\operatorname{ck}(H).$$

(ii) Si X es normal con tightness *numerable y $E = \mathbb{R}$, entonces*

$$d(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) = \operatorname{ck}(H).$$

Para terminar este capítulo, en la Sección 2.7 obtenemos una versión cuantitativa del teorema de Mazur sobre aproximación uniforme de un limite puntual de funciones continuas por elementos de la envoltura convexa de dicha sucesión. Necesitaremos este resultado más adelante en el Capítulo 4.

Teorema 2.7.1 ([ACN]). *Sea X un espacio numerablemente compacto, $a > 0$ y $(f_n)_n \subset \mathbb{R}^X$ una sucesión uniformemente acotada tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq a$ eventualmente en n, es decir, para cada $x \in X$ existe n_x tal que*

$$\text{si } n > n_x, \text{ entonces } |f_n(x) - f(x)| \leq a.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $g \in \operatorname{conv}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\|g - f\|_\infty < 2d + a + \varepsilon.$$

Capítulo 3. Distancia a espacios de Banach

En el Capítulo 2, usando las distancias a espacios de funciones continuas, hemos estudiado cómo de lejos está un subconjunto de $C(X,Z)$ de ser τ_p-relativamente compacto. Para un espacio de Banach E podemos usar un argumento similar: si H es un subconjunto acotado de E y consideramos la w^*-clausura de H en X^{**} podemos *medir* cómo de lejos está H de ser w-relativamente compacto usando la distancia

$$\mathrm{k}(H) = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E).$$

Observemos que k es una medida de no compacidad débil, véase la Definición 3.3.1. Las medidas de no compacidad o de no compacidad débil han sido usadas con éxito en teoría de operadores, ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales, véase por ejemplo [AT90, TBL97, Bla92, Fan06, Kry04, KP01] y [KPS00]. Nos encontramos aquí con las siguientes funciones no negativas definidas sobre la familia de conjuntos acotados H de espacios de Banach E, véanse Definiciones 3.3.2, 3.3.10 y 3.3.12:

- $\gamma(H)$ es la peor distancia entre límites iterados de sucesiones en H y sucesiones en la bola unidad dual B_{E^*},
- $\mathrm{ck}(H)$ es la *peor* distancia a E de los conjuntos de puntos de w^*-aglomeración en el espacio bidual E^{**} de sucesiones en H,
- $\omega(H)$ es la peor distancia de H a conjuntos w-compactos de E.

La función ω fue introducida por de Blasi [Bla92] como una medida de no compacidad débil que puede ser considerada como contraparte para la topología débil de la clásica medida de Hausdorff de no compacidad. La función γ ya apareció en [AT90] y en [KP01]: en este último artículo, el sup se toma sobre todas las sucesiones en la envoltura convexa $\operatorname{conv} H$ en vez de sucesiones sólo en H. Como mostramos en este capítulo, $\gamma(H) = \gamma(\operatorname{conv} H)$ lo que nos dice que nuestra definición para γ es equivalente a la dada en [KP01]. El índice k ha sido usado en [CMR06, FHMZ05, Gra06]. Mientras ω y γ son medidas de no compacidad débil en el sentido de la definición axiomática dada en [BM95], la función k no cumple que $\mathrm{k}(\mathrm{conv}\, H) = \mathrm{k}(H)$, que es una de las propiedades requeridas para ser una medida de no compacidad débil en el sentido de [BM95]. Sin embargo, tanto k como γ y ω cumplen la condición $\mathrm{k}(H) = 0$ si, y sólo si, H es débilmente relativamente compacto en E.

En la Sección 3.1 probamos un resultado de [CMR06] que nos dice que los resultados obtenidos en términos de distancias para espacios de funciones continuas sobre conjuntos compactos pueden ser aplicados para obtener los resultados correspondientes en espacios de Banach. Como consecuencia de esta proposición, los principales resultados de [FHMZ05] y [Gra06] se obtienen directamente de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

En la Sección 3.2 estudiamos algunos tipos de espacios E donde cada conjunto acotado $H \subset E$ cumple que

$$\mathrm{k}(\mathrm{conv}\, H) = \mathrm{k}(H).$$

Esta igualdad se cumple para espacios de Banach con bola dual w^*-angélica (o más generalmente, espacios de Banach que tienen la propiedad J [Gra06], véase Definición 3.2.1) y espacios de Banach E tales que el espacio dual E^* no tiene una copia isomorfa de ℓ_1 [FHMZ05].

La Sección 3.3 está dedicada a estudiar las diferentes relaciones entre las medidas de no compacidad débil k, ck, γ y ω. Como consecuencia de los resultados del capítulo previo probamos:

Corolario 3.3.16 ([ACa]). *Sea H un subconjunto acotado de un espacio de Banach E. Entonces*

$$\mathrm{ck}(H) \leq \mathrm{k}(H) \leq \gamma(H) \leq 2\,\mathrm{ck}(H) \leq 2\,\mathrm{k}(H) \leq 2\omega(H). \tag{B}$$

$$\gamma(H) = \gamma(\mathrm{conv}(H)) \text{ y } \omega(H) = \omega(\mathrm{conv}(H)).$$

Además, para cada $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$, existe una sucesión $(x_n)_n$ en H tal que

$$\|x^{**} - y^{**}\| \leq \gamma(H)$$

para cada punto de aglomeración y^{**} de $(x_n)_n$ en E^{**}.

Mostramos mediante varios ejemplos que todas las constantes involucradas en la desigualdad (B) son óptimas.

Recordemos que se dice que un espacio de Banach E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson si cada colección de subconjuntos cerrados convexos de E con intersección vacía tiene una subcolección numerable con intersección vacía. En [Pol80] se demuestra que el espacio de Banach E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ si, y sólo si, cuando $A \subset E^*$ y $x^* \in \overline{A}^{w^*}$, existe un conjunto numerable C de A tal que $x^* \in \overline{\mathrm{conv}\, C}^{w^*}$. En particular, los espacios de Banach con bola unidad dual w^*-angélica tienen la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson. Para terminar esta sección probamos que la desigualdad $\mathrm{ck} = \mathrm{k}$ se da para la clase de los espacios de Banach con la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson. El Ejemplo 2.4.10 sirve para ver que dicha igualdad no se da en general.

Teorema 3.3.18 ([ACa]). *Si E es un espacio de Banach con la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson, entonces para cada conjunto acotado $H \subset E$ tenemos que* $\mathrm{ck}(H) = \mathrm{k}(H)$.

En la Sección 3.4 probamos que para cada conjunto acotado H de c_0, se tiene que

$$\omega(H) = \gamma(H) = \mathrm{k}(H) = \mathrm{ck}(H),$$

véase el Corolario 3.4.3. La desigualdad $\omega(H) = \gamma(H)$ se tiene en [KPS00, Theorem 2.9]: para una mejor compresión incluimos la prueba, véase el Teorema 3.4.2. Las otras igualdades se obtienen de las herramientas desarrolladas en este trabajo.

La Sección 3.5 está dedicada a estudiar la relación entre las medidas de no compacidad débil en $L_1(\mu)$ donde μ es una medida finita. Apell y De Pascale probaron que la medida de no compacidad débil de De Blasi ω se puede calcular usando el módulo de integrabilidad uniforme de Rosenthal.

Teorema 3.5.2 ([AP84]). *Sea H un subconjunto acotado de $L_1(\mu)$. Entonces*

$$\omega(H) = \inf_{\delta>0} \sup\{\int_E |h| d\mu : h \in H, E \in \Sigma \text{ y } \mu(E) \leq \delta\}.$$

Usando este resultado, Kryczka y Prus probaron en [KP01] que si H es un subconjunto acotado de $L_1(\mu)$ entonces

$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\overline{\gamma}(H),$$

donde

$$\overline{\gamma}(H) = \sup\{d(z, L_1(\mu)) : z \text{ es un punto de aglomeración de una sucesión en } \mathrm{conv}(H)\}.$$

Usando las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.5.4. *Sea H un subconjunto acotado de $L_1(\mu)$. Entonces*

$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\,\mathrm{ck}(H) = 2\,\mathrm{k}(H).$$

En la Sección 3.6 probamos una versión cuantitativa del teorema de Gantmacher. La medida de Hausdorff de no compacidad en norma está definida para conjuntos acotados H de espacios de Banach E como

$$\mathrm{h}(H) := \inf\{\varepsilon > 0 : H \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_E \text{ y } K_\varepsilon \subset X \text{ es finita}\}.$$

Un teorema de Schauder dice que un operador lineal y continuo $T : E \to F$ es compacto si, y sólo si, su operador adjunto $T^* : F^* \to E^*$ lo es. Una mejora cuantitativa de este resultado fue probada por Goldenstein y Marcus (*cf.* [AT90, p. 367]) estableciendo las desigualdades

$$\frac{1}{2}\mathrm{h}(T(B_E)) \leq \mathrm{h}(T^*(B_{F^*})) \leq 2\mathrm{h}(T(B_E)). \tag{C}$$

Para topologías débiles, Gantmacher demostró que el operador T es débilmente compacto si, y sólo si, lo es su operador adjunto T^*. Sin embargo la correspondiente versión de (C) reemplazando h por ω no se puede demostrar en general ([AT90]). Por otro lado nosotros probamos una versión cuantitativa del teorema de Gantmacher en términos de la medida de γ.

Teorema 3.6.6 ([ACa]). *Sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach. Entonces*

$$\gamma(T(B_E)) \leq \gamma(T^*(B_{F^*})) \leq 2\gamma(T(B_E)).$$

De este último teorema se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.6.8 ([AT90]). *Las medidas de no compacidad débil γ y ω no son equivalentes.*

Para terminar este capítulo, en la Sección 3.7 damos otra aplicación de las técnicas desarrolladas aquí:

Teorema 3.7.1 ([ACa]). *Sea K un espacio compacto y sea H un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Entones*

$$\gamma_K(H) \leq \gamma(H) \leq 2\gamma_K(H).$$

Observemos que este resultado claramente implica que tal conjunto H es débilmente compacto si, y sólo si, H es τ_p-compacto y acotado en norma (Grothendieck). Nuestra prueba no usa el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tal como se hace en la prueba clásica: es puramente topológica.

Capítulo 4. Distancia a espacios de funciones de la primera clase de Baire

En este capítulo estudiamos distancias a espacios de funciones de la primera clase de Baire. Recordemos que una función $f : X \to Z$ es de la primera clase de Baire si f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas $(f_n)_n \in C(X,Z)$. Si E es un espacio de Banach tenemos que los límites uniformes de funciones de la primera clase de Baire son de la primera clase de Baire, Proposición 4.0.1, y por lo tanto, $f \in B_1(X,E)$ si, y sólo si, $d(f,B_1(X,E)) = 0$. Así que, como en el caso de espacios de funciones continuas, cuando nos restringimos al caso de funciones con valores reales, un conjunto puntualmente acotado $H \subset B_1(X)$ es τ_p-relativamente compacto en $B_1(X)$ si, y sólo si, $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)) = 0$. Empezamos el capítulo dando una respuesta a la siguiente cuestión.

(A) *¿para qué tipo de espacios topológicos X y espacios métricos Z podemos calcular $d(f,B_1(X,Z))$?*

Para ello usamos el concepto de aplicaciones fragmentadas y σ-fragmentadas. Recordemos que una función $f : X \to (Z,d)$ se dice que es ε-fragmentada para algún $\varepsilon > 0$ si para cada conjunto no vacío $F \subset X$, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $U \cap F \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(f(U \cap F)) \leq \varepsilon$. La función f es ε-σ-fragmentada por *conjuntos cerrados* si existe un cubrimiento cerrado numerable $(X_n)_n$ de X tal que $f|_{X_n}$ es ε-fragmentada para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.1.2 ([GS06] y [ACN]). *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y $f \in Z^X$ una función. Definimos:*

$$\operatorname{frag}(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : f \textit{ es } \varepsilon\textit{-fragmentado}\},$$
$$\sigma\text{-}\operatorname{frag}_c(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : f \textit{ es } \varepsilon\text{-}\sigma\textit{-fragmentado por conjuntos cerrados}\},$$

donde por definición, $\inf\emptyset = +\infty$.

Obviamente $\sigma\text{-frag}_c(f) \leq \text{frag}(f)$. Si X es un espacio hereditariamente de Baire probamos que se tiene la igualdad $\sigma\text{-frag}_c(f) = \text{frag}(f)$, véase la Proposición 4.1.3. Podemos usar $\sigma\text{-frag}_c(f)$ para calcular distancias.

Teorema 4.1.6 ([ACN]). *Si X es un espacio perfectamente paracompacto, E un espacio de Banach y $f \in E^X$ entonces*

$$\frac{1}{2}\,\sigma\text{-frag}_c(f) \leq d(f, B_1(X,E)) \leq \sigma\text{-frag}_c(f).$$

En el caso $E = \mathbb{R}$ tenemos la igualdad

$$d(f, B_1(X)) = \frac{1}{2}\,\sigma\text{-frag}_c(f).$$

En particular, si X es un espacio métrico completo,

$$d(f, B_1(X)) = \frac{1}{2}\,\text{frag}(f).$$

Esta última igualdad extiende [GS06, Proposition 6.4.], donde está probada sólo para espacios X polacos.

Como en el Capítulo 2 podemos estudiar cómo de lejos está un conjunto $H \subset B_1(X,E)$ de ser τ_p-relativamente numerablemente compacto utilizando el índice

$$\text{ck}_{B_1}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\text{clust}_{Z^X}(\varphi), B_1(X,E)).$$

Usando este índice, en la Sección 4.2 probamos la siguiente resultado cuantitativo sobre la diferencia cuantitativa entre compacidad y compacidad numerable relativa en $(B_1(X,E), \tau_p)$.

Corolario 4.2.3 ([ACN]). *Sea X un espacio polaco, E un espacio de Banach y H un subconjunto τ_p-relativamente compacto de E^X. Entonces*

$$\text{ck}_{B_1}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, B_1(X,E)) \leq 2\,\text{ck}_{B_1}(H).$$

En el caso particular $E = \mathbb{R}$, tendremos

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)) = \text{ck}_{B_1}(H).$$

En particular, bajo las hipótesis del Corolario 4.2.3, H es τ_p-relativamente numerablemente compacto si, y sólo si, es τ_p-relativamente compacto (Rosenthal [Ros74]): así el Corolario 4.2.3 mejora este resultado de Rosenthal. Obsérvese ahora que como hicimos en el caso de funciones continuas, obtenemos como corolario que si $H \subset B_1(X,E)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathrm{ck}_{B_1}(H) = 0$,
(ii) H es un conjunto relativamente numerablemente compacto de $(B_1(X,E),\tau_p)$,
(iii) H es un conjunto relativamente compacto de $(B_1(X,E),\tau_p)$.

El objetivo de la Sección 4.3 es obtener una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa [Sri93] que dice que si K es un espacio compacto y $f : X \to C(K)$ es una función continua para la topología τ_p en $C(K)$, entonces f es una función de la primera clase de Baire para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(K)$. Obsérvese que $F : X \to (C(K),\tau_p)$ es continua si, y sólo si, para cada $k \in K$, $\pi_k \circ F$ es continua donde la función $\pi_k : C(K) \to \mathbb{R}$ está definida como $h \rightsquigarrow h(k)$. Por otro lado, por el Teorema 1.1.9 sabemos que las distancias a espacios de funciones continuas pueden calcularse mediante oscilaciones. La cuestión ahora es saber cómo de lejos está F de ser una aplicación de la primera clase de Baire si reemplazamos τ_p-continuidad por las oscilaciones acotadas de $\pi_k \circ F$ para todo $k \in K$.

Teorema 4.3.2 y Corolario 4.3.3 ([ACN]). *Sea X un espacio métrico, K un espacio compacto y $F : X \to \mathbb{R}^K$ una función. Entonces*

$$d(F, B_1(X, C(K))) \leq \frac{3}{2}\sup_{x\in X}\operatorname{osc}(F(x)) + 2\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(\pi_k \circ F).$$

Si E es un espacio de Banach y $F : X \to E^{**}$ a una función, entonces

$$d(F, B_1(X,E)) \leq \frac{3}{2}\sup_{x\in X}\operatorname{osc}(F(x)) + 2\sup_{x^*\in B_{E^*}}\operatorname{osc}(x^*\circ F),$$

donde consideramos $F(x)$ como una función en (B_{E^*}, w^*).

Este teorema se puede usar para probar una versión cuantitativa del teorema de Namioka sobre continuidad separada y continuidad conjunta. Por otro lado, esta versión cuantitativa del teorema de Namioka se puede probar también bajo condiciones más generales y obteniendo mejores constantes usando juegos topológicos. Esto es lo que hacemos en la Sección 4.4 usando espacios σ-β-desfavorables, véase la Definición 4.4.4. Ejemplos de este tipo de espacio son los espacios de Baire separables, espacios localmente compactos, espacios métricos completos, o de forma más general, espacios numerablemente Čech-completos.

Teorema 4.4.6 ([ACN]). *Sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación, donde X es un espacio σ-β-desfavorable y K es un espacio compacto. Entonces existe un conjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k) \in D \times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 6\sup_{x\in X}\operatorname{osc}(f_x) + 8\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(f^k).$$

Si X es además normal, podemos reemplazar la constante 8 por un 7, véase el Corolario 4.4.8. En esta sección también utilizamos espacios compactos $\mathscr{G}(\Delta,L)$-α-favorables. Ejemplos de este tipo de espacios son los compactos de Valdivia.

Corolario 4.4.14 ([ACN]). *Sea X un espacio de Baire, sea K un espacio compacto $\mathscr{G}(\Delta,L)$-α-favorable para algún subconjunto denso L de $K \times K$, y sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k) \in D \times K$ se tiene que*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 7\sup_{x\in X}\operatorname{osc}(f_x) + 6\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(f^k).$$

Si $L = K \times K$, podemos reemplazar la constante 7 por un 2 y la constante 6 por un 4, véase el Teorema 4.4.15.

Terminamos este capítulo con la Sección 4.5 donde probamos la siguiente versión cuantitativa del teorema de Rudin, véase [Rud81].

Teorema 4.5.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, Y un espacio topológico, E un espacio normado $f : X \times Y \to E$ una función tal que*

(i) $\operatorname{osc}(f^y) < \delta$ *para todo* $y \in Y$.
(ii) $\operatorname{osc}(f_x) < \varepsilon$ *para todo* $x \in D$ *con* $D \subset X$ *denso.*

Entonces existe una sucesión de funciones $f_n : X \times Y \to E$ *tales que*

(i) $\operatorname{osc}(f_n) < \varepsilon$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) *Para todo* $(x,y) \in X \times Y$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > n_0$ *entonces* $\|f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$ *(es decir,* $\|f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$ *eventualmente en n).*

El Teorema 4.5.1 se puede usar para probar una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa, véase el Teorema 4.5.4. De hecho este fue el primer método que usamos para hacer esto, pero de tal forma, el resultado que se obtiene es peor que el obtenido en el Teorema 4.3.1. Por ello hemos preferido presentar la prueba finalmente incluida.

Capítulo 5. Multifunciones y distancias a otros espacios

En la Sección 4.3 hemos probado una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa para aplicaciones univaluadas, pero como comentamos al principio de esta introducción, el teorema de Srivatsa es más general: todas las multifunciones de un espacio métrico X en un espacio de Banach E w-superiormente semicontinuas tienen un selector de la primera clase de Baire [Sri93].

El primer objetivo de este capítulo es extender el Corolario 4.3.3 obtenido en la Sección 4.3 en el campo de las multifunciones y por lo tanto obtener una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa para multifunciones. Para ello, en la Sección 5.1 introducimos la noción de d-τ-semioscilación para multifunciones $F : X \to \mathscr{P}(Y)$.

Definición 5.1.1 ([Ang]). *Sean X e (Y,τ) espacios topológicos, sea d una métrica en Y y sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Decimos que F tiene d-τ-semioscilación (τ-semioscilación si se sobrentiende quien es d) menor que ε en $x \in X$ si para cada subconjunto τ-abierto $V \subset Y$ tal que*

$$\{z \in Y : d(z, F(x)) \leq \varepsilon\} \subset V,$$

existe un entorno U de x en X tal que $F(U) \subset V$. Denotamos entonces

$$d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = \operatorname{ínf}\{\varepsilon > 0 : F \text{ tiene } \tau\text{-semioscilación en } x \text{ menor que } \varepsilon\}.$$

La d-τ-semioscilación de F se define como

$$d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F) = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}^*_\tau(F,x).$$

Denotamos simplemente $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F,x)$ *y* $\operatorname{osc}^*_\tau(F) = d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F)$ *cuando se sobrentienda quién es* d.

Esta noción tiene las siguientes propiedades cuando la topología asociada a d es más fuerte que τ:

(i) *Si F es una multifunción τ-superiormente semicontinua entonces su d-τ-semioscilación es 0.*
(ii) *Si τ es una topología vectorial en un espacio normado y $F(x)$ es τ-compacto para $x \in X$, entonces F es τ-superiormente semicontinua si, y sólo si, su d-τ-semioscilación vale 0, véase la Proposición 5.1.4.*
(iii) *Si F es univaluada, entonces F es continua si, y sólo si, la d-τ-semioscilación es 0.*
(iv) *Si F es univaluada y τ es la topología inducida por la métrica, entonces la d-τ-semioscilación coincide con la noción usual de semioscilación* $\operatorname{osc}^*(F,x)$.

Si F una función univaluada e (Y,τ) es el espacio bidual de un espacio de Banach con la topología w^* o es un espacio de funciones continuas con la topología τ_p, la d-τ-semioscilación coincide con el supremo de las "semioscilaciones puntuales":

Proposición 5.1.7 ([Ang]). *Sea X un espacio topológico, E un espacio de Banach, E^{**} el bidual de E y $f : X \to E^{**}$ una función. Entonces, para cada $x \in X$*

$$\operatorname{osc}^*_{w^*}(f,x) = \sup_{y^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}^*(y^* \circ f, x).$$

Proposición 5.1.8 ([Ang]). *Sea X un espacio topológico, $x \in X$, Y un conjunto y $f : X \to \mathbb{R}^Y$ una función. Entonces*

$$\operatorname{osc}^*_{\tau_p}(f,x) = \sup_{y \in Y} \operatorname{osc}^*(\pi_y \circ f, x) \tag{0.1}$$

donde la aplicación $\pi_y : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}$ está definida por $h \rightsquigarrow h(y)$.

Es bien conocido que si X cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es superiormente semicontinua cuando para cada sucesión $(x_n)_n$ que converge a algún $x \in X$ si $z_n \in F(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap F(x) \neq \emptyset.$$

La siguiente proposición da una caracterización similar para la τ-semioscilación.

Proposición 5.1.9 ([Ang]). *Sea X un espacio que cumple el primera axioma de numerabilidad, $x \in X$, (Y,τ) un espacio topológico, d una métrica en Y y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Dado $a \geq 0$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *para cada sucesión $(x_n)_n$ convergente a $x \in X$, $z_n \in F(x_n)$ y $a' > a$*

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \{z \in Y : d(z, F(x)) \leq a'\} \neq \emptyset,$$

(ii) $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) \leq a$.

Usando la noción de d-τ-semioscilación, en la Sección 5.2 obtenemos la siguiente versión cuantitativa del teorema de Srivatsa. Por $\mathrm{Sel}(F)$ denotamos el conjunto de selectores de F.

Teorema 5.2.2 ([Ang]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y E^{**} su espacio bidual. Si $F : X \to \mathscr{P}(E^{**})$ es una multifunción entonces*

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq \frac{3}{2} \sup\{\mathrm{osc} z : z \in F(X)\} + 2\,\mathrm{osc}^*_{w^*}(F)$$

donde se está considerando $z \in F(X) \subset E^{**}$ como una función en (B_{E^*}, w^*).

En el siguiente teorema, $\tau = \sigma(E,B)$ donde $B \subset B_{E^*}$ es una frontera (es decir, para cada $x \in E$ existe $b \in B$ tal que $x(b) = \|x\|$) tal que los conjuntos $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos. Esto ocurre cuando B es el conjunto de los puntos extremos de la bola dual (véase [BT80]), para cualquier frontera B cuando $E = C(K)$ para algún conjunto compacto K (véase [CG98]) o para cualquier frontera cuando (B_{E^*}, w^*) es angélico (véase [CV95]).

Teorema 5.2.4 ([Ang]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y $\tau = \sigma(E,B)$ donde $B \subset B_{E^*}$ es una frontera tal que los conjuntos acotados $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos. Si $F : X \to \mathscr{P}(E)$ es una multifunción entonces*

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\,\mathrm{osc}^*_{\tau}(F).$$

El Teorema 5.2.2 nos dice que si $F : X \to \mathscr{P}(E)$ es una aplicación de un espacio métrico en un espacio de Banach tal que $\mathrm{osc}^*_w(F) = 0$ u $\mathrm{osc}^*_{w^*}(F) = 0$ entonces

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) = 0;$$

sin embargo no sabemos si F tiene un selector de la primera clase de Baire. Por otro lado, si F es w-superiormente semicontinua, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire. En el Teorema 5.2.6 probamos que si F sólo cumple que $\mathrm{osc}^*_w(F) = 0$ pero añadimos que F tome valores cerrados, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire.

Teorema 5.2.6 ([Ang]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y E^{**} su espacio bidual. Sea $F : X \to \mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(E^{**})$ una multifunción con $\mathrm{osc}^*_{w^*}(F) = 0$. Si $F(x)$ es cerrado para todo $x \in X$, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire.*

El Teorema 5.2.6 sigue siendo válido cuando consideramos topologías $\tau = \sigma(E,B)$ donde $B \subset B_{E^*}$ es una frontera tal que los conjuntos $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos.

Corolario 5.2.8 ([Ang]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach $\tau = \sigma(E,B)$ donde $B \subset B_{E^*}$ es una frontera tal que los conjuntos acotados $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos. Sea $F : X \to \mathscr{P}(E)$ una multifunción con $\mathrm{osc}^*_{\tau}(F) = 0$. Si $F(x)$ es cerrado para todo $x \in X$, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire.*

Esta memoria concluye con la Sección 5.3 que está dedicada al estudio de espacios de funciones medibles $M(\mu, E)$ donde E es un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad.

El primer objetivo en esta sección es obtener una fórmula para medir distancias a espacios de funciones medibles. Para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 5.3.2. *Dada $f \in E^{\Omega}$ definimos*

$$\operatorname{meas}(f) := \operatorname{ínf}\{\varepsilon > 0 : \text{ para todo } A \in \Sigma^{+} \text{ existe } B \in \Sigma_{A}^{+} \text{ tal que } \operatorname{diam} f(B) \leq \varepsilon\},$$

donde por definición $\operatorname{ínf} \emptyset = +\infty$.

Es conocido que $f \in M(\mu, E)$ si, y sólo si, $\operatorname{meas}(f) = 0$. Probamos que de hecho la distancia a $M(\mu, E)$ puede calcularse con $\operatorname{meas}(f)$.

Teorema 5.3.3. *Sea $f \in E^{\Omega}$. Entonces:*

$$\frac{1}{2}\operatorname{meas}(f) \leq d(f, M(\mu, E)) \leq \operatorname{meas}(f).$$

Además, si $E = \mathbb{R}$, entonces

$$d(f, M(\mu, E)) = \frac{1}{2}\operatorname{meas}(f).$$

El resto de la sección está dedicada al estudio de una versión cuantitativa de la propiedad de Bourgain. La propiedad de Bourgain ha sido usada como una herramienta potente en el estudio de la integración de funciones con valores en un espacio de Banach, véase [RS85], [GGMS87], [CMV97] y [CR05]: por ejemplo, si $f : \Omega \to E$ es una función acotada, la propiedad de Bourgain del conjunto

$$\{x^{*} \circ f : x^{*} \in B_{E^{*}}\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$$

caracteriza la integrabilidad de Birkhoff de f.

Definición 5.3.6. *Sea $H \subset \mathbb{R}^{\Omega}$, se define*

$$\mathscr{B}(H) = \operatorname{ínf}\{\varepsilon > 0 : \text{ para todo } A \in \Sigma^{+} \text{ existen } B_{1}, \ldots, B_{n} \in \Sigma_{A}^{+}$$
$$\text{tales que } \sup_{h \in H} \min_{1 \leq 1 \leq n} \operatorname{diam} f(B_{i}) \leq \varepsilon\},$$

donde consideramos que $\operatorname{ínf} \emptyset = +\infty$.

H tiene la propiedad de Bourgain cuando $\mathscr{B}(H) = 0$. La propiedad de Bourgain tiene propiedades interesantes que vamos a cuantificar en esta sección. Bourgain probó que si $\mathscr{B}(H) = 0$ y $f \in \overline{H}^{\tau_{p}}$ entonces existe una sucesión $(f_{n})_{n}$ en H convergente a f en μ-casi todo punto (véase [RS85]). Obtenemos una versión cuantitativa de dicho resultado:

Proposición 5.3.8. *Sea $H \subset E^{\Omega}$ y $g \in \overline{H}^{E^{\Omega}}$. Entonces existe una sucesión $(h_{n})_{n}$ en H tal que*

$$\limsup_{n \to \infty} \|h_{n}(x) - g(x)\| \leq 2 \cdot \mathscr{B}(H)$$

para μ-casi todo punto $x \in \Omega$.

Si H es una familia uniformemente acotada entonces $\mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)) = 0$ cuando $\mathscr{B}(H) = 0$. Por otro lado, esto no es cierto en general para familias no acotadas. La versión que obtenemos aquí, y que cierra la sección y la tesis, es

Proposición 5.3.14. *Sea $H \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ puntualmente acotado. Si $\mathscr{B}(\mathrm{aconv}(H)) < +\infty$, entonces*

$$\mathscr{B}(H) = \mathscr{B}(\mathrm{aconv}(H)).$$

Artículos

Terminamos la introducción con los resúmenes de los artículos que hemos escrito con material incluido en esta tesis.

Título: The quantitative difference between countable compactness and compactness.
Autores: C. Angosto y B. Cascales.
Enviado.

Abstract: Establecemos aquí algunas desigualdades entre distancias de conjuntos puntualmente acotados H de $\mathbb{R}^X$ al espacio de funciones reales $C(X)$ que nos permiten examinar la diferencia cuantitativa entre la compacidad numerable (puntual) y la compacidad de H relativa a $C(X)$. Probamos, entre otras cosas, que si X es un espacio numerablemente K-determinado, la *peor* distancia de la clausura puntual $\overline{H}$ de H a $C(X)$ es como mucho 5 veces la *peor* distancia del conjunto de puntos de aglomeración de sucesiones en H a $C(X)$: aquí con distancia nos referimos a la métrica de la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^X$. Estudiamos el comportamiento cuantitativo de sucesiones en H aproximando puntos en $\overline{H}$. Como caso particular obtenemos los resultados conocidos sobre angelicidad de estos espacios $C_p(X)$ obtenidos por Orihuela. Efectivamente probamos nuestros resultados para espacios $C(X,Z)$ (y por lo tanto para funciones con valores en un Banach) y damos ejemplos que muestran cuando nuestras estimaciones son óptimas.

Título: Measures of weak noncompactness in Banach spaces.
Autores: C. Angosto y B. Cascales.
Aparecerá en Topology Appl.

Abstract: Las medidas de no compacidad débil son fórmulas que *cuantifican* diferentes caracterizaciones de la compacidad débil en espacios de Banach: usamos aquí la medida de De Blasi ω y la medida del límite doble γ inspirada por la caracterización de Grothendieck de la compacidad débil. Además, para conjuntos acotados H de un espacio de Banach E consideramos la *peor* distancia $\mathrm{k}(H)$ de la débil*-clausura en el bidual $\overline{H}$ de H a E y la *peor* distancia $\mathrm{ck}(H)$ de los conjuntos de los puntos de débil*-aglomeración en el bidual de sucesiones en H a E. Probamos las desigualdades

$$\mathrm{ck}(H) \overset{\text{(I)}}{\leq} \mathrm{k}(H) \leq \gamma(H) \overset{\text{(II)}}{\leq} 2\,\mathrm{ck}(H) \leq 2\,\mathrm{k}(H) \leq 2\omega(H)$$

que dicen que ck, k y γ son equivalentes. Si E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson entonces (I) es siempre una igualdad pero en general la constante 2 en (II) es necesaria: presentamos un ejemplo para el cual $\mathrm{k}(H) = 2\,\mathrm{ck}(H)$. Obtenemos contrapartes cuantitativas a los teoremas de Eberlein-Smulyan y Gantmacher usando γ. Como es conocido que el teorema de Gantmacher no puede ser cuantificado usando ω, tenemos otra prueba de que γ y ω no son equivalentes. Además ofrecemos una versión cuantitativa de la caracterización clásica de Grothendieck de la compacidad débil en espacios $C(K)$ usando γ.

Título: Distances to spaces of Baire one functions.
Autores: C. Angosto, B. Cascales e I. Namioka.
Enviado.

Abstract: Dado un espacio métrico X y un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ usamos un índice de σ-fragmentabilidad para aplicaciones $f \in E^X$ para estimar la distancia de f al espacio $B_1(X,E)$ de funciones de la primera clase de Baire de X a $(E, \|\cdot\|)$. Cuando X es polaco usamos nuestras estimaciones de esas distancias para dar una versión cuantitativa del bien conocido resultado de Roshental que dice que en $B_1(X,\mathbb{R})$ los conjuntos puntualmente relativamente compactos son relativamente compactos. Además obtenemos una versión cuantitativa del resultado de Srivatsa que afirma que cuando X es métrico, cualquier función débil continua $f \in E^X$ pertenece a $B_1(X,E)$: nuestro resultado aquí dice que para una función arbitraria $f \in E^X$ tenemos que

$$d(f, B_1(X,E)) \leq 2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}(x^* \circ f),$$

donde $\operatorname{osc}(x^* \circ f)$ es el supremo de las oscilaciones de $x^* \circ f$ para todos los puntos $x \in X$. Como consecuencia de lo anterior probamos que para funciones en dos variables $f : X \times K \to \mathbb{R}$, con X métrico completo y K compacto, existe un conjunto G_δ denso $D \subset X$ tal que la oscilación de f en cada $(x,k) \in D \times K$ está acotada por la oscilación de las funciones *parciales* f_x y f^k. Un resultado representativo en esta dirección, que probamos usando juegos topológicos, es el siguiente: si X es un espacio σ-β-desfavorable y K es un espacio compacto, existe un conjunto G_δ denso D de X tal que, para cada $(y,k) \in D \times K$,

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 6 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 8 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

Cuando el lado derecho de la desigualdad anterior es cero estamos trabajando con funciones separadamente continuas $f : X \times K \to \mathbb{R}$ y obtenemos como caso particular algunos resultados bien conocidos obtenidos por el tercer autor a mediados de los setenta.

Título: Distances from selectors to spaces of Baire one functions.
Autor: C. Angosto.

Aparecerá en Topology Appl.

Abstract: Dado un espacio métrico X y un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ estudiamos distancias del conjunto de selectores $\mathrm{Sel}(F)$ de una multifunción $F : X \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ al espacio $B_1(X,E)$ de funciones de la primera clase de Baire de X a E. Para ello introducimos la d-τ-semioscilación de una multifunción con valores en un espacio topológico (Y, τ) dotado además de una métrica d. Siendo más precisos obtenemos que

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\,\mathrm{osc}_w^*(F)$$

donde $\mathrm{osc}_w^*(F)$ es la $\|\cdot\|$-w-semioscilación de F. En particular cuando F toma valores cerrados y $\mathrm{osc}_w^*(F) = 0$ obtenemos que entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire: observamos que si F es débilmente superiormente semicontinua entonces $\mathrm{osc}_w^*(F) = 0$ y por lo tanto nuestro resultado mejora un Teorema de selección de Srivatsa cuando F toma valores cerrados. Además obtenemos resultados similares cuando τ es la topología de convergencia sobre algunas fronteras B o τ es la topología w^* del bidual de un espacio de Banach.

Notación y terminología

La terminología empleada a lo largo de este trabajo es estándar, en otro caso está explicada aquí o cuando sea necesaria. Todos los espacios topológicos que se consideren serán Hausdorff. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ denotan el conjunto de los números naturales (enteros positivos) y el conjunto de los números reales respectivamente. Dado un conjunto X, el símbolo $\mathscr{P}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X.

Por las letras $X, Y, \ldots$ denotamos conjuntos o espacios topológicos. Denotamos por (Z,d) a un espacio métrico (o Z si d está asumida). Escribimos Y^X para denotar el conjunto de todas las funciones definidas en X con valores en Y. En particular $X^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de sucesiones en X. Denotamos por $X^{(\mathbb{N})}$ al conjunto de las sucesiones finitas en X. El dominio de una función arbitraria f se representa como $\mathrm{dom}(f)$. El espacio Y^X está dotado de la topología producto τ_p. En el espacio Z^X consideramos la *métrica estándar del supremo* que también denotamos por d y que permitimos que tome el valor $+\infty$, es decir,

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)) \quad \text{para} \quad f,g \in Z^X.$$

Denotamos por $(E, \|\cdot\|)$ a un espacio de normado (E cuando $\|\cdot\|$ está asumida). En E^X denotamos la *norma del supremo* como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\| \quad \text{para} \quad f \in E^X$$

que también permitiremos que tome el valor $+\infty$.

La bola unidad (cerrada) de un espacio normado E se denota por B_E. Si x es un elemento de un espacio métrico (Z,d) y $\varepsilon > 0$ denotamos por $B_Z(x,\varepsilon)$ (o simplemente $B(x,\varepsilon)$ cuando esté claro en qué espacio métrico estamos) a la bola cerrada de Z de centro x y radio ε. Si A,B son dos subconjuntos del espacio métrico Z y $x \in Z$ denotamos

$$d(x,B) = \inf_{b\in B} d(x,b),$$

$$d(A,B) = \inf_{a\in A} d(a,B)$$

y

$$\hat{d}(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B).$$

El diámetro de A se denota como

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}.$$

Si A es un subconjunto de un espacio topológico (X,τ), denotamos por $\mathrm{int} A$ el interior de A y por $\overline{A}$ la clausura de A en X. En ocasiones, para evitar confusiones especificamos el espacio topológico sobre el que se toma clausura con $\overline{A}^X$ o la topología con $\overline{A}^\tau$. Si φ es una sucesión del espacio topológico X denotamos por $\mathrm{clust}_X(\varphi)$ al conjunto de los puntos de aglomeración de φ en X. Se dice que $A \subset X$ es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ si se puede poner como una unión numerable de cerrados de X. Se dice que A es un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ si A es una intersección numerable de conjuntos abiertos de X.

Todos los espacios vectoriales V considerados en esta memoria son reales. Dados dos conjuntos $A, B \subset V$ y $r \in \mathbb{R}$, escribimos $A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$ y $rA = \{ra : \ a \in A\}$. Para cada $S \subset V$, utilizamos los símbolos $\mathrm{span}(S)$, $\mathrm{conv}(S)$ y $\mathrm{aco}(S)$ para denotar, respectivamente, el subespacio vectorial de V generado por S, la envoltura convexa de S y la envoltura absolutamente convexa de S; es decir,

$$\mathrm{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ x_i \in S, \ \lambda_i \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

y

$$\mathrm{aco}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ x_i \in S, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Si E es un espacio normado, denotamos su dual algebraico (el conjunto de las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{R}$) como E' y su dual topológico (el subconjunto del dual algebraico de aplicaciones lineales y continuas) por E^*. Denotamos por w la topología débil de un espacio normado E y por w^* la topología débil estrella de un espacio dual E^*. Si $B \subset E^*$ denotamos por $\sigma(E, B)$ a la topología de la convergencia puntual en B.

Sea Γ un conjunto no vacío. Escribimos

$$\ell_\infty(\Gamma) = \{ f \in \mathbb{R}^\Gamma : \ \|f\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)| < +\infty \},$$

$$c_0(\Gamma) = \{ f \in \ell_\infty(\Gamma) : \ \text{el conjunto } \{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ es finito para cada } \varepsilon > 0 \}.$$

Cuando $\Gamma = \mathbb{N}$ se denota simplemente $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty$ y $c_0(\mathbb{N}) = c_0$.

Dado un espacio de medida finito (Ω, Σ, μ), el espacio vectorial de todas las funciones reales medibles y μ-integrables definidas en Ω se denota por $\mathscr{L}_1(\mu)$. Escribimos $L_1(\mu)$ para representar el espacio de Banach formado por todas las clases de equivalencia (obtenidas identificando funciones que coinciden μ-a.e.) de elementos de $\mathscr{L}_1(\mu)$, con la norma $\|f\|_1 = \int_\Omega |f| \, d\mu$.

El conjunto de las funciones continuas del espacio topológico X en el espacio topológico Y se denota por $C(X,Y)$. Como es normal, $C(X)$ es el correspondiente espacio de funciones continuas con valores reales. Recordemos que una aplicación $f : X \to Y$ es de la primera clase de Baire si es el límite puntual de una sucesión $(f_n)_n$ de $C(X,Y)$. El conjunto de aplicaciones de la primera clase de Baire de X en Y se denota por $B_1(X,Y)$ o por $B_1(X)$ cuando $Y = \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

ESTE capítulo auxiliar está dedicado a mostrar algunos resultados preliminares que serán usados más adelante. En las dos primeras secciones, proporcionamos una fórmula para medir distancias a espacios de funciones continuas. El resto del capítulo contiene varios resultados que serán útiles más adelante: separación de conjuntos convexos, principio de reflexividad local, lema de Pták y algunas propiedades sobre buenas particiones. Incluimos algunas demostraciones para hacer este trabajo autocontenido: algunos resultados son técnicos y laboriosos y las referencias difíciles de encontrar.

1.1 Oscilación y distancia a espacios de funciones continuas en espacios normales

En esta sección estudiamos cómo medir la distancia de una función $f \in \mathbb{R}^X$ al espacio de funciones continuas $C(X)$ con X un espacio normal, véase Teorema 1.1.9. Nótese que este resultado aparece en [BL00, Proposition 1.18] con demostración para espacios paracompactos cuando f es acotada . En la página 23 de [BL00] se comenta la validez del Teorema 1.1.9 para espacios normales. Esta sección está dedicada a proporcionar de forma autocontenida una demostración de este hecho comprobando además que la hipótesis de que f sea acotada no es necesaria. Recordemos la definición de espacio normal.

Definición 1.1.1. *Un espacio topológico X se dice que es regular si para todo conjunto cerrado $A \subset X$ y para todo $x \in X$ existen dos conjuntos abiertos disjuntos $U, V \subset X$ con $A \subset U$ y $x \in V$. Se dice que X es normal si para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos $A, B \subset X$, existen dos conjuntos abiertos y disjuntos $U, V \subset X$ con $A \subset U$, $B \subset V$.*

Los espacios normales están caracterizados por el siguiente Teorema.

Teorema 1.1.2 (Lema de Urysohn, véase [Eng77, Theorem 1.5.11])**.** *Sea X un espacio topológico. X es un espacio normal si, y sólo si, para cada par de subconjuntos A y B de X cerrados y disjuntos existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$.*

Definición 1.1.3. *Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es superiormente semicontinua si para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos que la antiimagen de $[t, +\infty)$ mediante f es un cerrado de X.*

Obsérvese que una función es superiormente semicontinua si, y sólo si, el subgrafo

$$\mathrm{S}(f) := \big\{(x,t) : f(x) \geq t\big\}$$

es cerrado en $X \times \mathbb{R}$, véase la figura 1.1

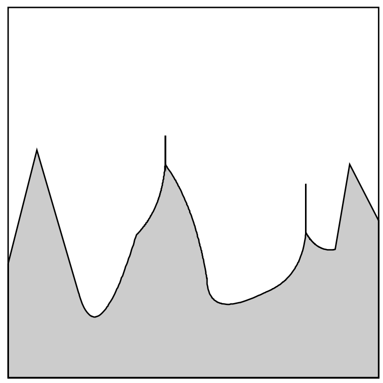


Figura 1.1: Función superiormente semicontinua: subgrafo

Definición 1.1.4. *Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es inferiormente semicontinua si $-f$ es superiormente semicontinua, es decir, si para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple que la antiimagen de $(-\infty, t]$ es un cerrado de X.*

Equivalentemente, f es inferiormente semicontinua si el epigrafo

$$\mathrm{U}(f) := \big\{(x, t) : f(x) \leq t\big\}$$

es cerrado en $X \times \mathbb{R}$, véase la figura 1.2.

Si f y g son dos funciones superiormente semicontinuas (resp. inferiormente semicontinuas), entonces su suma $f + g$ es una función superiormente semicontinua (resp. inferiormente semicontinua). Más en general, si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones superiormente semicontinuas (resp. inferiormente semicontinuas) de forma que la serie $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X, entonces f es superiormente semicontinua (resp. inferiormente semicontinua). Además, si $\{f_i : i \in I\}$ es una familia de funciones superiormente semicontinuas (resp. inferiormente semicontinuas) se tiene que la función $f(x) := \operatorname{ínf}\{f_i(x) : i \in I\}$ es superiormente semicontinua (resp. la función $f(x) := \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ es inferiormente semicontinua). Si I es finito se tiene también que $g(x) := \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ es superiormente semicontinua (resp. $g(x) := \operatorname{ínf}\{f_i(x) : i \in I\}$ inferiormente semicontinua).

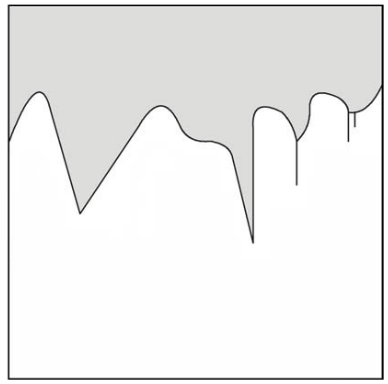


Figura 1.2: Función inferiormente semicontinua: epigrafo

Ejemplo 1.1.5. *Sea X un espacio topológico y F un subconjunto cerrado de X, entonces la función característica χ_F que toma el valor 1 en F y 0 en el resto es una función superiormente semicontinua ya que la antiimagen mediante χ_F de $[t,\infty)$ o es el conjunto vacío, o es F o todo el espacio X. Análogamente, si U es un conjunto abierto de X, entonces χ_U es una función inferiormente semicontinua.*

El siguiente teorema se va a usar en la demostración el Teorema 1.1.9 que nos da la fórmula que permite calcular la distancia de una función $f \in \mathbb{R}^X$ a $C(X)$. En la prueba vamos a usar la siguiente notación: dadas dos funciones $f,g : A \to \mathbb{R}$ con A un conjunto cualquiera, denotamos por $f \vee g$ a la función

$$f \vee g(a) = \text{máx}\{f(a), g(a)\} \text{ para } a \in A,$$

y denotamos por $f \wedge g$ a la función

$$f \wedge g(a) = \text{mín}\{f(a), g(a)\} \text{ para } a \in A.$$

Teorema 1.1.6 ([Jam74, Theorem 12.16])**.** *Sea X un espacio topológico normal y sean $f_1 \leq f_2$ dos funciones reales definidas en X tales que f_1 es superiormente semicontinua y f_2 es inferiormente semicontinua. Entonces existe una función continua $f \in C(X)$ tal que*

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Si $\phi : \mathbb{R} \to (0,1)$ es un homeomorfismo estrictamente creciente, entonces $\phi \circ f_1$ es superiormente semicontinua, $\phi \circ f_2$ es inferiormente semicontinua y $\phi \circ f_1 \leq \phi \circ f_2$. Si f es una función continua tal que $\phi \circ f_1 \leq f \leq \phi \circ f_2$, entonces $\phi^{-1} f$ es continua y $f_1 \leq \phi^{-1} f \leq f_2$. Así que podemos suponer que f_1 y f_2 toman valores en $(0,1)$.

Vamos a demostrar la siguiente afirmación

AFIRMACIÓN.- Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua g_ε tal que

$$f_1 - \varepsilon \leq g_\varepsilon \leq f_2 + \varepsilon.$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea

$$\begin{array}{rcl} A_k & := & \{x \in X : \dfrac{k}{n} \leq f_1(x)\}, \\ B_k & := & \{x \in X : f_2(x) \leq \dfrac{k-1}{n}\}. \end{array}$$

Entonces, debido a que $f_1 \leq f_2$ tenemos que A_k y B_k son conjuntos disjuntos y como f_1 es superiormente semicontinua y f_2 es inferiormente semicontinua, tenemos que además son conjuntos cerrados. Por el Lema de Urysohn, Teorema 1.1.2, existe una función continua $g_k : X \to [0, 1]$ tal que $g_k|_{A_k} = 1$ y $g_k|_{B_k} = 0$. Definamos entonces

$$g_\varepsilon = \frac{1}{n}(g_1 + \ldots + g_n).$$

Tenemos entonces que g_ε es una función continua. Fijado $x \in X$, existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que

$$\frac{k}{n} \leq f_1(x) < \frac{k+1}{n}.$$

Si $k \geq 1$ tenemos que $x \in A_i$ para todo $i \leq k$ y por lo tanto, $g_i(x) = 1$ para todo $i \leq k$ por lo que

$$f_1(x) - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} \leq g_\varepsilon(x).$$

Esta claro que estas desigualdades también se dan cuando $k = 0$. De forma similar tenemos que existe $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$\frac{l-1}{n} < f_2(x) \leq \frac{l}{n}.$$

Si $l < n$, tenemos entonces que para $j > l + 1$, $x \in B_j$ y entonces $g_j(x) = 0$. Así que

$$g_\varepsilon(x) \leq \frac{l}{n} \leq f_2(x) + \frac{1}{n}.$$

De nuevo, claramente esto también es cierto para $l = n$. Con esto la AFIRMACIÓN queda probada.

Por la AFIRMACIÓN, existe una función continua h_1 tal que

$$f_1 - \frac{2}{3} \leq h_1 \leq f_2 + \frac{2}{3}.$$

Supongamos que hemos construido funciones continuas $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tales que

$$f_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k \leq h_k \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{y} \quad \|h_k - h_{k-1}\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

para todo $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Como $f_1 \leq h_n + (\frac{2}{3})^n$, $h_n \leq f_2 + (\frac{2}{3})^n$ y $f_1 \leq f_2$ tenemos que

$$f_1 \vee h_n \leq (f_2 \wedge h_n) + \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

es decir

$$(f_1 \vee h_n) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (f_2 \wedge h_n) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Como $f_1 \vee h_n$ es superiormente semicontinua y $f_2 \wedge h_n$ es inferiormente semicontinua, por la AFIRMACIÓN tenemos que existe una función continua h_{n+1} tal que

$$(f_1 \vee h_n) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq h_{n+1} \leq (f_2 \wedge h_n) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

y por lo tanto

$$f_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq h_{n+1} \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{y} \quad \|h_{n+1} - h_n\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Tenemos entonces que $(h_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ por lo que converge a una función continua f que claramente cumple que $f_1 \leq f \leq f_2$. $\square$

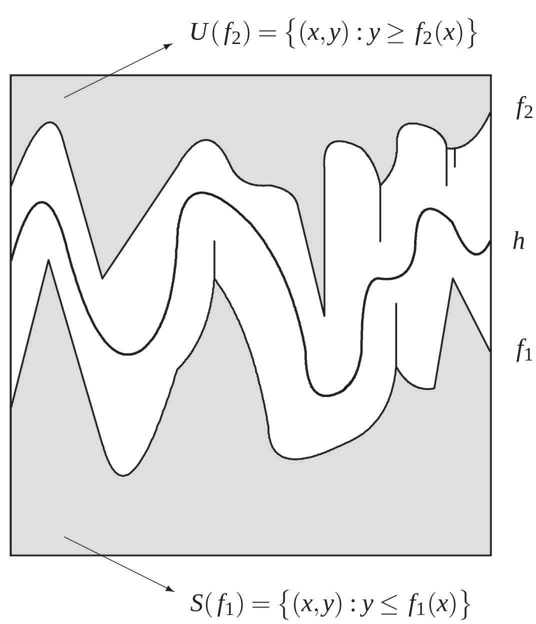


Figura 1.3: Existencia de función continua dada en el Teorema 1.1.6

De hecho, el Teorema 1.1.6 nos proporciona una caracterización de los espacios normales, como vemos en el siguiente corolario.

Corolario 1.1.7. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) *X es normal,*

(ii) *para cada par de funciones reales $f_1 \leq f_2$ definidas en X tales que f_1 es superiormente semicontinua y f_2 es inferiormente semicontinua, existe una función continua $f \in C(X)$ tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. La implicación (i)⇒(ii) nos la da el Teorema 1.1.6. Para ver la implicación (ii)⇒(i) vamos a usar el Lema de Urysohn. Sean A y B dos conjuntos cerrados y disjuntos. Tenemos que entonces $B \subset X \backslash A$ y por lo tanto

$$\chi_B \leq \chi_{X \backslash A}.$$

Como B es un conjunto cerrado y $X \backslash A$ es abierto, tenemos tal como vimos en el Ejemplo 1.1.5 que χ_B es superiormente semicontinua y $\chi_{X \backslash A}$ inferiormente semicontinua. Así que por hipótesis, existe $f \in C(X)$ tal que

$$\chi_B \leq f \leq \chi_{X \backslash A}$$

y por lo tanto, $f|_B = 1$ y $f|_A = 0$. Por el Lema de Urysohn, Teorema 1.1.2, concluimos que X es normal. □

Definición 1.1.8. *Sea X un espacio topológico y (Z,d) un espacio métrico. Para $f \in Z^X$ y $x \in X$ se define la oscilación de f en X como*

$$\operatorname{osc}(f,x) = \inf_{U \in \mathscr{U}_x} \sup_{y,z \in U} d(f(y), f(z))$$

y la semioscilación de f en X como

$$\operatorname{osc}^*(f,x) = \inf_{U \in \mathscr{U}_x} \sup_{y \in U} d(f(y), f(x))$$

donde $\mathscr{U}_x$ es el conjunto de entornos de x en X. Se define la oscilación de f (en X) y semioscilación de f (en X) como

$$\operatorname{osc}(f) = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f,x) \quad y \quad \operatorname{osc}^*(f) = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}^*(f,x).$$

Cuando tengamos $f \in Z^X$ e $Y \subset X$ denotaremos la oscilación y semioscilación de f en Y por

$$\operatorname{osc}(f,Y) = \sup_{x \in Y} \operatorname{osc}(f,x) \quad y \quad \operatorname{osc}^*(f,Y) = \sup_{x \in Y} \operatorname{osc}^*(f,x).$$

Claramente tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{osc}^*(f,x) & \leq & \operatorname{osc}(f,x) & \leq & 2\operatorname{osc}^*(f,x), \\ \operatorname{osc}^*(f) & \leq & \operatorname{osc}(f) & \leq & 2\operatorname{osc}^*(f). \end{array}$$

El siguiente teorema muestra la relación entre la oscilación de una función y la distancia de esta al espacio de funciones continuas. Como se ha comentado antes, este resultado aparece en

[BL00, Proposition 1.18] bajo condiciones más restrictivas: X es paracompacto y f es acotada. Recordemos que la distancia que consideramos entre dos funciones es la distancia uniforme, es decir, si $f,g \in R^X$, entonces

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)).$$

Teorema 1.1.9. *Sea X un espacio normal y sea $f \in \mathbb{R}^X$. Entonces*

$$d(f,C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$

Demostración. Probemos primero que $d(f,C(X)) \geq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$. Si $d(f,C(X))$ es infinita, tenemos que se da la desigualdad. Supongamos entonces que $d = d(f,C(X))$ es finita. Fijemos $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Existe $g \in C(X)$ tal que $d(f,g) \leq d + \varepsilon/3$. Como g es continua, existe un entorno abierto U de x tal que $\operatorname{diam}(g(U)) < \varepsilon/3$. Entonces, si $y,z \in U$,

$$d(f(y),f(z)) \leq d(f(y),g(y)) + d(g(y),g(z)) + d(g(z),f(z)) < 2d + \varepsilon$$

así que $\operatorname{osc}(f,x) < 2d + \varepsilon$. Como podemos hacer esto para todo $\varepsilon > 0$ podemos concluir que $\operatorname{osc}(f,x) \leq 2d$.

Probemos ahora que $d(f,C(X)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$. Si $\operatorname{osc}(f) = +\infty$ claramente se da la desigualdad así que supongamos que $\delta = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$ es finito. Para $x \in X$ denotemos por $\mathscr{U}_x$ al conjunto de entornos de $x \in X$ y denotemos

$$\mathscr{V}_x = \{U \in \mathscr{U}_x : \operatorname{diam}(f(U)) < \operatorname{osc}(f) + 1\}.$$

Claramente $\mathscr{V}_x$ es una base de entornos de x y para cada $U \in \mathscr{V}_x$, $f|_U$ está superior e inferiormente acotada. Entonces

$$\begin{aligned}
2\delta &\geq \operatorname{osc}(f,x) = \operatorname*{ínf}_{U\in\mathscr{U}_x} \operatorname{diam}(f(U)) = \operatorname*{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x} \operatorname{diam}(f(U)) \\
&= \operatorname*{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x} \sup_{y,z\in U} (f(y) - f(z)) \\
&\geq \operatorname*{ínf}_{U,V\in\mathscr{V}_x} \sup_{y\in U, z\in V} (f(y) - f(z)) \\
&= \operatorname*{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x} \sup_{y\in U} f(y) - \sup_{U\in\mathscr{V}_x} \operatorname*{ínf}_{z\in U} f(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos

$$f_1(x) = \operatorname*{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x} \sup_{z\in U} f(z) - \delta$$

$$f_2(x) = \sup_{U\in\mathscr{V}_x} \operatorname*{ínf}_{z\in U} f(z) + \delta$$

tenemos que $f_1 \leq f_2$. Además, f_1 es superiormente semicontinua y f_2 es inferiormente semicontinua. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.6, existe una función continua h definida en X tal que

$$f_1(x) \leq h(x) \leq f_2(x)$$

para todo $x \in X$. Claramente

$$f_2(x) - \delta \leq f(x) \leq f_1(x) + \delta$$

así que

$$h(x) - \delta \leq f_2(x) - \delta \leq f(x) \leq f_1(x) + \delta \leq h(x) + \delta,$$

por lo que $d(f,h) \leq \delta$ lo que prueba la desigualdad y con ello terminamos la prueba. $\square$

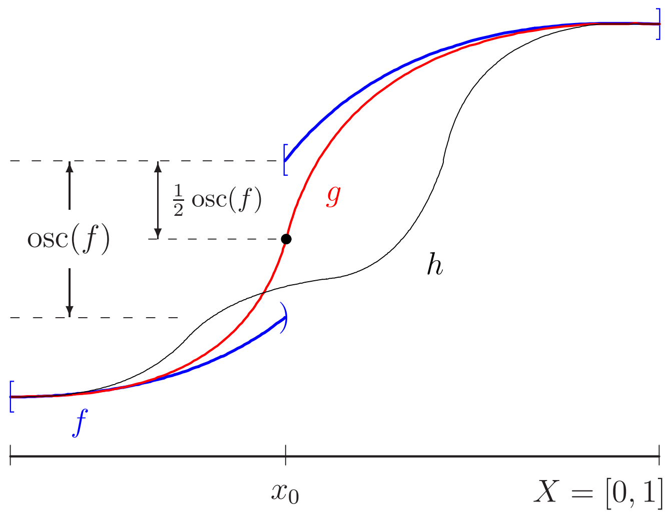


Figura 1.4: Distancia a espacio de funciones continuas

Observación 1.1.10. *Si seguimos la segunda parte de la prueba anterior podemos observar que realmente obtenemos que dada $f \in \mathbb{R}^X$, existe $g \in C(X)$ tal que*

$$d(f,g) = d(f, C(X)).$$

En otras palabras, si consideramos el espacio de funciones continuas acotadas $C_b(X)$ dentro de $\ell_\infty(X)$, el subespacio $C_b(X)$ es proximinal para el espacio de Banach $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Observación 1.1.11. *Observemos que siguiendo la primera parte de la prueba anterior, si X es un espacio topológico arbitrario, (Z,d) un espacio métrico y $f \in Z^X$, entonces*

$$d(f, C(X,Z)) \geq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$

La validez del Teorema 1.1.9 de hecho caracteriza a los espacios normales.

Corolario 1.1.12. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes*

(i) X es normal,

(ii) para toda función $f \in \mathbb{R}^X$, *existe* $g \in C(X)$ *tal que* $d(f,g) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$,
(iii) para toda función $f \in \mathbb{R}^X$ *se tiene que* $d(f,C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$,
(iv) para toda función no continua $f \in \mathbb{R}^X$ *se tiene que* $d(f,C(X)) < \operatorname{osc}(f)$.

Demostración. Tal como hemos comentado después del Teorema 1.1.9, la implicación (i)⇒(ii) se obtiene de la prueba de este. Las implicaciones (ii)⇒(iii)⇒(iv) son inmediatas. Para probar (iv)⇒(i), tomemos dos conjuntos cerrados disjuntos $A,B \subset X$ y consideremos la función

$$f = \chi_A - \chi_B = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \cup B, \\ -1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Si $x \notin A \cup B$, como $X \setminus (A \cup B)$ es abierto, se tiene que $\operatorname{osc}(f,x) = 0$. Si $x \in A \subset X \setminus B$, tenemos que

$$\operatorname{osc}(f,x) \leq \operatorname{diam}(f(X \setminus B)) \leq 1.$$

Análogamente se tiene que si $x \in B$, entonces $\operatorname{osc}(f,x) \leq 1$. Por lo tanto, $\operatorname{osc}(g) \leq 1$ así que por hipótesis, existe $f \in C(X)$ tal que $|f(x) - g(x)| < 1$ para todo $x \in X$. Por otro lado, si $x \in A$, se tiene que

$$g(x) \geq f(x) - |g(x) - f(x)| > 1 - 1 = 0,$$

y análogamente, si $x \in B$, entonces $g(x) < 0$. Por lo tanto,

$$U = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \supset A,$$

$$V = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\} \supset B,$$

y como U y V son abiertos disjuntos, tenemos que X es un espacio normal. □

1.2 Oscilación y distancia a espacios de funciones continuas en espacios paracompactos

Hemos visto en la sección anterior que la oscilación de una función $f : X \to \mathbb{R}$ sirve para medir la distancia de esta al espacio $C(X)$. En esta sección estudiamos que relación hay entre dicha distancia y la oscilación cuando suponemos que f está definida en un espacio paracompacto X, Definición 1.2.5, y en vez de tomar valores en $\mathbb{R}$, toma valores en un espacio normado arbitrario. El resultado demostrado es:

Teorema 1.2.19 ([CMR06, Lemma 2.7]). *Sea* X *un espacio paracompacto y sea* Z *un subconjunto convexo de un espacio normado* E. *Entonces para cada aplicación* $f : X \to Z$ *tenemos que*

$$\frac{1}{2}\operatorname{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z)) \leq \operatorname{osc}(f).$$

Para ello vamos a necesitar las caracterizaciones de paracompacidad ofrecidas en el Teorema 1.2.11 y Teorema 1.2.18, que desarrollaremos completamente para una mejor compresión de la sección. Las demostraciones que aparecen aquí de dichos teoremas se pueden encontrar por ejemplo en [Eng77].

Definición 1.2.1. *Se dice que una familia $\{A_s : s \in S\}$ de conjuntos de un espacio topológico X es localmente finita si para todo $x \in X$ existe un entorno U de x para el que sólo existe una cantidad finita de índices s tales que $U \cap A_s \neq \emptyset$. Se dice que la familia es discreta cuando para todo $x \in X$ existe un entorno U de x que corta a lo sumo con un elemento de la familia.*

Lema 1.2.2. *Sea $\{A_s : s \in S\}$ una familia localmente finita en X. Entonces:*

(i) $\{\overline{A}_s : s \in S\}$ *es localmente finita.*

(ii) $A = \bigcup_s \overline{A}_s$ *es cerrado en X, y así* $\bigcup_s \overline{A}_s = \overline{\bigcup_s A_s}$.

Además, si suponemos que $\{A_s : s \in S\}$ es discreta, entonces también lo será $\{\overline{A}_s : s \in S\}$.

Demostración. Dado $x \in X$, existe un entorno abierto U de x tal que $A_s \cap U = \emptyset$ salvo para una cantidad finita de índices $s \in S$. Por otro lado, debido a que si la intersección de un abierto con un conjunto es vacía también lo es la intersección del abierto con la clausura del conjunto tenemos que $\overline{A}_s \cap U = \emptyset$ salvo para una cantidad finita de s con lo que queda probado (i). Por este mismo razonamiento tenemos que si $\{A_s : s \in S\}$ es discreta, entonces también lo será $\{\overline{A}_s : s \in S\}$.

Veamos ahora (ii). Sea $x \in X \backslash A$. Por (i) existe un entorno U de x que corta a lo sumo a una cantidad finita de $\overline{A}_s$ que denotamos por $\overline{A}_{s_1}, \overline{A}_{s_2}, \ldots \overline{A}_{s_n}$. Tenemos entonces que

$$U \cap \bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash \overline{A}_{s_i})$$

es un entorno de x que no corta con A. Por lo tanto A es cerrado. □

Recordemos que una familia de subconjuntos $\{A_s : s \in S\}$ de un espacio topológico X es un cubrimiento de X cuando $\cup_{s \in S} A_s = X$. Diremos que el cubrimiento es abierto (resp. cerrado) si cada A_s es abierto (resp. cerrado) para todo $s \in S$.

Lema 1.2.3. *Sea $\{E_s : s \in S\}$ una familia de conjuntos de un espacio X y sea $\{B_t : t \in T\}$ un cubrimiento cerrado localmente finito de X. Supongamos que cada B_t corta a lo sumo a una cantidad finita de E_s. En tal caso existe una familia abierta $\{U_s : s \in S\}$ localmente finita tal que cada E_s está contenido en U_s para $s \in S$.*

Demostración. Para cada s definamos $U_s = X \backslash \bigcup \{B_t : B_t \cap E_s = \emptyset\}$. Claramente $E_s \subset U_s$ para todo $s \in S$. Como $\{B_t\}_t$ es una familia localmente finita de conjuntos cerrados tenemos por el Lema 1.2.2 que cada U_s es abierto. Dado $x \in X$, existe un entorno U de x contenido en una unión finita $\bigcup_{i=1}^{n} B_{t_i}$. Por otro lado, como cada vez que $B_t \cap U_s \neq \emptyset$ se tiene que $B_t \cap E_s \neq \emptyset$, y cada B_{t_i} corta a lo sumo con una cantidad finita de E_s, tenemos entonces que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{t_i}$ (y por lo tanto U) corta con una cantidad finita de U_s y de aquí obtenemos que $\{U_s\}_s$ es localmente finita. □

Definición 1.2.4. *Sean $\{A_s : s \in S\}$ y $\{B_t : t \in T\}$ dos cubrimientos de un espacio X. Se dice que $\{A_s\}_s$ es un refinamiento de $\{B_t\}_t$ si para cada $s \in S$ existe un $t \in T$ tal que $A_s \subset B_t$.*

Definición 1.2.5. *Se dice que un espacio topológico X es paracompacto si todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Evidentemente los espacios compactos son paracompactos. Otro ejemplo típico de espacios paracompactos son los espacios métricos, ya que el teorema de Stone nos dice que todo cubrimiento abierto de un espacio métrico tiene un subcubrimiento localmente finito y σ-discreto (véase [Eng77, Theorem 4.4.1]). Por último destaquemos también que los espacios Lindelöf (es decir aquellos tales que todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento numerable) son también paracompactos (véase [Eng77, Theorem 3.8.11]). Los espacios paracompactos son casos particulares de espacios normales.

Teorema 1.2.6. *Todo espacio paracompacto es normal.*

Demostración. Veamos primero que si X es paracompacto, entonces X es regular. Sea A un conjunto cerrado de X y sea $x \notin A$. Como X es Hausdorff, cada $a \in A$ tiene un entorno abierto U_a tal que $x \notin \overline{U}_a$. Teniendo en cuenta que $\{U_a : a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ es un cubrimiento abierto de X, usando la paracompacidad tenemos que existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_s : s \in S\} \cup \{G\}$ con $G \subset X \setminus A$ y tal que para cada $s \in S$ existe algún $a \in A$ con $V_s \subset U_a$. Tomemos $W = \bigcup_{s \in S} V_s$, entonces W es abierto y $A \subset W$. Además, como $\{V_s\}_s$ es una familia localmente finita, tenemos gracias a el Lema 1.2.2 que $\overline{W} = \bigcup_{s \in S} \overline{V}_s$ y como cada V_s está contenido en algún U_a, tenemos de forma inmediata que $X \setminus \overline{W}$ y W son entornos abiertos disjuntos de x y A respectivamente. Veamos ahora que X es normal. Dados dos conjuntos cerrados A y B de X disjuntos tenemos que por la regularidad de X, para cada $a \in A$ existe un entorno abierto U_a tal que $\overline{U}_a \cap B = \emptyset$ y razonando como acabamos de hacer sustituyendo x por B obtendremos entornos abiertos disjuntos de A y B. $\square$

Lema 1.2.7. *Sea X un espacio regular tal que todo cubrimiento abierto admite un refinamiento localmente finito. Entonces todo cubrimiento abierto $\{U_s : s \in S\}$ admite un refinamiento cerrado localmente finito $\{F_s : s \in S\}$ tal que $F_s \subset U_s$ para todo $s \in S$.*

Demostración. Sea $\{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto de X. Como X es regular, podemos tomar un cubrimiento abierto $\{V_t : t \in T\}$ tal que $\{\overline{V}_t : t \in T\}$ es un refinamiento del inicial. La familia $\{V_t : t \in T\}$ es un cubrimiento abierto que por hipótesis tiene un refinamiento $\{A_i : i \in I\}$ localmente finito. Para $t \in T$ tomemos $s(t) \in S$ tal que $\overline{A}_t \subset U_s$ y definamos

$$F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A}_t.$$

Claramente $F_s \subset U_s$ para $s \in S$. Por el Lema 1.2.2 tenemos que cada F_s es cerrado y además $\{\overline{A}_t : t \in T\}$ es una familia localmente finita de donde se deduce que también lo es $\{F_s : s \in S\}$. $\square$

Definición 1.2.8. *Sea X un espacio topológico. Se dice que una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos X es σ-localmente finita (resp. σ-discreta) si existe una sucesión de familias $(\mathscr{A}_n)_n$ localmente finitas (resp. discretas) tales que $\mathscr{A} = \cup_{\mathbb{N}}\mathscr{A}_n$.*

Teorema 1.2.9. *Sea X un espacio regular. Son equivalentes:*

(i) X es paracompacto.
(ii) Todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto σ-localmente finito.
(iii) Todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento localmente finito (no necesariamente abierto).
(iv) Todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento cerrado localmente finito.

Demostración.

(i)$\Rightarrow$(ii) es inmediato.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Sea $\{U_t : t \in T\}$ un cubrimiento abierto de X, por (ii) tenemos que existe un refinamiento abierto $\{V_{n,s} : (n,s) \in \mathbb{N}\times S\}$ donde para cada n_0 fijo, la familia $\{V_{n_0,s} : s \in S\}$ es localmente finita. Para cada n consideremos $W_n = \bigcup_s V_{n,s}$. Tenemos entonces que $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de X. Sea ahora $A_i = W_i \setminus \bigcup_{j<i} W_j$ para $i \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\{A_i\}_i$ es un refinamiento de $\{W_n\}_n$, claramente es un cubrimiento y además es localmente finito ya que si fijamos $x \in X$ y tomamos n el primer número natural tal que $x \in W_n$, entonces $W_n \cap A_i = \emptyset$ para todo $i > n$. Tenemos finalmente que $\{A_n \cap V_{n,s} : (n,s) \in \mathbb{N}\times S\}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_t\}_t$ ya que todo $x \in X$ tiene un entorno que sólo corta con una cantidad finita de A_n y para cada n, x tiene un entorno que corta sólo con una cantidad finita de $V_{n,s}$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) sale del Lema 1.2.7.

(iv)$\Rightarrow$(i) Sea $\{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto de X y sea $\{E_t : t \in T\}$ un refinamiento cerrado localmente finito. Cada $x \in X$ tiene un entorno abierto V_x que corta a lo sumo a una cantidad finita de conjuntos E_t. Sea $\{B_j : j \in J\}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\{V_x : x \in X\}$. Tenemos entonces que cada B_j corta a lo sumo con una cantidad finita de conjuntos E_t y por lo tanto, por el Lema 1.2.3, para cada t existe un abierto G_t tal que $\{G_t : t \in T\}$ es localmente finito y $E_t \subset G_t$. Si asociamos a cada t un conjunto $U_{s_t} \in \{U_s : s \in S\}$ tal que $E_t \subset U_{s_t}$ obtenemos finalmente que $\{G_t \cap U_{s_t} : t \in T\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_s\}_s$. $\square$

Recordemos que una partición de la unidad es una familia puntualmente sumable de aplicaciones $\{f_s : s \in S\}$ de un espacio topológico X en $[0,1]$ tales que $\sum_{s\in S} f_s(x) = 1$. Cuando $\{f_s^{-1}((0,1]) : s \in S\}$ refina a un cubrimiento $\mathscr{A}$ se dice que la partición está subordinada a $\mathscr{A}$. Por otro lado, si el cubrimiento $\{f_s^{-1}((0,1]) : s \in S\}$ es localmente finito se dice que la partición es localmente finita. La paracompacidad caracteriza la existencia de particiones de la unidad localmente finitas subordinadas a un cubrimiento abierto dado. Veamos primero un lema.

Lema 1.2.10. *Sea $\{f_s : s \in S\}$ una partición de la unidad de un espacio topológico X. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow (0,1] \\ x &\rightsquigarrow \sup_{s\in S} f_s(x) \end{aligned}$$

es continua

Demostración. Sea $x_0 \in X$, tomemos $a > 0$ y $T \subset S$ un conjunto finito tales que

$$1 - \sum_{s\in T} f_s(x_0) < a < f(x_0).$$

La función $g = 1 - \sum_{s\in T} f_s$ es continua por lo que existe un entorno U de x_0 tal que

$$1 - \sum_{s\in T} f_s(x) < a$$

para $x \in U$. En particular, si $s \in S\backslash T$ se tiene que $f_s(x) < a$ para todo $x \in U$. Por otro lado, existe $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x_0) > a$. Tomemos ahora V un entorno de x_0 tal que $f_{s_0}(x) > a$ para todo $x \in V$. En particular, si $x \in U \cap V$ se tiene que $f_s(x) < a < f(x)$ para todo $s \in S\backslash T$ y por lo tanto

$$f(x) = \sup_{s\in T} f_s(x)$$

si $x \in U \cap V$. Como T es un conjunto finito, f es continua al restringirla a $U \cap V$ de donde se deduce que f es continua en x_0 con lo que la prueba queda finalizada. $\square$

Teorema 1.2.11. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) X es paracompacto.
(ii) Todo cubrimiento abierto del espacio X tiene una partición de la unidad localmente finita subordinada a él.
(iii) Todo cubrimiento abierto del espacio X tiene una partición de la unidad subordinada a él.

Demostración. Supongamos que X es paracompacto y consideremos un cubrimiento abierto $\mathscr{A}$ de X y sea $\mathscr{U} = \{U_s : s \in S\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathscr{A}$. Por el Lema 1.2.7 existe un cubrimiento cerrado $\{F_s : s \in S\}$ de X tal que $F_s \subset U_s$ para todo $s \in S$. Por el Teorema 1.2.6, podremos aplicar el lema de Urysohn, Teorema 1.1.2, así que para cada $s \in S$ existe una función $g_s : X \to [0,1]$ tal que $g_s(x) = 0$ para $x \in X\backslash U_s$ y $g_s(x) = 1$ para $x \in F_s$. Como $\mathscr{U}$ es una familia locamente finita la función

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow (0,1] \\ x &\rightsquigarrow \sum_{s\in S} g_s(x) \end{aligned}$$

está bien definida, es continua y claramente se tiene que $\{g_s/g : s \in S\}$ es una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathscr{A}$.

La implicación (ii)⇒(iii) es obvia, así basta ver que (iii)⇒(i). Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\{f_s : s \in S\}$ una partición de la unidad subordinada a él.

AFIRMACIÓN.- Dada una función continua $g : X \to [0,1]$ y $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) > 0$, existe un entorno U de x_0 y un conjunto finito $T \subset S$ tal que

$$f_s(x) < g(x)$$

para $x \in U$ y $s \in S \backslash T$.

Para ello basta tomar $T = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset S$ tal que

$$1 - \sum_{i=1}^{n} f_{s_i}(x_0) < g(x_0)$$

y

$$U_0 = \{x \in X : 1 - \sum_{i=1}^{n} f_{s_i}(x) < g(x)\}.$$

Por el Lema 1.2.10,

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & (0,1] \\ x & \rightsquigarrow & \sup\limits_{s \in S} f_s(x) \end{array}$$

es una aplicación continua. Para cada $s \in S$, el conjunto

$$V_s = \{x \in X : f_s(x) > \frac{1}{2} f(x)\}$$

es abierto, y la familia $\mathscr{V} = \{V_s : s \in S\}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$. Aplicando la AFIRMACIÓN a la función $g = \frac{1}{2} f$, se deduce que $\mathscr{V}$ es una familia localmente finita. $\square$

Definición 1.2.12. *Sea $\mathscr{A} = \{A_s : s \in S\}$ un cubrimiento de un conjunto X. La estrella de un conjunto $Y \subset X$ con respecto a $\mathscr{A}$ es el conjunto*

$$\mathrm{St}(Y, \mathscr{A}) := \bigcup \{A_s : Y \cap A_s \neq \emptyset\}.$$

Por $\mathrm{St}(x, A)$ *denotaremos al conjunto* $\mathrm{St}(\{x\}, A)$.

Definición 1.2.13. *Se dice que un cubrimiento $\mathscr{A}$ es refinamiento baricéntrico de un cubrimiento $\mathscr{U}$ de X cuando el cubrimiento $\{\mathrm{St}(x, \mathscr{A}) : x \in X\}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$.*

Lema 1.2.14. *Sea X un espacio topológico normal. Entonces, todo cubrimiento abierto localmente finito admite un refinamiento baricéntrico.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto localmente finito. Como X es un espacio normal, podemos tomar $\mathscr{B} = \{V_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto tal que $\overline{V}_s \subset U_s$ para cada s. En tal caso, $\mathscr{B}$ es localmente finito. Para cada $x \in X$ definamos

$$W(x) = \left(\bigcap \{U_s : x \in \overline{V}_s\} \right) \bigcap \left(X \backslash \bigcup \{\overline{V}_t : x \notin \overline{V}_t\} \right).$$

Vamos a ver que $\mathscr{C} = \{W(x) : x \in X\}$ es el refinamiento baricéntrico abierto que buscamos. Por un lado, como $\mathscr{B}$ es localmente finito, el primer término ($\cap U_s$) es una intersección finita, y por el Lema 1.2.2 tenemos que el segundo término $X \setminus \cup \overline{V}_t$ es abierto y por lo tanto, $W(x)$ es abierto. Por otro lado, $\mathscr{C}$ es un cubrimiento de X ya que si $x \in X$ entonces $x \in W(x)$. Fijemos $x_0 \in X$ y sea $\overline{V}_s$ tal que $x_0 \in \overline{V}_s$. Sea y tal que $x_0 \in W(y)$. Si $y \notin \overline{V}_s$ tenemos que $W(y) \subset X \setminus \overline{V}_s$ y por lo tanto $x_0 \in X \setminus \overline{V}_s$ lo que es imposible. Así que $y \in \overline{V}_s$ si $x_0 \in W(y)$ y por lo tanto $W(y) \subset U_s$ y de aquí deducimos que $\mathrm{St}(x_0, \mathscr{C}) \subset U_s$ con lo que terminamos la prueba. □

Definición 1.2.15. *Sean $\mathscr{A} = \{U_s : s \in S\}$ y $\mathscr{U}$ cubrimientos de un espacio X. Se dice que $\mathscr{A}$ es un refinamiento estrella de $\mathscr{U}$ cuando el cubrimiento $\{St(U_s, \mathscr{A}) : s \in S\}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$.*

Lema 1.2.16. *Un refinamiento baricéntrico $\mathscr{A}$ de un refinamiento baricéntrico $\mathscr{B}$ de un cubrimiento $\mathscr{U}$ es un refinamiento estrella de $\mathscr{U}$.*

Demostración. Dado $W_0 \in \mathscr{A}$, elijamos $x_0 \in W_0$. Para cada $W \in \mathscr{A}$ tal que $W \cap W_0 \neq \emptyset$ elijamos $z \in W \cap W_0$, entonces $W \cup W_0 \subset \mathrm{St}(z, \mathscr{A}) \subset V$ para algún $V \in \mathscr{B}$. En tal caso, $x_0 \in V$ y por lo tanto $W \subset V \subset \mathrm{St}(x_0, \mathscr{B})$ y esto ocurre para todo $W \in \mathscr{A}$ tal que $W \cap W_0 \neq \emptyset$, por lo que tenemos que $\mathrm{St}(W_0, \mathscr{A}) \subset \mathrm{St}(x_0, \mathscr{B}) \subset U$ para algún $U \in \mathscr{U}$. □

Lema 1.2.17. *Sea X un espacio topológico tal que cada cubrimiento abierto admite un refinamiento baricéntrico abierto. Entonces cada cubrimiento abierto de X admite un refinamiento σ-discreto abierto.*

Demostración. Sea $\mathscr{U} = \{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$, por el Lema 1.2.16 podemos tomar $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots$ una sucesión de cubrimientos abiertos de X tales que $\mathscr{U}_{n+1}$ es un refinamiento estrella de $\mathscr{U}_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Para cada $s \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U_{s,n} = \{x \in X : x \text{ tiene un entorno } V \text{ tal que } \mathrm{St}(V, \mathscr{U}_n) \subset U_s\}.$$

La familia $\{U_{s,n} : s \in S\}$ es un refinamiento abierto de $\mathscr{U}$ para $n \in \mathbb{N}$.

AFIRMACIÓN.- Si $x \in U_{s,n}$ e $y \notin U_{s,n+1}$ entonces no existe $U \in \mathscr{U}_{n+1}$ tal que $x, y \in U$.

Efectivamente, para cada $U \in \mathscr{U}_{n+1}$ existe $W \in \mathscr{U}_n$ tal que $\mathrm{St}(U, \mathscr{U}_{n+1}) \subset W$, y por lo tanto, si $x \in U \cap U_{s,n}$, entonces $W \subset \mathrm{St}(x, \mathscr{U}_n)$ lo que implica que $\mathrm{St}(U, \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{St}(x, \mathscr{U}_n) \subset U_s$, así que $U \subset U_{s,n+1}$ con lo que queda probada la AFIRMACIÓN.

Dotemos a S de un buen orden $\prec$ y definamos

$$V_{s_0,n} = U_{s_0,n} \setminus \overline{\bigcup_{s \prec s_0} U_{s,n+1}}.$$

Entonces si $s_1 \prec s_2$ se tiene que $V_{s_2,n} \subset X \setminus U_{s_1,n+1}$. Por lo tanto, por la AFIRMACIÓN se tiene que si $x \in V_{s_1,n}$ e $y \in V_{s_2,n}$ con $s_1 \neq s_2$, entonces no existe $U \in \mathscr{U}_{n+1}$ tal que $x, y \in U$. Así que la familia de abiertos $\{V_{s,n} : s \in S\}$ es discreta para $n \in \mathbb{N}$.

Basta por lo tanto ver que $\{V_{s,n} : s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ cubre X. Sea $x \in X$ y denotemos $s(x)$ el menor elemento de X tal que $x \in U_{s(x),n}$ para algún entero positivo n. Como $x \notin U_{s,n+2}$ para $s \prec s(x)$, tenemos por la AFIRMACIÓN que si $x, z \in U \in \mathscr{U}_{n+2}$ entonces $z \notin U_{s,n+1}$ para $s \prec s(x)$, es decir

$$\mathrm{St}(x, \mathscr{U}_{n+2}) \bigcap \bigcup_{s \prec s(x)} U_{s,n+1} = \emptyset$$

lo que muestra que $x \in V_{s(x),n}$. □

Teorema 1.2.18. *Un espacio topológico X es paracompacto si, y sólo si, todo cubrimiento abierto admite un refinamiento baricéntrico abierto.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico paracompacto. Dado $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X, tenemos que existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathscr{V}$. Aplicando ahora el Lema 1.2.14, tenemos que $\mathscr{V}$ admite un refinamiento baricéntrico $\mathscr{W}$. Está claro que $\mathscr{W}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathscr{U}$.

Supongamos ahora que todo cubrimiento abierto admite un refinamiento baricéntrico abierto. Por el Lema 1.2.17 tenemos que cada cubrimiento abierto de X admite también un refinamiento σ-discreto, en particular σ-localmente finito. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.9 basta ver que X es regular. Sea $T \subset X$ cerrado y sea $x \in X \setminus T$. Como $\{x\}$ es un conjunto cerrado, $\mathscr{U} = \{X \setminus x, X \setminus T\}$ es un cubrimiento abierto. Por hipótesis y por el Lema 1.2.16, $\mathscr{U}$ tiene un refinamiento estrella $\mathscr{A}$. Veamos que en tal caso $\mathrm{St}(x, \mathscr{A})$ y $\mathrm{St}(T, \mathscr{A})$ son entornos abiertos disjuntos de x y T respectivamente. Supongamos que no son disjuntos, esto quiere decir que existen $V, V' \in \mathscr{A}$ tales que V contiene a x, V' corta con T y además $V \cap V' \neq \emptyset$. En tal caso $V' \subset \mathrm{St}(V, \mathscr{A})$ y por lo tanto $\mathrm{St}(V, \mathscr{A})$ contiene a x y corta con T lo que es imposible por ser $\mathscr{A}$ un refinamiento estrella de $\mathscr{U}$. □

Finalmente disponemos de todos los ingredientes para demostrar la relación entre distancia y oscilación para funciones definidas en espacios paracompactos con valores en un espacio normado.

Teorema 1.2.19 ([CMR06, Lemma 2.7])**.** *Sea X un espacio paracompacto y sea Z un subconjunto convexo de un espacio normado E. Entonces para cada aplicación $f : X \to Z$ tenemos que*

$$\frac{1}{2}\mathrm{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z)) \leq \mathrm{osc}(f).$$

Demostración. La primera desigualdad se obtiene por la Observación 1.1.11. Veamos la segunda desigualdad. Podemos suponer que $\mathrm{osc}(f)$ es acotada ya que en caso contrario la desigualdad sería trivial. Sea $s = \mathrm{osc}(f)$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$ tomemos un entorno U_x de x de modo que $\mathrm{diam}(U_x) < s + \varepsilon$. Por el Teorema 1.2.18, el cubrimiento $\mathscr{A} = \{U_x : x \in X\}$ admite un refinamiento baricéntrico abierto $\mathscr{W}$. Por el Teorema 1.2.11 existe $\{p_a : a \in A\}$ una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathscr{W}$. Para cada $a \in A$ fijemos un punto $x_a \in p_a^{-1}((0,1])$ y tomemos $z_a = f(x_a)$. Definamos ahora

$$g(x) = \sum_{a \in A} p_a(x) z_a.$$

Claramente tenemos que g es una función continua. Sea $x \in X$ fijo y sea $B = \{a \in A : p_a(x) > 0\}$. Como $\mathscr{W}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathscr{A}$ podemos afirmar que existe $y \in Y$ tal que

$$\bigcup_{a \in B} p_a^{-1}((0,1]) = \mathrm{St}(x, \{p_a^{-1}((0,1]) : a \in A\}) \subset \mathrm{St}(x, \mathscr{W}) \subset U_y$$

por lo que $x \in U_y$ y $x_a \in U_y$ para todo $a \in B$. Por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a $\mathrm{conv}(f(U_y))$ y como $\mathrm{diam\,conv}(f(U_y)) = \mathrm{diam} f(U_y) < s + \varepsilon$ tenemos que $\|g(x) - f(x)\| < s + \varepsilon$ y esto podemos hacerlo para cualquier $x \in X$ por lo que $d(f,g) \leq s + \varepsilon$. Por lo tanto $d(f, C(X,Z)) \leq s + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tendremos que $d(f, C(X,Z)) \leq s$. □

En el teorema anterior, la desigualdad $\frac{1}{2}\mathrm{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z))$ no se puede mejorar en general ya que de hecho es una igualdad cuando $Z = \mathbb{R}$. El siguiente ejemplo nos va a mostrar que la desigualdad $d(f, C(X,Z)) \leq \mathrm{osc}(f)$ también es óptima.

Ejemplo 1.2.20. *Sea $X = [0,1]$ y $Z = \mathrm{conv}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $(e_n)_n$ es la base estándar de ℓ_1. Tomemos una partición de $[0,1]$ formada por una cantidad numerable de conjuntos densos $A_1, A_2, \ldots, An, \ldots$ y definamos $f : [0,1] \to Z$ como la aplicación que toma el valor e_n en A_n para $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que* $\mathrm{osc}(f) = d(f, C([0,1],Z))$.

Claramente, $\mathrm{osc}(f) = 2$. Veamos ahora que $d(f, C([0,1],Z)) = 2$. Para ver esto es suficiente ver que para cada $g \in C([0,1],Z)$ y cada $\delta > 0$, existe $y \in [0,1]$ tal que

$$d(f,g) \geq \|g(y) - f(y)\|_1 \geq 2 - \delta.$$

Efectivamente, sabemos que $g(0) = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k$ con $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ y $\lambda_k \geq 0$ para $k = 1,2,\ldots,m$. Fijemos $n > m$ y tomemos $y \in A_n$ tal que $\|g(0) - g(y)\|_1 \leq \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \|f(y) - g(y)\|_1 &\geq \|f(y) - g(0)\|_1 - \|g(0) - g(y)\|_1 \\ &= 2 - \|g(0) - g(y)\|_1 \geq 2 - \delta \end{aligned}$$

y por lo tanto $d(f, C([0,1],Z)) = 2$. □

Obsérvese que en el caso particular de que el espacio métrico de llegada fuese un espacio de Banach E, podríamos plantearnos estudiar la relación entre la oscilación de una función $f \in E^X$ con

$$\sup_{x^* \in B_{E^*}} \mathrm{osc}(x^* \circ f).$$

Sin embargo, no existe ninguna constante $M > 0$ tal que

$$\mathrm{osc}(f) \leq M \sup_{x^* \in B_{E^*}} \mathrm{osc}(x^* \circ f)$$

ya que si una función es continua para la topología w en E, entonces $\sup_{x^* \in B_{E^*}} \mathrm{osc}(x^* \circ f) = 0$ y sin embargo, hay funciones w-continuas que no son continuas para la norma: tómese por ejemplo $X = (E, w)$ y f la función identidad. Curiosamente, $\sup_{x^* \in B_{E^*}} \mathrm{osc}(x^* \circ f)$ nos da una estimación para la distancia a las funciones de la primera clase de Baire, véase Corolario 4.3.4.

Acabamos la sección haciendo notar que para espacios paracompactos X y funciones acotadas $f \in \mathbb{R}^X$ la fórmula del Teorema 1.1.6, y por lo tanto, la del Teorema 1.1.9 se puede obtener como consecuencia del teorema de selección de Michael. Si X es un conjunto, denotamos por $\mathscr{P}(E)$ al conjunto de las partes de X.

Teorema 1.2.21 (Michael, véase [BL00, Theorem 1.16])**.** *Sea X un espacio paracompacto, E un espacio de Banach y supongamos que $\phi : X \to \mathscr{P}(E)$ es una multifunción inferiormente semicontinua, es decir, para todo abierto U de E se tiene que el conjunto*

$$\{x \in X : \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto. Supongamos además que $\phi(x)$ es cerrado y convexo para todo $x \in X$. Entonces ϕ admite un selector continuo, es decir, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.

Teniendo el teorema de Michael en mente, para probar el Teorema 1.1.6 en el caso de que X sea paracompacto, basta con comprobar que si $f_1 \leq f_2$ con f_1 superiormente semicontinua, f_2 inferiormente semicontinua y $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces la multifunción

$$\begin{array}{rcl} \phi : X & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ x & \rightsquigarrow & [f_1(x), f_2(x)] \end{array}$$

es inferiormente semicontinua, por lo que como consecuencia del Teorema 1.2.21 tiene un selector continuo que será precisamente la función que buscamos.

En la Sección 1.1 vimos que la fórmula

$$d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$$

para toda función $f \in \mathbb{R}^X$ caracterizaba de hecho a los espacios normales, Corolario 1.1.12. Es natural plantearse aquí si el Teorema 1.2.19 caracteriza a los espacios paracompactos.

Problema 1. *Sea X un espacio topológico tal que para todo espacio métrico (Z,d) y toda función $f \in Z^X$ se tiene que*

$$\frac{1}{2}\operatorname{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z)) \leq \operatorname{osc}(f).$$

¿Es X un espacio paracompacto?

1.3 Separación de conjuntos convexos

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 1.3.3 que va a ser fundamental en la Sección 3.1 para calcular distancias a espacios normados. El siguiente teorema es una consecuencia directa del teorema de extensión de Hahn-Banach.

Teorema 1.3.1 ([Cho69, Theorem 21.11]). *Sea E un espacio vectorial topológico y sean A y B dos subconjuntos disjuntos de E no vacíos y convexos con A abierto. Entonces existe un hiperplano afín cerrado que separa A y B, es decir, existe $f \in E'$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset \{x \in E : f(x) \geq \lambda\}$ y $B \subset \{x \in E : f(x) \leq \lambda\}$. Si además B es abierto, la separación es estricta, es decir, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $A \subset \{x \in E : f(x) > \lambda\}$ y $B \subset \{x \in E : f(x) < \lambda\}$.*

Lema 1.3.2 ([Cho69, Theorem 21.19]). *Sea E un espacio localmente convexo y $X \subset E$ un subconjunto compacto convexo. Sea $f_1 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación cóncava superiormente semicontinua y sea $f_2 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación convexa inferiormente semicontinua. Sean*

$$S(f_1) := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f_1(x) \geq y\}$$

y

$$U(f_2) := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f_2(x) \leq y\}.$$

Si $f_1(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces existe un conjunto convexo abierto $U \subset X \times \mathbb{R}$ tal que

$$(U(f_2) + U) \cap (S(f_1) + U) = \emptyset.$$

Demostración. Para cada $x \in X$, tomemos $\varepsilon_x > 0$ y un entorno abierto V_x de 0 tales que para todo $y \in (x + V_x) \cap X$ tengamos que

$$f_1(y) < f_1(x) + \frac{\varepsilon_x}{2} < f_1(x) + \varepsilon_x < f_2(x) - \varepsilon_x < f_2(x) - \frac{\varepsilon_x}{2} < f_2(y).$$

Tomemos para cada x un entorno abierto de 0 equilibrado U_x de modo que $U_x + U_x \subset V_x$. Tenemos entonces que $\{x + U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X y como X es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $\{x_i + U_{x_i} : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ es un cubrimiento de X. Tomemos un entorno abierto equilibrado V de 0 tal que $V + V \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y sea $\varepsilon = \text{mín}_i\, \varepsilon_{x_i}$. Tomemos

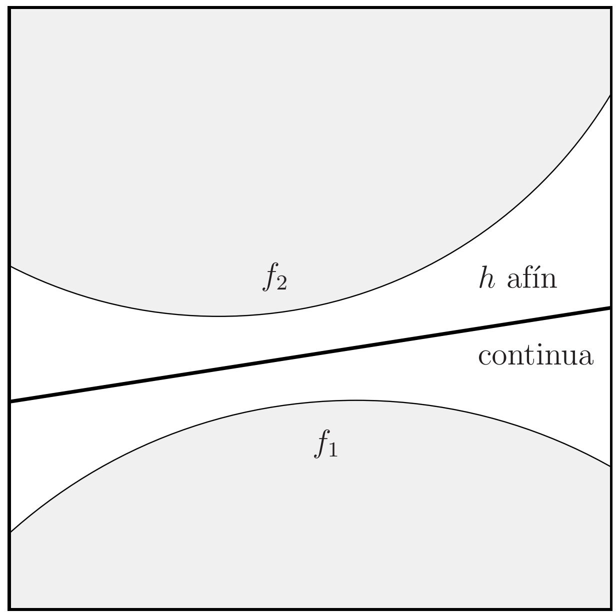
$$U = V \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2).$$

Afirmamos que $(U(f_2) + U) \cap (S(f_1) + U) = \emptyset$. En caso contrario, existen puntos $(x,y) \in U(f_2)$ y $(x', y') \in S(f_1)$ tales que $(x - x', y - y') \in U + U$. Tenemos por un lado que $|y - y'| < \varepsilon$ y por otro lado $x - x' \in V + V \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Como $\{x_i + U_{x_i}\}$ es un cubrimiento de X, existe i tal que $x \in x_i + U_{x_i}$, pero como $x - x' \in U_{x_i}$ entonces $x' \in x_i + U_{x_i} + U_{x_i} \subset x_i + V_{x_i}$ y en tal caso

$$\begin{aligned} y' &\leq f_1(x') < f_1(x_i) + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} = f_1(x_i) + \varepsilon_{x_i} - \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} < \\ &< f_2(x_i) - \varepsilon_{x_i} - \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} < f_2(x) - \varepsilon_{x_i} \leq y - \varepsilon_{x_i} \leq y - \varepsilon \end{aligned}$$

de donde deducimos que $y - y' > \varepsilon$ lo que es una contradicción. $\square$

f_2 inf. semicont. convexa



f_1 sup. semicont. cóncava

Teorema 1.3.3 ([Cho69, Theorem 21.20])**.** *Sea E un espacio localmente convexo, $X \subset E$ un subconjunto compacto convexo, $f_1 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación cóncava superiormente semicontinua y $f_2 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación convexa inferiormente semicontinua tales que $f_1(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$. Entonces existe una función afín continua $h : E \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f_1(x) < h(x) < f_2(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Estamos en las condiciones del Lema 1.3.2, y por lo tanto existe un entorno abierto de 0 en $E \times \mathbb{R}$ tal que $(U(f_2)+U) \cap (S(f_1)+U) = \emptyset$. Aplicando ahora el Teorema 1.3.1 tenemos que existe $\alpha \in (E \times \mathbb{R})'$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que para todo $(x_1,y_1) \in S(f_1)+U$ e $(x_2,y_2) \in U(f_2)+U$ se cumple que $\alpha(x_1,y_1) < \lambda < \alpha(x_2,y_2)$. Ahora bien, como α es lineal, debe ser de la forma $\alpha(x,y) = \alpha(x,0)+\gamma y$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Por otro lado, $\alpha(x, f_1(x)) < \alpha(x, f_2(x))$ y $f_1(x) < f_2(x)$ para todo x en X, de donde deducimos que $\gamma > 0$. Definamos entonces

$$h(x) = \frac{1}{\gamma}(\lambda - \alpha(x,0)).$$

Como α es lineal y continua tenemos que h es afín y continua y de la definición de $S(f_1)$ y $U(f_2)$ se deduce inmediatamente que $f_1(x) < h(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

1.4 Principio de reflexividad local

En esta sección demostramos el Principio de Reflexividad Local, Teorema 1.4.6, que nos hará falta más adelante en la Sección 3.3 para poder obtener unas expresiones equivalentes para la medida de no compacidad débil γ allí definida, Proposición 3.3.4. Las demostraciones que presentamos en esta sección pueden encontrarse en [vD78]. Empecemos primero demostrando unos lemas.

Lema 1.4.1. *Sean $U_0, U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos y convexos de un espacio normado E, con $\cap_{i=0}^n U_i = \emptyset$. Entonces existe una aplicación lineal y continua $T : E \to \mathbb{R}^n$ tal que $\cap_{i=0}^n T(U_i) = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos en E^n el subconjunto

$$U = \{(x_0 - x_1, x_0 - x_2, \ldots, x_0 - x_n) : x_i \in U_i, i = 0, 1, \ldots n\}.$$

U es un abierto convexo y por hipótesis, tenemos que $0 \notin U$. Por lo tanto, por el teorema de Hahn-Banach, existe $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in (E^*)^n$ tal que $x^* > 0$ en U. Definimos ahora

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \rightsquigarrow & (x_1^*(x), \ldots, x_n^*(x)). \end{array}$$

Veamos que $\cap_{i=0}^n T(U_i) = \emptyset$. Supongamos que $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \cap_{i=1}^n T(U_i) = \emptyset$. Entonces existen elementos $x_i \in U_i$, $i = 0, \ldots, n$ tales que $T(x_i) = y$. En particular, las coordenadas i-ésimas de $T(x_0)$ y $T(x_i)$ coinciden para $i = 1, \ldots, n$, es decir, $x_i^*(x_i) = x_i^*(x_0)$. Pero en tal caso tenemos que

$$x^*(x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_n) = 0 \text{ con } (x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_n) \in U$$

con lo que llegamos a una contradicción. $\square$

Lema 1.4.2. *Si U es un subconjunto convexo y abierto de un espacio normado E, entonces*

$$U = \operatorname{int} \overline{U}.$$

Demostración. Como U es un abierto contenido en $\overline{U}$ tenemos que $U \subset \operatorname{int} \overline{U}$. Tomemos ahora $x \in \operatorname{int} \overline{U}$ y fijemos $y \in U \setminus \{x\}$. Como $\operatorname{int} \overline{U}$ es abierto tenemos que existe un $z \in \overline{U}$ tal que x es un punto interior del segmento $[y, z]$, es decir, $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ para cierto $\lambda \in (0, 1)$. Tomemos una sucesión $(z_n)_n$ en U convergente a z. Tenemos entonces que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z = \lambda \left(y + \frac{1 - \lambda}{\lambda} (z - z_n) \right) + (1 - \lambda) z_n \tag{1.1}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Como U es abierto y $(z_n)_n$ converge a z tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$y + \frac{1 - \lambda}{\lambda} (z - z_n) \in U.$$

Por lo tanto, como U es convexo, por (1.1) tendremos que $x \in U$. $\square$

Lema 1.4.3. *Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ abierto y convexo, Z un espacio normado finito-dimensional y $T : E \longrightarrow Z$ una aplicación lineal, continua y suprayectiva. Denotemos*

$$U' = \operatorname{int}_{\|\cdot\|} \overline{U}^{w^*}$$

donde estamos considerando $U \subset (E^{**}, w^*)$. Entonces $T^{**}(U') = T(U)$.

Demostración. Claramente tenemos que

$$T^{**}(U') \subset T^{**}(\overline{U}^{w^*}) \subset \overline{T^{**}(U)} = \overline{T(U)}. \tag{1.2}$$

Como $U \subset U'$ tenemos que

$$T(U) = T^{**}(U) \subset T^{**}(U'). \tag{1.3}$$

Por el teorema de la aplicación abierta, tenemos que T y T^{**} son aplicaciones abiertas, así que $T(U)$ y $T^{**}(U')$ son conjuntos abiertos. Por el Lema 1.4.2 tenemos que $T(U) = \operatorname{int}\overline{T(U)}$. Por lo tanto, como $T^{**}(U')$ es abierto, por (1.2) y (1.3) tenemos que $T(U) = T^{**}(U')$. $\square$

Lema 1.4.4. *Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ abierto y convexo, y sea $L \subset E$ un subespacio cerrado de co-dimensión finita. Si $U' = \operatorname{int}_{\|\cdot\|}\overline{U}^{w^*}$ entonces*

$$U' \cap \overline{L}^{w^*} \subset \overline{U \cap L}^{w^*}.$$

Demostración. Sea $z \in U' \cap \overline{L}^{w^*}$. Vamos a construir una red en $U \cap L$ que es w^*-convergente con límite z. Denotemos por

$$\mathscr{H} = \{H \subset E^* : H \text{ es un subespacio finito dimensional y } L^{\perp} \subset H\}.$$

Dotamos a $\mathscr{H}$ del orden dado por la inclusión. Tomemos $H \in \mathscr{H}$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow H^* \\ x &\rightsquigarrow x|_H. \end{aligned}$$

Claramente T es suprayectiva ya que H es de dimensión finita, así que $T^{**}(x^{**}) = x^{**}|_H$ para todo $x^{**} \in E^{**}$. Por lo tanto, por el Lema 1.4.3 tenemos que $T^{**}(U') = T(U)$ por lo que existe un $x_H \in U$ que coincide con z en H y por lo tanto también en $L^{\perp}$. Pero como $z \in \overline{L}^{w^*} = L^{\perp\perp}$, tenemos que $x_H \in L^{\perp\perp} \cap E = L$. Así que la red $(x_H)_{H \in \mathscr{H}} \subset U \cap L$ y claramente es w^*-convergente a z. $\square$

Lema 1.4.5. *Sea E un espacio de Banach, $U_1, \ldots, U_n \subset E$ abiertos y convexos y sea $L \subset E$ un espacio afín cerrado de co-dimensión finita. Denotemos $U_i' = \operatorname{int}_{\|\cdot\|}\overline{U_i}^{w^*}$. Si*

$$\overline{L}^{w^*} \cap U_1' \cap \ldots \cap U_n' \neq \emptyset,$$

tenemos que

$$L \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n \neq \emptyset.$$

Demostración. Podemos suponer que L es un espacio vectorial. El caso $L = E$ sale directamente de los Lemas 1.4.1 y 1.4.3. Veamos el caso $L \neq E$. Tomemos $V_i = U_i \cap L$ y denotemos por V_i' el interior en $(L^{**}, \|\cdot\|)$ de $\overline{V_i}^{w^*}$. Tenemos entonces de nuevo por los Lemas 1.4.1 y 1.4.3 tomando ahora como espacio de Banach el subespacio L que

$$V_1' \cap \ldots \cap V_n' \neq \emptyset \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_n \neq \emptyset. \tag{1.4}$$

Identificando L^{**} con $\overline{L}^{w^*}$ tenemos que $\sigma(L^{**},L^*)$ coincide con w^* restringida a $\overline{L}^{w^*}$ y como L^{**} es w^* cerrado tenemos que $\overline{V_i}^{\sigma(L^{**},L^*)} = \overline{V_i}^{w^*}$. Entonces, por el Lema 1.4.4 tenemos que

$$U_i' \cap \overline{L}^{w^*} \subset \overline{V_i}^{w^*},$$

y como $U_i' \cap \overline{L}^{w^*}$ es abierto en $L^{**} = \overline{L}^{\sigma(L^{**},L^*)}$,

$$U_i' \cap \overline{L}^{w^*} \subset V_i'. \tag{1.5}$$

Finalmente, si $\cap_{i=1}^n U_i' \neq \emptyset$, por (1.5) tenemos que $\cap_{i=1}^n V_i' \neq \emptyset$, así que por (1.4) obtenemos el resultado deseado. □

Ya estamos en condiciones de demostrar el principio de reflexividad local. Obsérvese que este resultado nos viene a decir que dado un espacio de Banach E, si tomamos espacios de dimensión finita $F \subset E^*$ y $G \subset E^{**}$, entonces podemos identificar G con un espacio $G' \subset E$ de modo que $G'|_F = G|_F$. Esta identificación se hace mediante una aplicación lineal $T : G \to G'$ que varía la norma de los elementos menos de una cantidad arbitraria prefijada y además fija los puntos de $G \cap E$.

Teorema 1.4.6 (Principio de reflexividad local)**.** *Sea E un espacio de Banach, sea $F \subset E^*$ un espacio finito dimensional, $G \subset E^{**}$ otro espacio finito dimensional y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una aplicación inyectiva $T : G \to E$ tal que*

(i) $Tx = x$ para todo $x \in E \cap G$,
(ii) $\|T\|\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$, donde estamos considerando $T^{-1} : T(G) \to G$,
(iii) $x^{**}(x^*) = x^*(T(x^{**}))$ para todo $x^{**} \in G$ y todo $x^* \in F$.

Demostración. Vamos a demostrar primero que podemos encontrar T' que cumpla las condiciones (i) y (ii). Sea $k = \dim G - \dim G \cap E$ y sean $z_1^{**}, \dots, z_k^{**} \in G$ tales que

$$G = \mathrm{span}(\{z_1^{**}, \dots, z_k^{**}\} \cup (G \cap E)).$$

Elijamos $\delta \in (0,1)$ tal que

$$0 < \frac{1-\delta}{(1-\delta)(1-2\delta) - \delta(1+\delta)} < 1+\varepsilon. \tag{1.6}$$

Por compacidad podemos elegir $A = \{y_1^{**}, \dots, y_m^{**}\} \subset S_G$ de forma que $S_G \subset A + \delta B_E$. Tenemos que cada y_i^{**} se puede expresar como

$$y_i^{**} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} z_j^{**} + b_i$$

para $i = 1, \dots, m$ con $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in G \cap E$. Tomemos ahora $x_1^*, \dots, x_m^* \in S_{E^*}$ tales que

$$|y_i^{**}(x_i^*)| > 1-\delta \tag{1.7}$$

para $i = 1, \ldots, m$ y consideremos

$$U_i = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E^k : |x_i^*(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x_j - z_j^{**}))| < \delta\},$$

y

$$V_i = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E^k : \| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j + b_i \| < 1 + \delta\}$$

para $i = 1, \ldots, m$. Supongamos por ahora que $\cap_{i=1}^{m}(V_i \cap U_i) \neq \emptyset$ y sea $(x_1, \ldots, x_k) \in \cap_{i=1}^{m}(V_i \cap U_i)$. Está claro que podemos definir $T' : G \to E$ lineal y continua de tal modo que se cumpla (i) y además $T'(z_i^{**}) = x_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Vamos a comprobar que bajo estas condiciones, también se cumple (ii). Por un lado tenemos que

$$\|T' y_i^{**}\| = \| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j + b_i \| < 1 + \delta.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j + b_i \| \quad &\geq \quad |\langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j + b_i, x_i^* \rangle| \geq |\langle x_i^*, \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} z_j + b_i \rangle| \\
&- \quad |\langle x_i^*, \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x_j - z_j^{**}) \rangle| \\
&= \quad |\langle x_i^*, y_i^{**} \rangle| - |\langle x_i^*, \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x_j - z_j^{**}) \rangle| > 1 - 2\delta,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad sale de (1.7) y de que la definición de U_i. Es decir, tenemos que

$$1 - 2\delta < \|T' y_i^{**}\| < 1 + \delta. \tag{1.8}$$

De esta desigualdad sale la propiedad (ii) (a falta de demostrar que $\cap_{i=1}^{m}(V_i \cap U_i) \neq \emptyset$). Si denotamos por P a la envoltura cerrada absolutamente convexa de A, como $S_G \subset A + \delta B_E$, se ve fácilmente que $(1-\delta)B_G \subset P$, así que cualquier $y^{**} \in S_G$ se puede escribir como $y^{**} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i^{**}$ con $\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leq 1/(1-\delta)$. Por lo tanto, por (1.8),

$$\|T' y^{**}\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \|T' y_i^{**}\| \leq (1+\delta) \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leq \frac{1+\delta}{1-\delta}. \tag{1.9}$$

Por otro lado, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|y^{**} - y_{i_0}^{**}\| < \delta$ así que por (1.8) y (1.9) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T' y^{**}\| \quad &\geq \quad \|T' y_{i_0}^{**}\| - \|T'(y^{**} - y_{i_0}^{**})\| > (1 - 2\delta) - \|T'\| \|y^{**} - y_{i_0}^{**}\| \\
&\geq \quad (1 - 2\delta) - \frac{1+\delta}{1-\delta}\delta = \frac{(1-\delta)(1-2\delta) - \delta(1+\delta)}{1-\delta},
\end{aligned}$$

lo que junto a (1.6) nos permite concluir que $\|T'^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$, y esto junto a (1.9) nos da (ii). Nos falta ver que se cumple que $\cap_{i=1}^m (V_i \cap U_i) \neq \emptyset$. Supongamos que es falso. Entonces por el Lema 1.4.1 tenemos que existe una aplicación lineal y continua $S: E^k \longrightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{m} (S(V_i) \cap S(U_i)) = \emptyset. \tag{1.10}$$

Denotemos ahora

$$U_i^{**} = \{(x_1^{**}, \ldots, x_k^{**}) \in (E^k)^{**} : |x_i^*(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x_j^{**} - z_j^{**}))| < \delta\},$$

y

$$V_i^{**} = \{(x_1^{**}, \ldots, x_k^{**}) \in (E^k)^{**} : \|\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j^{**} + b_i\| < 1+\delta\}$$

para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Supongamos de momento que

$$V_i^{**} \subset V_i' = \mathrm{int}_{\|\cdot\|} \overline{V_i}^{((E^{**})^k, w^*)} \text{ y } U_i^{**} \subset U_i' = \mathrm{int}_{\|\cdot\|} \overline{U_i}^{((E^{**})^k, w^*)}. \tag{1.11}$$

En tal caso, por el Lema 1.4.3 tenemos que $S(V_i) = S^{**}(V_i')$ y $S(U_i) = S^{**}(U_i')$, $i = 1, \ldots, m$, de donde se deduce que

$$S^{**}(V_i^{**}) = S(V_i) \text{ y } S^{**}(U_i^{**}) = S(U_i), \tag{1.12}$$

por lo que por (1.10) tenemos que $\cap_{i=1}^m (s^{**}(V_i^{**}) \cap S^{**}(U_i^{**})) = \emptyset$. En particular tenemos que $\emptyset = \cap_{i=1}^m (V_i^{**} \cap U_i^{**}) \ni (z_1^{**}, \ldots, z_k^{**})$ con lo que llegamos a una contradicción.

Veamos ahora que ciertamente se cumple (1.11). Es suficiente ver que $U_i^{**} \subset \overline{U_i}^{((E^{**})^k, w^*)}$ y que $V_i^{**} \subset \overline{V_i}^{((E^{**})^k, w^*)}$ ya que U_i^{**} y V_i^{**} son abiertos. Empecemos por U_i, para $i = 1, \ldots m$. Tomemos $(x_1^{**}, \ldots, x_k^{**}) \in U_i^{**}$. Tomemos una red $((x_{1,\alpha}, \ldots, x_{k,\alpha}))_{\alpha \in \Lambda}$ w^*-converge a $(x_1^{**}, \ldots, x_k^{**})$. Tenemos entonces para α suficientemente grande que

$$|x_i^*(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x_{j,\alpha} - z_j^{**}))| < \delta,$$

es decir, $(x_{1,\alpha}, \ldots, x_{k,\alpha}) \in U_i$ y tomando límites tenemos que $(x_1^{**}, \ldots, x_k^{**}) \in \overline{U_i}^{((E^{**})^k, w^*)}$.

Veamos ahora el caso de V_i. Si $\alpha_{ij} = 0$ para $j = 1, \ldots, k$ es trivial, así que podemos suponer que $\alpha_{ij_0} \neq 0$ para algún $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$. Tomemos $(x_1^{**}, \ldots, x_k^{**}) \in V_i^{**}$ y elijamos $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ y $(x_{j,\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ para $j \in \{1, \ldots, k\} \backslash \{j_0\}$ en E tales que

$$\begin{aligned} w^*\text{-}\lim_{\alpha} x_\alpha &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j^{**} + b_i \\ w^*\text{-}\lim_{\alpha} x_{j,\alpha} &= x_j^{**} \qquad j \in \{1, \ldots, k\} \backslash \{j_0\} \end{aligned}$$

y además, $\|x_\alpha\| < 1+\delta$ para todo $\alpha \in A$. Definimos ahora para $\alpha \in A$

$$x_{j_0,\alpha} = \frac{1}{\alpha_{ij_0}}\left(x_\alpha - (\sum_{j\neq j_0} \alpha_{ij}x_{j,\alpha} + b_j)\right).$$

Tenemos entonces que w^*-lím$_\alpha x_{j_0,\alpha} = x^{**}_{j_0}$ y por lo tanto w^*-lím$_\alpha(x_{1,\alpha},\ldots,x_{k,\alpha}) = (x_1^{**},\ldots x_k^{**})$ (tomando en cada caso la topología w^* en el bidual correspondiente). Además

$$\|\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}x_{j,\alpha} + b_i\| = \|x_\alpha\| < 1+\delta,$$

por lo que $(x_{1,\alpha},\ldots,x_{k,\alpha}) \in V_i$ para todo $\alpha \in \Lambda$ así que $(x_1^{**},\ldots,x_k^{**}) \in \overline{V_i}^{((E^{**})^k,w^*)}$.

Veamos finalmente que existe T que satisface también (iii). Sea

$$L = (z_1^{**},\ldots,z_k^{**}) + (F^\perp)^k) \cap E^k.$$

Como F tiene dimensión finita, para cada $j \in \{1,\ldots k\}$, existe $y_j \in E$ tal que $y_{j|F} = z^{**}_{j\ |F}$. Tenemos entonces

$$L = (y_1,\ldots,y_k) + (F^\perp \cap E)^k$$

así que L es un subespacio afín cerrado de E^k de co-dimensión finita. Además, tenemos que $F = (F^\perp \cap E)^\perp$ por lo que $\overline{F^\perp \cap E} = F^\perp$. Así que

$$\overline{L}^{((E^{**})^k,w^*)} = (y_1,\ldots,y_k) + (F^\perp)^k = (z_1^{**},\ldots,z_k^{**}) + (F^\perp)^k.$$

Supongamos ahora que $\cap_{i=1}^m (V_i \cap U_i) \cap L \neq \emptyset$. Podremos suponer en tal caso que hemos elegido $x_1,\ldots,x_k$ de modo que pertenezcan también a L. Veamos entonces que añadiendo esta condición conseguimos que se cumpla (iii). Si $(x_1,\ldots x_k) \in L$, entonces

$$(Tz_1^{**},\ldots,Tz_k^{**}) - (z_1^{**},\ldots,z_k^{**}) \in (F^\perp)^k,$$

es decir, $Tz_j^{**} - z_j^{**} \in F^\perp$ para $j \in \{1,\ldots,k\}$ y por lo tanto $Tx^{**} - x^{**} \in F^\perp$ para todo $x^{**} \in G$ por lo que tendremos (iii). Veamos que dicha intersección es no vacía. Por un lado,

$$(z_1^{**},\ldots,z_k^{**}) \in \overline{L}^{((E^{**})^k,w^*)} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^m (U_i^{**} \cap V_i^{**})\right).$$

Por otro lado, $V_i^{**} \subset V_i'$ y $U_i^{**} \subset U_i'$, así que por el Lema 1.4.5 terminamos la prueba. □

1.5 Buenas particiones

En esta sección estudiamos lo que llamaremos *buenas particiones* sobre un espacio topológico. El resultado principal de esta sección es la Proposición 1.5.4 que nos permitirá más adelante estudiar distancias a espacios de funciones de la primera clase de Baire, Teorema 4.1.6, ya que una función constante sobre los conjuntos de una buena partición es de la primera clase de Baire, Proposición 4.1.4. Desarrollamos aquí la Proposición 1.5.4 de forma autocontenida para mejor compresión de la sección.

Definición 1.5.1. *Sea X un espacio topológico.*

(i) Se dice que una familia $\{X_i : i \in I\}$ de subconjuntos de X es discretamente σ-descomponible (d.σ.d.) *si para cada $i \in I$ tenemos que $X_i = \bigcup\{X_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$, donde la familia $\{X_{i,n} : i \in I\}$ es discreta para cada $n \in \mathbb{N}$, (véase la Definición 1.2.1).*

(ii) Se dice que una familia $\{X_i : i \in I\}$ de subconjuntos de X es una buena partición de X *si es una familia* d.σ.d. *de subconjuntos $\mathscr{F}_\sigma$ de X tales que $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.*

En la siguiente proposición recogemos algunos resultados sencillos sobre familias *d.σ.d.* y buenas particiones que nos harán falta en la Sección 4.1.

Proposición 1.5.2. *Sea X un espacio topológico.*

(i) Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia d.σ.d. *formada por conjuntos $\mathscr{F}_\sigma$, entonces los conjuntos $X_{i,n}$ de la definición pueden tomarse cerrados.*

(ii) Si $\{X_i : i \in H\}$ es una buena partición de X, y para cada $i \in I$, $\{Y_j^i : j \in J_i\}$ es una buena partición relativa al subespacio X_i, entonces $\{Y_j^i : i \in I, j \in J_i\}$ es una buena partición de X ([HJT85, Lemma 5]).

(iii) Cualquier familia numerable de conjuntos es d.σ.d. *Por lo tanto si la familia $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una partición numerable de X formada por conjuntos $\mathscr{F}_\sigma$, entonces $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición.*

Demostración. Empecemos probando (i). Podemos expresar $X_i = \cup\{X_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $i \in I$, con $\{X_{i,n} : i \in I\}$ discreta para $n \in \mathbb{N}$ ya que la familia es *d.σ.d.* por hipótesis. Por otro lado, cada X_i es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$, así que se puede expresar como $X_i = \cup\{F_{i,m} : m \in \mathbb{N}\}$ con cada conjunto $F_{i,m}$ cerrado. Entonces

$$X_i = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \overline{X_{i,n}} \cap F_{i,n}.$$

Por el Lema 1.2.2 tenemos además que para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia $\{\overline{X_{i,n}} : i \in I\}$ es discreta de donde se deduce que también lo será $\{\overline{X_{i,n}} \cap F_{i,m} : i \in I\}$ para todo $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Esto concluye la prueba de (i).

Veamos ahora (ii). Por hipótesis podemos expresar $X_i = \cup\{X_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$, para cada $i \in I$, con $\{X_{i,n} : i \in I\}$ discreta para $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado tenemos que $Y_j^i = \cup\{Y_{j,m}^i : m \in \mathbb{N}\}$ con $\{Y_{j,m}^i : j \in J_i\}$ discreta (en X_i). En tal caso, podemos poner

$$Y_j^i = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} X_{i,n} \cap Y_{j,m}^i.$$

Por (i) además podemos suponer que los conjuntos $X_{i,n}$ son cerrados. Veamos que la familia

$$\mathscr{X}_{n,m} := \{X_{i,n} \cap Y_{j,m}^i : (i,j) \in I \times J_i\}$$

es discreta para cada $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Dado $x \in X$, existe un entorno U de x tal que corta como mucho con un elemento de la familia $\{X_{i,n} : i \in I\}$. Si no cortase con ninguno, tendríamos que ese entorno no corta con ningún elemento de la familia $\mathscr{X}_{n,m}$. Supongamos entonces que existe $i_0 \in I$ tal que

$$U \cap X_{i_0,n} \neq \emptyset.$$

Si $x \notin X_i$ tenemos en particular que $x \notin X_{i_0,n}$ que es cerrado, así que tomando un entorno más pequeño podemos suponer que U tampoco corta con este conjunto. Supongamos entonces que $x \in X_i$. En tal caso, existe un entorno V de x que corta a lo sumo con un elemento de la familia $\{Y^i_{j,m} : j \in J_i\}$. En este último caso tenemos que $U \cap V$ es un entorno de x que corta a lo sumo con un elemento de $\mathscr{X}_{n,m}$. Con esto queda demostrado que la familia $\mathscr{X}_{n,m}$ es discreta. Por último, es inmediato que $\{Y^i_j : i \in I, j \in J_i\}$ es una partición de X en conjuntos $\mathscr{F}_\sigma$ y esto termina la prueba de (ii).

Para finalizar veamos (iii). Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable. Tenemos entonces que

$$X_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_{n,m}$$

donde $X_{n,n} = X_n$ y $X_{n,m} = \emptyset$ si $m \neq n$. Obviamente $\{X_{n,m} : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia discreta ya que consta tan sólo de un elemento no vacío. □

Definición 1.5.3. *Se dice que un espacio topológico X es perfectamente paracompacto si es paracompacto y sus subconjuntos abiertos son $\mathscr{F}_\sigma$.*

Los espacios métricos son ejemplos de espacios paracompactos. La siguiente proposición aparece en [Jun80] bajo unas condiciones más generales, en vez de considerar espacios paracompactos se consideran espacios *submetacomactos*. Aunque podríamos considerar este caso más general usando prácticamente la misma prueba, preferimos restringirnos aquí al caso de espacios paracompactos que es el caso que vamos a necesitar más adelante. En lo que sigue, Γ es un ordinal y por $\prec$ denotamos el orden de los ordinales.

Proposición 1.5.4 ([Jun80, Proposition 1.16])**.** *Sea X un espacio perfectamente paracompacto y sea $\{G_\gamma : \gamma \prec \Gamma\}$ una sucesión transfinita de conjuntos abiertos cubriendo X. Si $F_\gamma = G_\gamma \setminus \bigcup_{\xi\prec\gamma} G_\xi$, entonces $\{F_\gamma : \gamma \prec \Gamma\}$ es una buena partición de X.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que si $\gamma_1 \prec \gamma_2$ entonces $G_{\gamma_1} \subset G_{\gamma_2}$. Como X es perfectamente paracompacto tenemos que los conjuntos abiertos son conjuntos $\mathscr{F}_\sigma$, o equivalentemente, los conjuntos cerrados son $\mathscr{G}_\delta$. De aquí se deduce que cada conjunto F_γ es a la vez un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ y $\mathscr{G}_\delta$. Así que basta ver que $\{F_\gamma : \gamma \prec \Gamma\}$ es *d.σ.d.*.

Denotemos $F_\Gamma = \emptyset$ y $G_\Gamma = X$. Para $\gamma \preceq \Gamma$ cada F_γ es un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ por lo que tenemos que existe una sucesión $(G_{\gamma,n})_n$ de conjuntos abiertos tales que

$$F_\gamma = \bigcap_n G_{\gamma,n}.$$

Además se puede suponer que $G_{\gamma,n} \subset G_\gamma$ para $\gamma \preceq \Gamma$ y $n \in \mathbb{N}$ (basta tomar $G'_{\gamma,n} = G_{\gamma,n} \cap G_\gamma$ en caso contrario). Para cada $x \in X$ tomemos $\gamma(x) \prec \Gamma$ tal que $x \in F_{\gamma(x)}$. Probemos ahora la siguiente afirmación:

AFIRMACIÓN.- Fijemos un cubrimiento abierto $\mathscr{V}$ de X, y para cada $x \in X$, tomemos $\beta(x) \preceq \Gamma$ tal que $\mathrm{St}(x,\mathscr{V}) \subset G_{\beta(x)}$. Entonces existe una colección numerable $h(\mathscr{V})$ de cubrimientos abiertos de X tales que para cada $x \in X$, si $\gamma(x) \prec \beta(x)$, entonces existe $\delta \prec \beta(x)$ y $\mathscr{W} \in h(\mathscr{V})$ tales que $\mathrm{St}(x,\mathscr{W}) \subset G_\delta$.

Para probar la AFIRMACIÓN, para cada $V \in \mathscr{V}$ tomemos $\gamma(V)$ el menor ordinal tal que $V \subset G_\gamma$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\gamma \preceq \Gamma$ sea

$$V_{\gamma,n} := G_{\gamma,n} \bigcap \bigcup_{\gamma(V) \succeq \gamma} V.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $\mathscr{V}_n = \{V_{\gamma,n} : \gamma \preceq \Gamma\}$. Dado $x \in X$ y $V \in \mathscr{V}$ tales que $x \in V$, se tiene que

$$x \in V \cap F_{\gamma(x)} \subset V \cap G_{\gamma(x)}$$

de donde se deduce que $\gamma(x) \preceq \gamma(V)$ y por lo tanto, $x \in V_{\gamma(x),n}$. Tenemos entonces que $\mathscr{V}_n$ es un cubrimiento abierto de X y como X es paracompacto, podemos tomar un refinamiento abierto $\mathscr{W}_n$ localmente finito. Tomemos ahora $h(\mathscr{V}) = \{\mathscr{W}_n : n \in \mathbb{N}\}$ y veamos que cumple la AFIRMACIÓN. Tomemos $x \in X$ tal que $\beta(x) \succ \gamma(x)$. En tal caso $x \notin F_{\beta(x)}$ y por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin G_{\beta(x),n}$ así que $x \notin V_{\beta(x),n}$. Veamos ahora que $x \notin V_{\gamma,n}$ para $\gamma \succ \beta(x)$. Si $V \in \mathscr{V}$ es tal que $\gamma(V) \succ \beta(x)$ tenemos que V no está contenido en $G_{\beta(x)}$. Por otro lado, $\mathrm{St}(x,\mathscr{V}) \subset G_{\beta(x)}$ de donde se deduce que $x \notin V$ si $\gamma(V) \succ \beta(x)$. Esto último nos lleva a que $x \notin V_{\gamma,n}$ para $\gamma \succ \beta(x)$. Hemos demostrado entonces que

$$x \notin \bigcup_{\gamma \succeq \beta(x)} V_{\gamma,n}. \tag{1.13}$$

Como $\mathscr{W}_n$ es un cubrimiento localmente finito tenemos que x tiene una cantidad finita de entornos $W_n^1, W_n^2, \ldots, W_n^k \in \mathscr{W}_n$, $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathrm{St}(x,\mathscr{W}_n) = \bigcup_{i=1}^{k} W_n^i.$$

Cada W_n^i está contenido en un conjunto $V_{\gamma_i,n}$ con $\gamma_i \prec \beta(x)$ para $1 \leq i \leq k$ por (1.13). Tomemos ahora $\delta = \max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \prec \beta(x)$. Tenemos entonces que

$$\mathrm{St}(x,\mathscr{W}_n) = \bigcup_{i=1}^{k} W_n^i \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{\gamma_i,n} \subset G_\delta$$

con lo que termina la prueba de la AFIRMACIÓN.

Fijemos un cubrimiento abierto $\mathscr{V}$ de X y denotemos $\mathscr{C}_1 := h(\mathscr{V})$. Definamos ahora

$$\mathscr{C}_2 := \bigcup_{\mathscr{W} \in C_1} h(\mathscr{W}).$$

Siguiendo por recurrencia, para $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$\mathscr{C}_{n+1} := \bigcup_{\mathscr{W} \in C_n} h(\mathscr{W}).$$

Tomemos ahora

$$\mathscr{C} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n.$$

$\mathscr{C}$ es una familia numerable de cubrimientos de X. Veamos que dado $x \in X$, existe $\mathscr{W} \in \mathscr{C}$ tal que $\mathrm{St}(x,\mathscr{W}) \subset G_{\gamma(x)}$. Para ello, fijemos $x \in X$ y tomemos

$$\alpha(x) := \text{mín}\{\gamma \preceq \Gamma : \text{ existe } \mathscr{W} \in \mathscr{C} \text{ tal que } \mathrm{St}(x,\mathscr{W}) \subset G_\gamma\}.$$

Sea ahora $\mathscr{W} \in \mathscr{C}$ tal que $\mathrm{St}(x,\mathscr{W}) \subset G_{\alpha(x)}$. Supongamos que $\alpha(x) \succ \gamma(x)$. Tenemos entonces que existe $\mathscr{W}' \in h(\mathscr{W}) \subset \mathscr{C}$ y $\delta \prec \alpha(x)$ tales que $\mathrm{St}(x,\mathscr{W}') \subset G_\delta$, pero esto es imposible por definición de $\alpha(x)$. Por lo tanto hemos demostrado que para todo $x \in X$ existe $\mathscr{W} \in \mathscr{C}$ tal que $\mathrm{St}(x,\mathscr{W}) \subset G_{\gamma(x)}$.

Denotemos $\mathscr{C} = \{\mathscr{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ y para $\gamma \prec \Gamma$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$F_{\gamma,n} := \{x \in F_\gamma : \mathrm{St}(x,\mathscr{V}_n) \subset G_\gamma\}.$$

Como $x \in F_\gamma$ si, y sólo si, $\gamma(x) = \gamma$, tenemos que justo por lo que acabamos de demostrar podemos afirmar que

$$F_\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{\gamma,n}$$

para todo $\gamma \prec \Gamma$. Para terminar sólo nos queda ver que la familia $\{F_{\gamma,n} : \gamma \prec \Gamma\}$ es discreta para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello tomemos $V \in \mathscr{V}_n$ tal que $x \in V$ y tomemos γ tal que $x \in F_\gamma$. Si $\gamma' \succ \gamma$ se tiene que

$$F_{\gamma',n} \bigcap G_\gamma \subset F_{\gamma'} \bigcap G_\gamma = \emptyset.$$

Supongamos ahora que existe $z \in F_{\gamma',n} \cap V$ con $\gamma' \prec \gamma$. En tal caso tenemos que

$$x \in V \subset \mathrm{St}(z,\mathscr{V}_n) \subset G_{\gamma'}$$

y por lo tanto

$$x \in G_{\gamma'} \bigcap F_\gamma = \emptyset$$

lo que es una contradicción por lo que $F_{\gamma',n} \cap V = \emptyset$ para todo $\gamma' \prec \gamma$. Por lo tanto $V \cap G_\gamma$ es un entorno abierto de x que corta a lo sumo con un elemento de la familia $\{F_{\gamma,n} : \gamma \prec \Gamma\}$ con lo que termina la prueba. $\square$

1.6 Lema de Pták

En esta sección desarrollamos el Lema de Pták, Teorema 1.6.4. Dicho resultado es una herramienta muy útil para tratar problemas sobre convexidad. Nos hará falta más adelante para demostrar una versión cuantitativa del teorema de Mazur (y a su vez, este teorema nos hará falta en el Capítulo 4) y para demostrar el Teorema 2.3.1 relativo a envolturas convexas. La notación y las demostraciones de esta sección se han tomado de [Tod97, Section 1.3].

Definición 1.6.1. *Una media convexa sobre* $\mathbb{N}$ *es una función* $\mu : \mathbb{N} \to [0,1]$ *tal que*

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i) = 1$

(ii) El soporte de μ, $\mathrm{sop}(\mu) = \{i \in \mathbb{N} : \mu(i) > 0\}$, *es finito.*

Para $F \subset \mathbb{N}$, denotamos

$$\mu(F) = \sum_{i \in F} \mu(i).$$

Definición 1.6.2. *Sea* $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ *una familia de subconjuntos finitos de* $\mathbb{N}$. *Se dice que* $\mathscr{F}$ *es bien fundamentada si no existe ninguna sucesión creciente* $(n_i)_i \subset \mathbb{N}$ *tal que para cada* $k \in \mathbb{N}$, *exista* $S_k \in \mathscr{F}$ *con* $\{n_1, \ldots, n_k\} \subset S_k$.

Notación: Denotemos por $\mathbf{M}$ al conjunto de todas las medias convexas sobre $\mathbb{N}$, y dado $B \subset \mathbb{N}$ denotemos por $\mathbf{M}_B$ al conjunto de todas las medidas convexas $\mu \in \mathbf{M}$ tales que $\mathrm{sop}(\mu) \subset B$. Si $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ y $\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}$ entonces

$$\mathscr{F}_K = \{F \in \mathscr{F} : F \cap K \neq \emptyset\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ pongamos

$$\mathbf{M}_B(\mathscr{F}, \varepsilon) = \{\mu \in \mathbf{M}_B : \text{ para todo } F \in \mathscr{F}, \mu(F) < \varepsilon\}.$$

Si $B = \mathbb{N}$, $\mathbf{M}_B(\mathscr{F}, \varepsilon)$ se denota simplemente como $\mathbf{M}(\mathscr{F}, \varepsilon)$.

Lema 1.6.3. *Sea* $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ *y* $\varepsilon > 0$. *Entonces para todo conjunto* $B \subset \mathbb{N}$ *tal que*

$$\mathbf{M}_B(\mathscr{F}, \varepsilon) = \emptyset$$

y para todo $0 < \delta < \varepsilon$, *existe un conjunto finito* $K \subset B$ *tal que*

$$\mathbf{M}_B(\mathscr{F}_K, \delta) = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que

$$\mathbf{M}_B(\mathscr{F}, \varepsilon) = \emptyset \tag{1.14}$$

y que existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$\mathbf{M}_B(\mathscr{F}_K, \delta) \neq \emptyset \tag{1.15}$$

para todo conjunto finito $K \subset B$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta + 1/m < \varepsilon$ y elijamos $\emptyset \neq K_1 \subset B$ un conjunto finito arbitrario. Por (1.15) podemos tomar $\mu_1 \in \mathbf{M}_B(\mathscr{F}_{K_1}, \delta) \neq \emptyset$. Definamos ahora por recursión μ_i con $\mathrm{sop}(\mu_i) \subset B$ y $K_i \subset B$ finito para $i = 1, \ldots, m$. Si hemos definido K_{i-1}, μ_{i-1}, tomemos

$$K_i = K_{i-1} \cup \mathrm{sop}(\mu_{i-1}).$$

Como K_{i-1} y $\operatorname{sop}(\mu_{i-1})$ son subconjuntos finitos de B, tenemos que el conjunto K_i es un subconjunto finito de B no vacío. De nuevo por (1.15) tenemos que podemos tomar $\mu_i \in \mathbf{M}_B(\mathscr{F}_{K_i}, \delta)$. Definamos ahora

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_i.$$

Vamos a ver que $\mu \in \mathbf{M}_B(\mathscr{F}, \varepsilon)$ con lo que llegaríamos a una contradicción con (1.14) y con ello quedaría probado el lema. Tenemos que probar por tanto que para todo $F \in \mathscr{F}$ se tiene que $\mu(F) < \varepsilon$. Supongamos primero que $F \cap K_m = \emptyset$. En tal caso, como $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m$ tenemos que $F \cap K_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, m$. Por definición de K_i, $i = 2, \ldots, m$ tenemos que $F \cap \operatorname{sop}(\mu_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, m-1$. Por lo tanto

$$\mu(F) = \frac{1}{m}\mu_m(F) \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que $F \cap K_m \neq \emptyset$ y tomemos

$$j = \text{mín}\{i : 1 \leq i \leq m \text{ y } K_i \cap F \neq \emptyset\}.$$

En tal caso, para $1 \leq i < j-2$ tenemos que $F \cap \operatorname{sop}(\mu_i) = \emptyset$. Por lo tanto para $1 \leq i < j-2$ tenemos que $\mu_i(F) = 0$. Como $F \in \mathscr{F}_{K_i}$ para $j \leq i \leq m$, tenemos que $\mu_i(F) < \delta$. Si $j = 1$ tenemos que

$$\mu(F) = \frac{1}{m}(\mu_1(F) + \cdots + \mu_m(F)) < \frac{m\delta}{m} = \frac{1}{\delta} < \varepsilon,$$

y si $j > 1$,

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \frac{1}{m}\Big((\mu_1(F) + \cdots + \mu_{j-2}(F)) + \mu_{j-1}(F) + (\mu_j(F) + \cdots + \mu_m(F))\Big) \\ &< \frac{1}{m}(1 + m\delta) = \delta + \frac{1}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(F) < \varepsilon$ con lo que terminamos la prueba del lema. □

Teorema 1.6.4 (Lema de Pták, [Ptá63]). *Si $\mathscr{F}$ es una familia bien fundamentada de subconjuntos de $\mathbb{N}$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mu \in \mathbf{M}$, tal que $\mu(F) < \varepsilon$ para todo $F \in \mathscr{F}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que para algún $\varepsilon > 0$, $\mathbf{M}(\mathscr{F}, \varepsilon) = \emptyset$. Tomemos $B_1 = \mathbb{N}$. Por el Lema 1.6.3, existe un subconjunto finito K_1 de B_1 tal que

$$\mathbf{M}_{B_1}(\mathscr{F}_{K_1}, \varepsilon/2) = \emptyset.$$

Denotemos $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_{K_1}$. Procediendo por recursión, vamos a definir K_i, B_i y $\mathscr{F}_i$. Supongamos que tenemos definidos K_{i-1}, B_{i-1} y $\mathscr{F}_{i-1}$ de forma que

$$\mathbf{M}_{B_{i-1}}(\mathscr{F}_{i-1}, \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}) = \emptyset.$$

Tomemos $B_i = B_{i-1} \backslash K_{i-1}$. Como $\mathbf{M}_{B_i} \subset \mathbf{M}_{B_{i-1}}$, por el Lema 1.6.3 tenemos que existe $K_i \subset B_i$ finito tal que

$$\mathbf{M}_{B_i}(\mathscr{F}_i, \frac{\varepsilon}{2^i}) = \emptyset$$

donde $\mathscr{F}_i = (\mathscr{F}_{i-1})_{K_i}$. Para $i \geq 1$ definamos

$$\mathscr{K}_i = \left\{ \{k_1, \ldots, k_i\} : k_j \in K_j \text{ para } 1 \leq j \leq i \text{ y } \{k_1, \ldots, k_i\} \subset F \text{ para algún } F \in \mathscr{F} \right\}.$$

Como los conjuntos K_n, $n \in \mathbb{N}$ son finitos tenemos que $\mathscr{K}_i$ es finito para todo $i \in \mathbb{N}$. Además, por construcción

$$\mathbf{M}_{B_i}(\mathscr{F}_i, \frac{\varepsilon}{2^i}) = \emptyset \text{ para } i \in \mathbb{N}$$

de donde podemos deducir que $\mathscr{F}_i \neq \emptyset$ y por lo tanto $\mathscr{K}_i \neq \emptyset$ para $i \in \mathbb{N}$. Claramente los conjuntos $\mathscr{K}_i$ son disjuntos.

AFIRMACIÓN.- Existe $\{k^1\} \in \mathscr{K}_1$ tal que para todo $i > 1$ existe $A \in \mathscr{K}_i$ con $\{k^1\} \subset A$.

Para probar la AFIRMACIÓN observemos primero que de la definición de los conjuntos $\mathscr{K}_i$ se tiene que

$$\text{si } A \in \mathscr{K}_i, \text{ entonces } A \cap \bigcup_{s=1}^{j} K_s \in \mathscr{K}_j \text{ para } j = 1, 2, ..., i. \tag{1.16}$$

De aquí se deduce directamente que dado $\{k\} \in \mathscr{K}_1$, el conjunto

$$A_{\{k\}} = \{i \in \mathbb{N} \text{ tal que existe } A \in \mathscr{F}_i \text{ con } \{k\} \subset A\}$$

es o finito, o bien todo $\mathbb{N}$. Además, por (1.16) también se tiene que

$$\bigcup_{\{k\} \in \mathscr{K}_1} A_{\{k\}} = \mathbb{N}.$$

Como $\mathscr{K}_1$ es un conjunto finito, se tiene que algún $A_{\{k\}}$ no es finito, así que existe $\{k^1\} \in \mathscr{K}_1$ tal que $A_{\{k\}} = \mathbb{N}$ y esto prueba la AFIRMACIÓN.

Para $i > 1$ definamos ahora

$$\mathscr{K}_i^2 = \{A \in \mathscr{K}_i : \{k^1\} \subset A\}.$$

Gracias a la AFIRMACIÓN tenemos que los conjuntos $\mathscr{K}_i^2$ son no vacíos. Además está claro que son finitos y disjuntos dos a dos. Procediendo de forma análoga a como hicimos para probar la AFIRMACIÓN, podemos encontrar $k^2 \in K_2$ tal que $\{k^1, k^2\} \in \mathscr{K}_2^2 \subset \mathscr{K}_2$ y para todo $i > 2$ existe $A \in \mathscr{K}_i^2 \subset \mathscr{K}_i$ tal que $\{k^1, k^2\} \in A$.

Siguiendo por recurrencia, podemos encontrar una sucesión $(k^i)_i$ con $k^i \in K_i$, y de forma que

$$\{k^1, k^2, \ldots, k^i\} \in \mathscr{K}_i, \, i \in \mathbb{N}.$$

Por definición de $\mathscr{K}_i$ tenemos que existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $\{k^1, k^2, \ldots, k^i\} \subset F$ y con ello, tomando una subsucesión creciente de $(k^i)_i$, concluimos que $\mathscr{F}$ no es una familia bien fundamentada con lo que termina la prueba. $\square$

Capítulo 2

Distancia a espacios de funciones continuas

En este capítulo estudiamos problemas relacionados con distancias a espacios de funciones continuas. Sea $C(X)$ el espacio de funciones continuas definidas en el espacio topológico X y que toman valores reales. Consideramos ahora $C(X) \subset \mathbb{R}^X$ y sea d la métrica de la convergencia uniforme en $\mathbb{R}^X$ que aceptamos que tome valores infinitos. Por el teorema de Tychonoff tenemos que si τ_p es la topología producto en $\mathbb{R}^X$, entonces un conjunto puntualmente acotado $H \subset C(X)$ es τ_p-relativamente compacto en $C(X)$ si, y sólo si, $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ es un subconjunto de $C(X)$. Dado que los límites uniformes de funciones continuas son funciones continuas, esto último ocurre si, y sólo si,

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) = \sup_{f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^X}} d(f, C(X)) = 0$$

por lo que $\hat{d}$ nos sirve para medir cómo de lejos está H de ser un τ_p-relativamente compacto en $C(X)$.

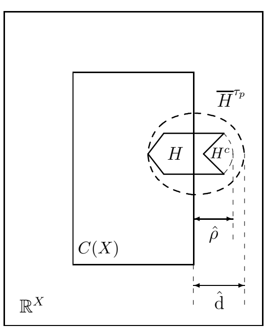


Figura 1

El tipo de problemas que nos vamos a plantear en este capítulo están ilustrados en la Figura 1: sea H^c el conjunto de todos los elementos de $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ que son puntos de aglomeración de sucesiones en H (H^c puede ser estrictamente más pequeño que $\overline{H}^{\mathbb{R}^X}$). Si $\hat{\rho}$ es la *peor* distancia de H^c a $C(X)$, la inclusión $H^c \subset \overline{H}^{\mathbb{R}^X}$ implica que $\hat{\rho} \leq \hat{d}$. En este capítulo estudiamos la existencia de una constante universal M tal que para todo conjunto puntualmente acotado $H \subset \mathbb{R}^X$ se tiene que $\hat{d} \leq M\hat{\rho}$. En la Sección 2.4 vemos que esta constante puede tomarse como $M = 2$ si $X = K$ es un conjunto compacto y H es un conjunto uniformemente acotado en $C(K)$. Más generalmente, en la Sección 2.5 vemos que para la clase de los espacios numerablemente K-determinados X (también denominada por topólogos como espacios Σ-Lindelöf X) podemos tomar $M = 5$. La desigualdad

$$\hat{\rho} \leq \hat{d} \leq 5\hat{\rho}, \tag{2.1}$$

de alguna forma nos da una lectura “cuantitativa” del hecho de que los conjuntos τ_p-relativamente numerablemente compactos y τ_p-relativamente compactos de $C(X)$ son los mismos para los espacios X en cuestión. En realidad, probamos una desigualdad más fina que (2.1), véase el Teorema 2.5.7, que nos da *la diferencia cuantitativa entre compacidad numerable y compacidad* en dichos espacios $(C(X),\tau_p)$.

Otro caso de estimaciones de $\hat{d}$ que nos dan propiedades cualitativas de los conjuntos H se puede encontrar en [CMR06]: la principal herramienta que se utiliza en este artículo es la técnica del ε-intercambio de límites dobles, Definición 2.1.1. En este capítulo también desarrollamos en las Secciones 2.1, 2.2 y 2.3 los resultados obtenidos en [CMR06] para lo que damos demostraciones distintas a las presentadas allí. El resto de las secciones contienen resultados originales.

2.1 Límites iterados y oscilaciones

La siguiente definición fue introducida por Grothendieck en [Gro52] en el caso $\varepsilon = 0$ para caracterizar la compacidad en espacios de funciones continuas. Luego en [FHMZ05] se amplió para $\varepsilon \geq 0$ en espacios de Banach, donde se usó para estudiar distancias de espacios a espacios de Banach (véase Capítulo 3). Por último en [CMR06] aparece esta noción tal como se presenta aquí para estudiar la distancia $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K))$ que hemos presentado en la introducción.

Definición 2.1.1. *Sea (Z,d) un espacio métrico, X un conjunto y $\varepsilon \geq 0$.*

(i) Se dice que una sucesión $(f_m)_m$ en Z^X ε-intercambia límites con una sucesión $(x_n)_n$ en X si

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) \leq \varepsilon$$

cuando los límites involucrados existan.

(ii) Se dice que un subconjunto H de Z^X ε-intercambia límites con un subconjunto A de X, si toda sucesión en H ε-intercambia límites con cada sucesión en A. Cuando $\varepsilon = 0$ simplemente diremos que H intercambia límites con A.

En la definición de ε-intercambio de límites se pueden sustituir las sucesiones por redes tal como vemos a continuación.

Lema 2.1.2 ([CMR06, Lemma 2.1])**.** *Sea X un conjunto, (Z,d) un espacio métrico, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red en X y $(f_\beta)_{\beta\in J}$ una red en Z^X tales que existen los siguientes límites iterados*

$$\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha) \qquad y \qquad \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha).$$

Entonces existen sucesiones crecientes de índices $(\alpha_n)_n \subset I$ y $(\beta_m)_m \subset J$ tales que

$$\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha) = \lim_n \lim_m f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}),$$

$$\lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha) = \lim_m \lim_n f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}).$$

Demostración. Para simplificar la notación, denotemos por $p_\beta = \text{lím}_\alpha f_\beta(x_\alpha)$, $q_\alpha = \text{lím}_\beta f_\beta(x_\alpha)$, $p = \text{lím}_\beta p_\beta$ y $q = \text{lím}_\alpha q_\alpha$. Sea $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(q_{\alpha_1}, q) < 1$ y supongamos que hemos definido $\beta_k \in \mathbb{N}$ para $1 \leq k \leq n-1$ y $\alpha_k \in \mathbb{N}$ para $1 \leq k \leq n$. Entonces, usando que $\text{lím}_\beta p_\beta = p$ y que $\text{lím}_\beta f_\beta(x_{\alpha_k}) = q_{\alpha_k}$ para $1 \leq k \leq n$ podemos tomar β_n (mayor que β_{n-1} si $n > 1$) tal que cumpla que $d(p_{\beta_n}, p) < n^{-1}$ y $d(f_{\beta_n}(x_{\alpha_k}), q_{\alpha_k}) < n^{-1}$ para $1 \leq k \leq n$. Por otro lado, como $\text{lím}_\alpha q_\alpha = q$ y $\text{lím}_\alpha f_{\beta_k}(x_\alpha) = p_{\beta_k}$ para $1 \leq k \leq n$ podemos tomar $\alpha_{n+1} \succ \alpha_n$ tal que $d(q_{\alpha_{n+1}}, q) < (n+1)^{-1}$ y $d(f_{\beta_k}(x_{\alpha_{n+1}}), p_{\beta_k}) < (n+1)^{-1}$ para $1 \leq k \leq n$. Tendremos entonces claramente que $(\alpha_n)_n$ y $(\beta_m)_m$ son las sucesiones que buscábamos. □

Corolario 2.1.3. *Sea X un conjunto, (Z,d) un espacio métrico, $H \subset Z^X$ y $A \subset X$. Son equivalentes:*

(i) H ε-intercambia límites con A.

(ii) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red en A y $(f_\beta)_{\beta_J}$ es una red en H entonces siempre que los límites involucrados existan, se cumple que

$$d(\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha), \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha)) \leq \varepsilon.$$

En [CMR06] se usa el Lema 2.1.2 en la prueba de los resultados que aparecen en esta sección. Sin embargo, tal como vamos a hacer aquí, se pueden demostrar estos resultados directamente sin necesidad de utilizar dicho lema, trabajando directamente con sucesiones. El siguiente resultado nos va a permitir ligar las nociones de ε-intercambio de límites y distancia. En la Definición 1.1.8 hemos introducido el concepto de semioscilación $\text{osc}^*(f)$ que utilizamos a continuación.

Proposición 2.1.4 ([CMR06, Proposition 2.2])**.** *Sea (Z,d) un espacio métrico compacto, sea X un espacio topológico y H un subconjunto de $C(X,Z)$. Tenemos que:*

(i) Si H ε-intercambia límites con X y $f \in \overline{H}^{Z^X}$, entonces $\text{osc}^*(f) \leq \varepsilon$.

(ii) Si X es numerablemente compacto y $\text{osc}^*(f) \leq \varepsilon$ para todo $f \in \overline{H}^{Z^X}$, entonces H ε-intercambia límites con X.

Demostración. Veamos primero (i). Sea $f \in \overline{H}^{Z^X}$ y sea $x_0 \in X$. Denotemos $\delta = \text{osc}^*(f, x_0)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_n)_n$ en X y $(f_n)_n$ en H tales que:

(i) $d(f(x_0), f(x_n)) > \delta - \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$,

(ii) $d(f(x_i), f_n(x_i)) < \frac{1}{n}$ para $n \geq 1, i = 0, 1, \ldots, n$,

(iii) $d(f_j(x_0), f_j(x_{n+1})) < \frac{1}{n+1}$ para $n \geq 1, j = 1, 2, \ldots, n$.

Como $\text{osc}^*(f, x_0) = \delta$, existe $x_1 \in X$ tal que $d(f(x_0), f(x_1)) > \delta - 1$. Como $f \in \overline{H}^{Z^X}$, podemos encontrar $f_1 \in H$ tal que $d(f(x_i), f_1(x_i)) < 1$ para $i = 0, 1$. Claramente x_1 y f_1 cumplen las condiciones (i) y (ii). Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$ hemos construido f_i y x_i para todo $i \leq n$. Tomemos

$$U_n = \{x \in X : d(f_j(x_0), f_j(x)) < 1/(n+1) \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Por la continuidad de las funciones f_j tenemos que U_n es un entorno abierto de x_0. Debido a que $\text{osc}^*(f, x_0) = \delta$, podemos encontrar $x_{n+1} \in U_n$ tal que $d(f(x_0), f(x_{n+1})) > \delta - \frac{1}{n+1}$. Usando de nuevo que $f \in \overline{H}^{Z^X}$, podemos encontrar $f_{n+1} \in H$ tal que para $i = 0, 1, \ldots, n+1$ se tiene que $d(f(x_i), f_{n+1}(x_i)) < 1/(n+1)$. Claramente las sucesiones construidas cumplen las condiciones que buscábamos.

Como Z es un espacio métrico compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $(f(x_n))_n$ converge en Z. La condición (ii) implica que

$$\lim_n f_n(x_k) = f(x_k)$$

para todo k y por lo tanto

$$\lim_m \lim_n f_n(x_m) = \lim_m f(x_m).$$

Por la condición (iii) se tiene que

$$\lim_k f_n(x_k) = f_n(x_0)$$

por lo que

$$\lim_n \lim_m f_n(x_m) = \lim_n f_n(x_0) = f(x_0).$$

Por lo tanto, como H ε-intercambia límites con X tenemos que

$$d(f(x_0), \lim_m f(x_m)) \leq \varepsilon.$$

Por otro lado, de la condición (i) se deduce que

$$d(f(x_0), \lim_m f(x_m)) \geq \delta = \operatorname{osc}^*(f, x_0)$$

y en consecuencia $\operatorname{osc}^*(f, x_0) \leq \varepsilon$.

Veamos ahora (ii). Tomemos sucesiones $(x_n)_n$ en X y $(f_m)_m$ en H tales que los siguientes límites existan

$$\lim_n \lim_m f_m(x_n) \qquad \text{y} \qquad \lim_m \lim_n f_n(x_m).$$

Como X es numerablemente compacto, la sucesión $(x_n)_n$ tiene un punto de aglomeración x en X. Como Z^X es compacto, existe $f \in \overline{H}^{Z^X}$ un punto de aglomeración de $(f_m)_m$ en Z^X. Observemos que se tiene la desigualdad

$$d(f(x), \lim_n f(x_n)) \leq \operatorname{osc}^*(f, x). \tag{2.2}$$

Como se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_n \lim_m f_m(x_n) &= \lim_n f(x_n)\\ \lim_m \lim_n f_m(x_n) &= \lim_m f_m(x) = f(x),\end{aligned}$$

tenemos que

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) = d(f(x), \lim_n f(x_n)) \overset{(2.2)}{\leq} \operatorname{osc}^*(f, x) \leq \varepsilon.$$

$\square$

El siguiente lema nos permite estudiar que pasa cuando el ε-intercambio de límites se da en un subespacio denso.

Lema 2.1.5 ([CMR06, Lemma 2.3])**.** *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico compacto, D un subconjunto denso de X, $\varepsilon \geq 0$ y $f \in Z^X$. Si todo punto $x \in X$ tiene un entorno U_x tal que*

$$\sup_{y \in U_x \cap D} d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

entonces $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$.

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $y \in U_x$ fijo. Tomemos $d \in D \cap U_x \cap U_y$. Entonces tenemos que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(d)) + d(f(d), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

y por lo tanto $\operatorname{osc}^*(f,x) \leq 2\varepsilon$. Como x era arbitrario el lema queda demostrado. □

Proposición 2.1.6 ([CMR06, Proposition 2.4])**.** *Sea (Z,d) un espacio métrico compacto, X un espacio topológico y H un subconjunto de $C(X,Z)$. Si H ε-intercambia límites con un conjunto denso D de X, entonces* $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$ *para todo* $f \in \overline{H}^{Z^X}$*, y por lo tanto,* $\operatorname{osc}(f) \leq 4\varepsilon$.

Demostración. Fijemos $\delta > \varepsilon$. Por el Lema 2.1.5 es suficiente con probar que si $f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$, entonces para cada $y \in K$ existe un entorno V de y en K tal que

$$\sup_{d \in V \cap D} d(f(d), f(y)) \leq \delta. \tag{2.3}$$

Veamos esto por contradicción. Supongamos que

$$\sup_{d \in U \cap D} d(f(d), f(y)) > \delta$$

para cada entorno U de y. Denotemos $d_0 = y$. Como $f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$, podremos encontrar $g_1 \in H$ que satisface que $d(g_1(d_0), f(d_0)) \leq 1$. Usando que g_1 es continua, tenemos que existe un entorno U de y tal que $d(g_1(d_0), g_1(d)) \leq 1$ para todo d en U. Por hipótesis, existe $d_1 \in U \cap D$ tal que $d(f(d_1), f(d_0)) > \delta$. Continuando por recurrencia, obtenemos una sucesión $(d_n)_n$ en D y $(g_n)_n$ en H tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(g_n(d_i), f(d_i)) &\leq \frac{1}{n} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 && (2.4)\\ d(g_j(d_n), g_j(d_0)) &\leq \frac{1}{n} \quad j = 1, \ldots, n && (2.5)\\ d(f(d_n), f(d_0)) &> \delta. && (2.6) \end{aligned}$$

Tomando una subsucesión podemos suponer que $(f(d_n))_n$ converge en $\mathbb{R}$. Tenemos que

$$\lim_n \lim_m g_m(d_n) \overset{(2.4)}{=} \lim_n f(d_n),$$

$$\lim_m \lim_n g_m(d_n) \overset{(2.5)}{=} \lim_m g_m(d_0) \overset{(2.4)}{=} f(d_0) = f(y),$$

así que

$$d(\lim_n \lim_m g_m(d_n), \lim_m \lim_n g_m(d_n)) = d(\lim_n f(d_n), f(y)) \overset{(2.6)}{\geq} \delta,$$

lo que contradice que H ε-intercambia límites con D con lo que terminamos la prueba. □

Corolario 2.1.7. *Sea X un espacio topológico numerablemente compacto, (Z,d) un espacio métrico compacto y $H \subset C(X,Z)$. Si H ε-intercambia límites con un conjunto denso D de X, entonces H 2ε-intercambia límites con X.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.6, tenemos que $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$ para todo $f \in \overline{H}^{Z^X}$, y por lo tanto, aplicando la Proposición 2.1.4 tendremos que H 2ε-intercambia límites con X. □

El siguiente ejemplo nos muestra que las constantes 2 y 4 de la Proposición 2.1.6 no pueden ser mejoradas.

Ejemplo 2.1.8 ([CMR06]). *Sea $X = Z = [-1,1]$ dotado de la métrica euclídea. Sea $g : X \to Z$ la aplicación definida para $x \in [-1,1]$ como*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \in \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\}, \\ -\frac{1}{2} & si\ x \in [-1,0)\setminus\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\}, \\ 0 & si\ x = 0, \\ \frac{1}{2} & si\ x \in (0,1]\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}, \\ 1 & si\ x \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}. \end{cases}$$

Como la antiimagen mediante f de cada conjunto abierto es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ contenido en $[-1,1]$, tenemos que g es una función de la primera clase de Baire. Por lo tanto, existe una sucesión $(f_n)_n$ de funciones continuas de $[-1,1]$ en $[-1,1]$ que convergen puntualmente hacia g. Definamos $H = \{f_n : n \in N\}$ y $D = [-1,1]\setminus\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \cdots\}$.

Usando que $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia g y la definición de g se obtiene inmediatamente que H $(1/2)$-intercambia límites con D y 1-intercambia límites con X. Por otro lado, la función g, que de hecho pertenece a la clausura de H, cumple que $\operatorname{osc}(g) = 2$ y $\operatorname{osc}^*(g) = 1$ con lo que podemos concluir que las constantes obtenidas son óptimas. □

Sea X un espacio numerablemente compacto y sea H un subconjunto τ_p-relativamente numerablemente compacto en $C(X,Z)$. Si tenemos sucesiones $(x_m)_m$ en X y $(f_n)_n$ en H tales que los límites iterados existen, entonces es fácil comprobar que ambos límites son iguales a $f(x)$ donde f es un punto de aglomeración de $(f_n)_n$ en $C(X,Z)$ y x es un punto de aglomeración de $(x_m)_m$ en X. Por lo tanto, tenemos que H intercambia límites con X. Debido a esto tenemos que las

Proposiciones 2.1.4 y 2.1.6 son versiones cuantitativas de un resultado de Eberlein-Grothendieck (véase por ejemplo [Flo80, p. 12]) que se obtiene haciendo $\varepsilon = 0$ en los resultados mencionados y que recogemos en la proposición siguiente.

Corolario 2.1.9. *Sea X un espacio numerablemente compacto, Z un espacio métrico compacto y H un subconjunto de $C(X,Z)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) H es τ_p-relativamente numerablemente compacto en $C(X,Z)$.
(ii) H intercambia límites con X.
(iii) H intercambia límites con algún conjunto denso de X.
(iv) $\overline{H}^{Z^X} \subset C(X,Z)$.
(v) H es τ_p-relativamente compacto en $C(X,Z)$.

2.2 Límites iterados y distancias

Usando ahora la Proposición 2.1.4 y el Teorema 1.1.9 podemos ligar la noción de ε-intercambio de límites con la de distancia a espacios de funciones continuas.

Corolario 2.2.1 ([CMR06, Corollary 2.6])**.** *Sea X un espacio topológico y sea H un conjunto uniformemente acotado de $C(X)$.*

(i) Si X es normal y H ε-intercambia límites con X, entonces

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) \leq \varepsilon.$$

(ii) Si X es numerablemente compacto y $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) \leq \varepsilon$, entonces H 2ε-intercambia límites con X.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 1.1.9 y la Proposición 2.1.4. Nótese que podemos usar la Proposición 2.1.4 porque H es uniformemente acotado: si $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in X$ y $f \in H$, podemos mirar $H \subset C(X, [-M, M])$. $\square$

La Proposición 2.1.7 junto con el Teorema 1.1.9 nos da el siguiente Corolario.

Corolario 2.2.2. *Sea X un espacio normal y sea H un subconjunto uniformemente acotado de $C(X)$. Si H ε-intercambia límites con un conjunto denso de X, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) \leq 2\varepsilon$.*

Gracias el Ejemplo 2.1.8 tenemos que las constantes del Corolario 2.2.2 y del Corolario 2.2.1 apartado (i) son de nuevo óptimas. Vemos ahora con el siguiente ejemplo que la constante 2 obtenida en el Corolario 2.2.1 apartado (ii) es también óptima.

Ejemplo 2.2.3 ([CMR06])**.** *Consideremos el espacio $X = \{0\} \cup \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ dotado de la topología inducida por $\mathbb{R}$. Definamos ahora $f_n : X \to \mathbb{R}$ como $f_n(t) = (1-t)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in X$. Tomemos $H = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

La sucesión $(f_n)_n$ converge puntualmente a la función característica $\chi_{\{0\}}$ de donde se deduce que $\overline{H}^{\mathbb{R}^X} = H \cup \{\chi_{\{0\}}\}$. Por el Teorema 1.1.9 tenemos claramente que $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) = 1/2$. Por otro lado, si tomamos $x_k = 1/k$ tenemos que $\lim_n \lim_k f_n(x_k) = 1$ y $\lim_k \lim_n f_n(x_k) = 0$. Por lo tanto la constante 2 del Corolario 2.2.1 apartado (ii) es óptima. $\square$

La Proposición 2.1.7 junto con el Teorema 1.2.19 nos da el siguiente Corolario.

Corolario 2.2.4 ([CMR06, Corollary 2.8]). *Sea X un espacio topológico paracompacto, Z un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado y sea $H \subset C(X,Z)$. Tenemos que:*

(i) Si H ε-intercambia límites con X, entonces

$$\hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq 2\varepsilon.$$

(ii) Si además X es numerablemente compacto y $\hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq \varepsilon$, entonces H 2ε-intercambia límites con X.

A continuación vemos con otro ejemplo que la convexidad de Z es esencial en el Corolario 2.2.4. Concretamente vemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un espacio métrico compacto (Z,d), un espacio compacto K y un subconjunto H del conjunto $C(K,Z)$ tales que $\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K,Z)) = 1$ y H $(1/n)$-intercambia límites con K. Con esto queda probado no sólo que la cota obtenida en el apartado (i) no es válida si Z no es convexo sino también que no es posible dar cota alguna.

Ejemplo 2.2.5 ([CMR06, Example 2.9]). Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$Z = [-1,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{i=-n}^{n} \{\frac{i}{n}\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

dotado con la métrica euclídea. Sea $K = [-1,1]$ con la topología euclídea y sea $g : K \to Z$ definida por la fórmula

$$g(t) = \begin{cases} (\frac{i}{n}, 1) & \text{si } t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}), i = -n, -n+1, \ldots, n-1, \\ (1,1) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que para cada $f \in C(K,Z)$, o bien se tiene que $f(t) = (s,0)$ para algún $s,t \in [-1,1]$, o bien $f(K) \subset \{i/n\} \times [0,1]$ para algún i. En ambos casos tenemos que $d(f,g) \geq 1$. Como $d(g,f_0) = 1$ para $f_0 : K \to Z$ la función constante que toma el valor $(0,1) \in Z$, tenemos que $d(g, C(K,Z)) = 1$. Para $k > n$ tomemos

$$A_k = \bigcup_{i=-n}^{n} [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} - \frac{1}{k}] \cup \{1\} \subset K.$$

Esta claro que podemos tomar una sucesión de funciones continuas $(f_k)_{k>n}$ tales que $f_k|_{A_k} \equiv g|_{A_k}$. Claramente dicha sucesión convergerá puntualmente a g. Definamos $H = \{f_k : k > n\}$. Se tiene que $\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K,Z)) = 1$ y H $(1/n)$-intercambia límites con K:

Por un lado $\overline{H}^{Z^K} = H \cup \{g\}$, y por lo tanto $\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K,Z)) = 1$. Veamos ahora que el conjunto H $(1/n)$-intercambia límites con K. Tomemos una sucesión $(h_i)_i$ en H y una sucesión $(x_j)_j$ en K tales que los siguientes límites existan

$$\lim_i \lim_j h_i(x_j) \quad \text{y} \quad \lim_j \lim_i h_i(x_j).$$

Si la sucesión $(h_i)_i$ tiene sólo una cantidad finita de elementos distintos tenemos entonces que los dos límites anteriores deben de ser iguales. Supongamos por tanto que dicha sucesión tiene infinitos elementos distintos. Como $(h_i)_i \subset H$, tomando otra subsucesión podemos suponer que $(h_i)_i$ converge puntualmente hacia g, y tomando una subsucesión, debido a que K es un espacio métrico compacto, podemos suponer que $(x_j)_j$ converge hacia algún $x \in K$. Tenemos entonces que $\lim_i \lim_j h_i(x_j) = \lim_i g(x_j) = g(x)$ y $\lim_j \lim_i h_i(x_j) = \lim_j g(x)$, pero como $\lim_j x_j = x$, teniendo en cuenta la definición de g se obtiene que $d(g(x), \lim_j g(x_j)) \leq 1/n$. $\square$

La Proposición 2.1.6 junto con el Teorema 1.2.19 nos da el siguiente Corolario.

Corolario 2.2.6. *Sea X un espacio topológico paracompacto y sea H un subconjunto de $C(X,Z)$ que ε-intercambia límites con un conjunto denso de X, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq 4\varepsilon$.*

2.3 Distancia y envolturas convexas

El objetivo principal de esta sección es probar el Teorema 2.3.1 que nos dice que el ε-intercambio de límites se conserva cuando tomamos envolturas convexas. Este resultado se probó en [CMR06, Theorem 3.3] y anteriormente se hizo para el caso menos general de espacios de Banach en [FHMZ05, Theorem 13]. La prueba que damos aquí es original y se basa en la prueba del teorema de Krein-Šmulian debida a [Ptá63], usando su lema combinatorio junto al ε-intercambio de límites como Fabian, Hájek, Montesinos y Zizler [FHMZ05] hicieron para espacios de Banach.

Teorema 2.3.1 ([CMR06, Theorem 3.3])**.** *Sea Z un subconjunto compacto convexo de un espacio normado E, X un conjunto cualquiera, H un subconjunto de Z^X y $\varepsilon \geq 0$. Si H ε-intercambia límites con X entonces su envoltura convexa* $\operatorname{conv}(H)$ *ε-intercambia límites con X.*

Demostración. Como Z es un subconjunto compacto de un espacio normado, existe $M \geq 0$ tal que $\|z\| < M$ para todo $z \in Z$. Supongamos que tenemos una sucesión $(f_n)_n$ en $\operatorname{conv}(H)$ y $(x_m)_m$ en X tales que lo siguientes límites existan y cumplan que

$$\|\lim_n \lim_m f_n(x_m) - \lim_m \lim_n f_n(x_m)\| = \varepsilon'.$$

Tenemos que demostrar que $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varepsilon' > 0$. Sea $F \subset H$ un conjunto numerable tal que $f_n \in \operatorname{conv} F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F es un conjunto numerable y Z es un espacio métrico compacto, tomando una subsucesión podemos suponer que el límite $\lim_m f(x_m)$ existe para todo $f \in F$. Denotemos

$$T(f) := \lim_m f(x_m) \quad \text{para} \quad f \in F.$$

Si $f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i$ con $\lambda_i\in\mathbb{R}$ y $g_i\in F$, podemos definir $T(f)$ como

$$T(f):=\lim_m f(x_m)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lim_m g_i(x_m)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(g_i). \tag{2.7}$$

Tenemos así definida una aplicación $T:\operatorname{conv}F\to Z$. Por lo tanto

$$\lim_n\lim_m f_n(x_m)=\lim_n T(f_n)$$

así que

$$\lim_n T(f_n)-\lim_m\lim_n f_n(x_m)=z \quad \text{con} \quad \|z\|=\varepsilon'. \tag{2.8}$$

Tomemos $\beta\in(0,\varepsilon')$ arbitrario. Elijamos $\delta>0$ y $\gamma>0$ tales que

$$\beta+2\gamma M<\varepsilon'-\delta. \tag{2.9}$$

Por (2.8), eliminando una cantidad finita de índices podemos suponer que

$$\lim_n T(f_n)-\lim_n f_n(x_m)=\lim_n(T(f_n)-f_n(x_m))=z+z_m \ \text{con} \ \|z_m\|<\delta \tag{2.10}$$

para todo m. Para $f\in F$ denotemos

$$\Gamma(f):=\{m\in\mathbb{N}:\|T(f)-f(x_m)\|\geq\beta\}.$$

Por (2.7) tenemos que cada $\Gamma(f)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$.

AFIRMACIÓN.- No existe $\mu:\mathbb{N}\to[0,1]$ una media convexa sobre $\mathbb{N}$ tal que para cada $f\in F$

$$\sum_{n\in\Gamma(f)}\mu(n)<\gamma.$$

Veamos esto por reducción al absurdo y supongamos que sí existe μ con esas características. Consideremos ahora el funcional de Dirac $\delta:x\rightsquigarrow\delta_x$ donde $\delta_x(f)=f(x), x\in X,\ f\in Z^X$. Tomemos

$$y:=\sum_{m\in\mathbb{N}}\mu(m)(T-\delta_{x_m}).$$

Dado $f\in F$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|y(f)\|&=\left\|\sum_{m\in\mathbb{N}}\mu(m)(T(f)-f(x_m))\right\|\leq\\ &\leq\sum_{m\in\Gamma(f)}\mu(m)\|(T(f)-f(x_m))\|+\sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\Gamma(f)}\mu(m)\|(T(f)-f(x_m))\|\leq 2\gamma M+\beta.\end{aligned}$$

En particular tenemos que $\|y(f_n)\| \leq 2\gamma M + \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que

$$2\gamma M + \beta \geq \lim_n \|y(f_n)\| = \|\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(m) \lim_n (T(f_n) - f_n(x_m))\| \overset{(2.10)}{=}$$
$$= \|z + \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(m) z_m\| \geq \|z\| - \|\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(m) z_m\| > \varepsilon' - \delta$$

lo que es imposible por (2.9) y con esto queda probada la AFIRMACIÓN. Aplicando ahora el lema de Pták, Teorema 1.6.4, tenemos que $\{\Gamma(f) : f \in F\}$ no es una familia bien fundamentada y por tanto, existe una sucesión $(m_p)_p$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión $(g_p)_p$ en F tales que

$$\{m_1, \ldots, m_p\} \subset \Gamma(g_p) \text{ para todo } p \in \mathbb{N},$$

es decir

$$\|T(g_n) - g_n(x_{m_p})\| \geq \beta \ \text{ si } \ p \leq n. \tag{2.11}$$

Tomando una subsucesión, podemos suponer que el límite $\lim_n g_n(x_{m_p})$ existe para todo $p \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que

$$\lim_n \lim_p g_n(x_{m_p}) \overset{(2.7)}{=} \lim_n T(g_n).$$

Por otro lado

$$\|\lim_n T(g_n) - \lim_p \lim_n g_n(x_{m_p})\| = \lim_p \lim_n \|T(g_n) - g_n(x_{m_p})\| \overset{(2.11)}{\geq} \beta$$

así que

$$\|\lim_n \lim_p g_n(x_{m_p}) - \lim_p \lim_n g_n(x_{m_p})\| \geq \beta$$

y esto se puede hacer con todo β tal que $0 < \beta < \varepsilon'$. Como $(g_n)_n$ es una sucesión en $F \subset H$ deducimos que $\varepsilon' \leq \varepsilon$ con lo que concluimos la prueba. □

Corolario 2.3.2 ([CMR06, Theorem 3.6]). *Sea K un espacio compacto, Z un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado E y $H \subset C(K,Z)$. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{Z^K}, C(K,Z)) \leq 4\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K,Z)).$$

Demostración. Basta aplicar el Corolario 2.2.4 y el Teorema 2.3.1. □

Corolario 2.3.3. *Sea K un espacio compacto, Z un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado E y $H \subset C(K,Z)$. Entonces H es τ_p-relativamente compacto en $C(K,Z)$ si, y sólo si,* $\operatorname{conv}(H)$ *es τ_p-relativamente compacto en $C(K,Z)$.*

Corolario 2.3.4 ([CMR06, Corollary 3.4]). *Sea K un espacio compacto y $H \subset C(K)$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

Demostración. Basta aplicar el Corolario 2.2.1 y el Teorema 2.3.1. □

En este último caso también es posible estudiar que ocurre cuando H no está contenido en $C(K)$.

Teorema 2.3.5 ([CMR06, Theorem 3.5]). *Sea K un espacio compacto y $H \subset \mathbb{R}^K$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 5\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

Demostración. Debido a que si tomamos la clausura puntual de $\mathrm{conv}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K})$ obtenemos $\overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}$, tenemos que la desigualdad anterior se cumple con H si, y sólo si, ocurre con su clausura. Por lo tanto podemos suponer que H es cerrado en $\mathbb{R}^K$ con lo que $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = \hat{d}(H, C(K))$.

Sea $\varepsilon > \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = \hat{d}(H, C(K))$. Para cada $f \in H$ existirá una función $g_f \in C(K)$ tal que

$$d(f, g_f) < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Sea $H_0 := \{g_f : f \in H\}$. Tenemos claramente que H_0 está contenido en $H + \varepsilon B_{\ell_\infty(K)}$ que es compacto en la topología producto ya que H es cerrado y uniformemente acotado. Por lo tanto $\overline{H_0}^{\mathbb{R}^K} \subset H + \varepsilon B_{\ell_\infty(K)}$. Por otro lado, está claro que $H \subset H_0 + \varepsilon B_{\ell_\infty(K)}$ por lo que tenemos que $\overline{H_0}^{\mathbb{R}^K} \subset H_0 + 2\varepsilon B_{\ell_\infty(K)}$ y como $H_0 \subset C(K)$ podemos deducir que

$$\hat{d}(\overline{H_0}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\varepsilon,$$

por lo que aplicando el Corolario 2.2.1 tenemos que H_0 4ε-intercambia límites con K, y por lo tanto, por el Teorema 2.3.1, $\mathrm{conv}(H_0)$ 4ε-intercambia límites con K. De nuevo por el Corolario 2.2.1 tenemos que

$$\overline{\mathrm{conv}(H_0)}^{\mathbb{R}^K} \subset C(K) + 4\varepsilon B_{\ell_\infty(K)}$$

así que por (2.12) tenemos que

$$\overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K} \subset \overline{\mathrm{conv}(H_0)}^{\mathbb{R}^K} + \varepsilon B_{\ell_\infty(K)} \subset C(K) + 5\varepsilon B_{\ell_\infty(K)}$$

con lo que terminamos la prueba. □

Observación 2.3.6. *Como pondremos de manifiesto en la Observación 3.1.9, la constante 2 del Corolario 2.3.4 es óptima y en el Teorema 2.3.5 no podemos poner una constante menor que 3.*

2.4 Versión cuantitativa de la angelicidad de $C(K)$ con K compacto

Si K es un espacio compacto es conocido que el espacio $(C(K), \tau_p)$ es angélico, ver definición abajo. Nuestro objetivo en esta sección es obtener una versión cuantitativa de este resultado en términos de distancias al espacio $C(K)$. Recordemos primero la definición de espacio angélico.

Definición 2.4.1. *Sea (Y,τ) un espacio topológico. Diremos que Y es un espacio angélico si para todo subconjunto A relativamente numerablemente compacto en Y se tiene que:*

(i) A es relativamente compacto,
(ii) si $y \in \overline{A}^{\tau}$, entonces existe una sucesión $(y_n)_n$ en A convergente a y.

El siguiente lema que se puede encontrar en la demostración de [Flo80, Theorem 3.6].

Lema 2.4.2. *Sea (Z,d) un espacio métrico compacto y sea X un conjunto. Entonces dadas $f_1, f_2, \dots, f_n \in Z^X$ y $\delta > 0$, existe un subconjunto finito $L \subset X$ tal que para cada $x \in X$ existe $y \in L$ tal que*

$$d(f_k(y), f_k(x)) < \delta$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Consideremos en Z^n la métrica dada por

$$d_\infty((x_k),(y_k)) := \sup_{1\leq k\leq n} d(x_k, y_k)$$

donde $(x_k),(y_k) \in Z^n$. Tenemos entonces que esta métrica induce la topología producto en Z^n. Sea $B := \{(f_1(x),\dots,f_n(x)) : x \in X\}$, entonces la familia $\{B_\infty((f_1(x),\dots,f_n(x)),\delta) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto del conjunto compacto $\overline{B}^{Z^n}$. Por lo tanto existe un conjunto finito $L \subset X$ tal que

$$B \subset \bigcup_{y\in L} B_\infty((f_1(y),\dots,f_n(y)),\delta).$$

Claramente este conjunto L cumple lo deseado. $\square$

Teorema 2.4.3 ([CMR06, Proposition 5.2])**.** *Sea (Z,d) un espacio métrico compacto, X un conjunto y H un subconjunto de Z^X que ε-intercambia límites con X. Entonces dado $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que*

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

para todo punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ en Z^X.

Demostración. Definamos $f_1 := f$. Aplicando el Lema 2.4.2 obtenemos que existe un conjunto finito $L_1 \subset X$ tal que

$$\min_{y\in L_1} d(f_1(x), f_1(y)) < 1$$

para cada $x \in X$. Supongamos que hemos elegido funciones $f_1,\dots,f_n \in H$ y subconjuntos $L_1,\dots,L_n$ de X tales que

$$d(f_m(y), f_1(y)) < \frac{1}{n} \text{ para todo } 1 \leq m \leq n \text{ y para todo } y \in \bigcup_{k=1}^{m} L_k$$

y

$$\min_{y\in L_m}\max_{k\leq m}\{d(f_k(x),f_k(y))\}<\frac{1}{n}\text{ para todo }1\leq m\leq n\text{ y para todo }x\in X.$$

Como $f_1\in\overline{H}^{Z^X}$ existe $f_{n+1}\in H$ tal que

$$d(f_{n+1}(y),f_1(y))<\frac{1}{n+1}\text{ para todo }y\in\bigcup_{k=1}^{n}L_k.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 2.4.2 a $f_1,f_2,\dots,f_{n+1}$ y $\delta=\frac{1}{n+1}$ tenemos que existe L_{n+1} tal que

$$\min_{y\in L_{n+1}}\max_{k\leq n+1}\{d(f_k(x),f_k(y))\}<\frac{1}{n+1}\text{ para todo }x\in X.$$

Sea ahora $D:=\bigcup_{k=1}^{\infty}L_k$. Para $x\in X$ fijo podemos construir una sucesión $(y_n)_n$ en D tal que

$$\max_{k\leq n}\{d(f_k(x),f_k(y_n))\}<1/n$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Tenemos entonces que

$$\lim_n f_k(y_n)=f_k(x)\text{ para todo }k\in\mathbb{N}.$$

Tomemos un punto de aglomeración g de $(f_k)_k$ en Z^X y una subsucesión $(f_{k_j})_j$ tal que en el punto fijo x se cumpla que $\lim_j f_{k_j}(x)=g(x)$. Tenemos entonces que

$$\lim_j\lim_n f_{k_j}(y_n)=\lim_j f_{k_j}(x)=g(x).$$

Por otro lado, como para todo $y\in D$ se cumple que $\lim_k f_k(y)=f_1(y)$ tenemos que

$$\lim_n\lim_j f_{k_j}(y_n)=\lim_n f_1(y_n)=f_1(x)=f(x).$$

Como H ε-intercambia límites con X concluimos que

$$d(g(x),f(x))\leq\varepsilon$$

y esto ocurre para todo $x\in X$ con lo que termina la prueba. □

Corolario 2.4.4. *Sea (Z,d) un espacio métrico compacto, X un conjunto y H un subconjunto de Z^X que intercambia límites con X. Entonces dado $f\in\overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n$ en H puntualmente convergente a f.*

Demostración. Como H 0-intercambia límites con X, por el Teorema 2.4.3 tenemos que dada $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que $d(f(x), g(x)) = 0$ para todo $x \in X$ y todo punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ en Z^X. Tenemos entonces que f es el único punto de aglomeración de la sucesión $(f_n)_n$ que está contenida en el conjunto compacto $\overline{H}^{Z^X}$. Por lo tanto la sucesión converge puntualmente a f. □

Definición 2.4.5. *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y $H \subset Z^X$, definimos*

$$\operatorname{ck}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi), C(X,Z)),$$

donde $\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi)$ *denota al conjunto de puntos de aglomeración de la sucesión φ en el espacio producto Z^X.*

Si H no es un conjunto relativamente compacto en Z^X tenemos que existe una sucesión φ en H con $\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi) = \emptyset$. En tal caso, $\operatorname{ck}(H) = +\infty$ ya que $d(\emptyset, C(X,Z)) = +\infty$ puesto que por definición consideramos que $\inf \emptyset = +\infty$.

Observación 2.4.6. *Observemos que si H es un conjunto relativamente numerablemente compacto en $(C(X,Z), \tau_p)$ entonces todo sucesión de H tiene punto de τ_p-aglomeración en $C(X,Z)$ y por lo tanto* $\operatorname{ck}(H) = 0$.

Necesitamos el siguiente lema para los resultados que siguen.

Lema 2.4.7 ([ACb]). *Sea K un espacio compacto, (Z,d) un espacio métrico y H un subconjunto de $C(K,Z)$. Entonces H $2\operatorname{ck}(H)$-intercambia límites con K.*

Demostración. Sea $(f_m)_m$ una sucesión en H, $(x_n)_n$ una sucesión en K y supongamos que existen los límites iterados

$$\lim_n \lim_m f_m(x_n) \quad \text{y} \quad \lim_m \lim_n f_m(x_n).$$

Supongamos que $\operatorname{ck}(H) < +\infty$ puesto que en caso contrario el resultado es inmediato. Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > \operatorname{ck}(H)$. La sucesión $(f_m)_m$ tiene un punto de aglomeración $f \in Z^K$ (en la topología producto) tal que $d(f, C(K,Z)) < \alpha$. Fijemos ahora $f' \in C(K,Z)$ tal que

$$\sup_{x \in K} d(f(x), f'(x)) < \alpha. \tag{2.13}$$

Tomemos $x \in K$ un punto de aglomeración de $(x_n)_n$. Como f' y cada f_m son continuas, $f'(x)$ y $f_m(x)$ son, respectivamente, puntos de aglomeración de $(f'(x_n))_n$ y $(f_m(x_n))_n$. Por lo tanto podemos tomar una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $\lim_k f'(x_{n_k}) = f'(x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(\lim_k f(x_{n_k}), f(x)) \leq \\ \leq d(\lim_k f(x_{n_k}), \lim_k f'(x_{n_k})) + d(f'(x), f(x)) \overset{(2.13)}{\leq} 2\alpha. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado

$$\lim_m \lim_n f_m(x_n) = \lim_m f_m(x) = f(x)$$

así que

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n))$$
$$= d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), f(x)) = d(\lim_k f(x_{n_k}), f(x)) \overset{(2.14)}{\leq} 2\alpha.$$

Como esto lo podemos hacer para todo $\alpha > \mathrm{ck}(H)$, H $2\,\mathrm{ck}(H)$-intercambia límites con K. □

Corolario 2.4.8 ([ACb]). *Sea K un espacio compacto, (Z,d) un espacio métrico compacto y H un subconjunto de $C(K,Z)$. Si $f \in \overline{H}^{Z^K}$ entonces existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que*

$$\sup_{x\in K} d(f(x), g(x)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H)$$

para todo punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ en Z^K.

Demostración. Por el Lema 2.4.7, H $2\,\mathrm{ck}(H)$-intercambia límites con K. Basta aplicar ahora el Teorema 2.4.3. □

Corolario 2.4.9 ([ACb]). *Sea K un espacio compacto y H un subconjunto de $C(K)$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\mathrm{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H)$$

y si $f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$, entonces existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que

$$\sup_{x\in K} |f(x) - g(x)| \leq 2\,\mathrm{ck}(H)$$

para todo punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}^K$.

Demostración. La desigualdad

$$\mathrm{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K))$$

se sigue inmediatamente de la definición de $\mathrm{ck}(H)$. Por otro lado, por el Lema 2.4.7 tenemos que H $2\,\mathrm{ck}(H)$-intercambia límites con K y por lo tanto por el Corolario 2.2.1 tenemos que

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H).$$

Por último, si $f \in \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$, como H es uniformemente acotado, por el Corolario 2.4.8 tenemos que existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que para todo punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ se tiene que

$$\sup_{x\in K} |f(x) - g(x)| \leq 2\,\mathrm{ck}(H).$$

□

Ejemplo 2.4.10 ([ACb]). *El siguiente ejemplo muestra que la constante 2 en la desigualdad*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H)$$

en el Corolario 2.4.9 no puede mejorarse en general.

Consideremos $[0,\omega_1]$ el intervalo de todos los ordinales menores o iguales que el primer ordinal no numerable ω_1. Sea ahora

$$K = (\{-1,1\} \times [0,\omega_1])/R$$

donde R es la relación definida por xRy si, y sólo si

$$x = y$$

ó

$$x, y \in \{(-1,\omega_1),(1,\omega_1)\}.$$

Claramente K es un conjunto compacto. Para $\alpha \prec \omega_1$ definamos $f_\alpha : K \to \mathbb{R}$ como

$$f_\alpha(i,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \succ \alpha, \\ i & \text{si } \gamma \preceq \alpha \end{cases}$$

y pongamos $H = \{f_\alpha : \alpha \prec \omega_1\} \subset C(K)$. Si $(f_{\alpha_n})_n$ es una sucesión en H y $\alpha := \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $\alpha \prec \omega_1$ y $f_{\alpha_n}(i,\beta) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\beta \succ \alpha$. Por lo tanto si g es un punto de aglomeración de $(f_{\alpha_n})_n$, tenemos que $g(i,\beta) = 0$ para todo $\beta \succ \alpha$. Si definimos $h : K \to \mathbb{R}$ como $h(i,\beta) = 0$ si $\beta \succ \alpha$ y $h(i,\beta) = i/2$ si $\beta \preceq \alpha$ entonces $h \in C(K)$ y $d(h,g) \leq 1/2$ para cada punto de aglomeración g de $(f_{\alpha_n})_n$. Por lo tanto $\mathrm{ck}(H) \leq 1/2$.

Por otro lado, la función $h' : K \to \mathbb{R}$ definida como $h'(i,\beta) = 0$ si $\beta = \omega_1$ y $h'(i,\beta) = i$ si $\beta \neq \omega_1$ pertenece a $\overline{H}^{\mathbb{R}^K}$ y claramente $\mathrm{osc}(h') = 2 = 2d(h',C(K))$, véase Teorema 1.1.9. Entonces

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \geq d(h',C(K)) \geq 1 \geq 2\,\mathrm{ck}(H)$$

y por lo tanto, por el Corolario 2.4.9 se tiene que $d(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = 2\,\mathrm{ck}(H)$. $\square$

A partir del Corolario 2.4.4 se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Corolario 2.4.11 (véase[Flo80, Theorem 3.7]). *Si K es un espacio topológico compacto y (Z,d) es un espacio métrico compacto, entonces $(C(K,Z),\tau_p)$ es un espacio angélico.*

En realidad el Corolario 2.4.11 también es válido para un espacio métrico arbitrario. No nos entretenemos en demostrar esto ahora ya que en la siguiente sección obtenemos como corolario un resultado mucho más general.

Como comentamos en la Observación 2.4.6, si H es un subconjunto relativamente numerablemente compacto en $(C(X),\tau_p)$, se tiene que $\mathrm{ck}(H) = 0$. Sin embargo, no sabemos si el recíproco es cierto en general. Tras el Corolario 2.4.9 podemos concluir que el recíproco es cierto si K es un espacio compacto y H es uniformemente acotado. En la siguiente sección veremos que también es cierto en una situación más general.

Corolario 2.4.12 ([ACb]). *Sea K un espacio compacto y $H \subset C(K)$ un conjunto uniformemente acotado. Son equivalentes:*

(i) $\mathrm{ck}(H) = 0$,

(ii) *H es τ_p-relativamente compacto,*

(iii) *H es τ_p-relativamente numerablemente compacto.*

Demostración. De forma inmediata se tiene que (ii)⇒(iii)⇒(i). Para ver la implicación (i)⇒(ii), basta tener en cuenta que por el Corolario 2.4.9, si $\mathrm{ck}(H) = 0$ entonces

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = 0$$

y por lo tanto H es τ_p-relativamente compacto. □

Problema 2. *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y $H \subset C(X,Z)$. Si $\mathrm{ck}(H) = 0$, ¿se tiene que H es relativamente numerablemente compacto en $C(X,Z)$?*

2.5 Versión cuantitativa de la angelicidad de $C(X)$ con X numerablemente K-determinado

En esta sección estudiamos una versión cuantitativa de la angelicidad de los espacios $C(X)$ para X numerablemente K-determinado. La angelicidad de estos espacios fue probada por Orihuela en [Ori87], donde los resultados allí dados se demuestran en el caso más general en el que X es un espacio *web-compacto*. Sin embargo, para nuestra versión cuantitativa nos restringimos a los espacios numerablemente K-determinados ya que esta clase es muy interesante, tanto para topólogos como para analistas y ya que en este caso están las ideas esenciales de una posible extensión: notamos que nuestros resultados pueden extenderse sin dificultad a la clase de espacios web-compactos. Veamos ahora la definición de espacio numerablemente K-determinado.

Para ello recordemos primero lo que es una multifunción superiormente semicontinua. Si Y es un conjunto, denotamos por $\mathscr{P}(Y)$ a la familia de subconjuntos de Y. Dada una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ y $A \subset X$ un conjunto, abusando de la notación denotamos $F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x)$.

Definición 2.5.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Diremos que F es superiormente semicontinua si para cada $x \in X$ y cada abierto V de Y tal que $F(x) \subset V$, existe un entorno U de x en X tal que $F(U) \subset V$.*

En lo que sigue, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se considera dotado de su topología producto τ_p para la cual es un espacio polaco (es decir, es un espacio métrico separable completo).

Definición 2.5.2. *Diremos que un espacio topológico X es numerablemente K-determinado si existe una multifunción superiormente semicontinua $F : \Sigma \to \mathscr{P}(X)$ para algún conjunto $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $F(\sigma)$ es compacto para todo $\sigma \in \Sigma$ y $F(\Sigma) = X$.*

Los espacios σ-compactos son ejemplos de espacios numerablemente K-determinados. Otro ejemplo de estos espacios son los K-analíticos (véase [Tal79]). Dentro del conjunto de espacios de Banach numerablemente K-determinados se encuentran los separables, o más generalmente, los espacios débilmente compactamente generados. Una buena referencia para espacios numerablemente K-determinados es [Ark92], donde aparecen con el nombre de *espacios* Σ*-Lindelöf*. [Tal79] es una buena referencia para espacios de Banach numerablemente K-determinados cuando los dotamos de la topología débil.

Recordemos que si $H \subset Z^X$ es un conjunto de aplicaciones de un espacio X a un espacio métrico Z, se denota

$$\mathrm{ck}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\mathrm{clust}_{Z^X}(\varphi), C(X,Z)),$$

donde clust_{Z^X} es el conjunto de puntos de aglomeración de la sucesión φ en Z^X. Obsérvese que el siguiente lema es una generalización del Lema 2.4.7.

Lema 2.5.3 ([ACb]). *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y H un subconjunto de (Z^X, τ_p). Si definimos*

$$\varepsilon := \mathrm{ck}(H) + \hat{d}(H, C(X,Z)),$$

entonces H 2ε-intercambia límites con todo subconjunto relativamente compacto de X.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varepsilon < +\infty$ ya que en caso contrario el resultado es trivialmente cierto. Sea $(f_m)_m$ una sucesión en H, $(x_n)_n$ una sucesión contenida en un subconjunto relativamente compacto de X y supongamos que los siguientes límites existen

$$\lim_n \lim_m f_m(x_n) \quad \text{y} \quad \lim_m \lim_n f_m(x_n).$$

Si fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > \mathrm{ck}(H)$, entonces la sucesión $(f_m)_m$ tiene un punto de τ_p-aglomeración $f \in Z^X$ tal que $d(f, C(X,Z)) < \alpha$. Observemos que

$$\lim_n \lim_m f_m(x_n) = \lim_n f(x_n). \tag{2.15}$$

Fijemos $f' \in C(X,Z)$ tal que

$$d(f, f') < \alpha. \tag{2.16}$$

Por otro lado, si fijamos $\beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > \hat{d}(H, C(X,Z))$, entonces para $m \in \mathbb{N}$ existe $f'_m \in C(X,Z)$ tal que

$$d(f_m, f'_m) < \beta. \tag{2.17}$$

Fijemos ahora $x \in X$ un punto de aglomeración de $(x_n)_n$. Como f' y f'_m son funciones continuas, $f'(x)$ y $f'_m(x)$ son, respectivamente, puntos de aglomeración de $(f'(x_n))_n$ y $(f'_m(x_n))_n$ en el espacio métrico (Z,d) y así podemos tomar una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $\lim_k f'(x_{n_k}) = f'(x)$ y $\lim_k f'_m(x_{n_k}) = f'_m(x)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tenemos que

$$d(\lim_k f(x_{n_k}), f(x)) \leq d(\lim_k f(x_{n_k}), \lim_k f'(x_{n_k})) + d(f'(x), f(x)) \overset{(2.16)}{\leq} 2\alpha \tag{2.18}$$

y que

$$d(\lim_k f_m(x_{n_k}), f_m(x)) \leq d(\lim_k f_m(x_{n_k}), \lim_k f'_m(x_{n_k})) + d(f'_m(x), f_m(x)) \overset{(2.17)}{\leq} 2\beta. \tag{2.19}$$

Tomemos ahora una subsucesión $(f_{m_j})_j$ de $(f_m)_m$ tal que $f(x) = \lim_j f_{m_j}(x)$. Obtenemos entonces que

$$d(\lim_m \lim_n f_m(x_n), f(x)) = d(\lim_j \lim_k f_{m_j}(x_{n_k}), \lim_j f_{m_j}(x)) \overset{(2.19)}{\leq} 2\beta$$

y

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), f(x)) \overset{(2.15)}{=} d(\lim_k f(x_{n_k}), f(x)) \overset{(2.18)}{\leq} 2\alpha.$$

Combinando las dos últimas desigualdades tendremos que

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) \leq 2\alpha + 2\beta.$$

Como esto es cierto para todo $\alpha > \mathrm{ck}(H)$ y $\beta > \hat{d}(H, C(X,Z))$ la prueba concluye. □

El siguiente lema se usará varias veces en la prueba del Lema 2.5.5: este lema extiende el Lema 2.4.2 reemplazando allí las hipótesis de que (Z,d) es un espacio métrico compacto por la menos restrictiva de que (Z,d) es separable.

Lema 2.5.4 ([ACb]). *Sea (Z,d) un espacio métrico separable y sea X un conjunto. Dadas funciones $f_1, \ldots, f_n \in Z^X$ y $D \subset X$, existe un conjunto numerable $L \subset D$ tal que para cada $x \in D$*

$$\inf_{y \in L} \max_{1 \leq k \leq n} d(f_k(y), f_k(x)) = 0.$$

Demostración. La métrica

$$d_\infty\big((t_k),(s_k)\big) := \sup_{1 \leq k \leq n} d(t_k, s_k),$$

$(t_k),(s_k) \in Z^n$, nos da la topología producto del espacio Z^n. (Z^n, d_∞) es un espacio métrico separable, así que su subespacio

$$H = \{(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) : x \in D\}$$

también es separable. Por lo tanto, existe un conjunto numerable $L \subset D$ tal que $H \subset \overline{G}^{Z^n}$ donde

$$G := \{(f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y)) : y \in L\}.$$

En otras palabras, para cada $x \in D$ tendremos que

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \in \overline{G}^{Z^n},$$

o lo que es lo mismo

$$0 = \inf_{g \in G} d_\infty\big(g, (f_1(x), \ldots, f_n(x))\big) = \inf_{y \in L} \max_{1 \leq k \leq n} d(f_k(y), f_k(x)).$$

□

En el siguiente lema vamos a usar la notación que explicamos a continuación. Si $n \in \mathbb{N}$ y si $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$, entonces $\alpha|n := (a_1, a_2, ..., a_n)$. Sea Σ un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, denotaremos por $\mathrm{F}(\Sigma)$ al subconjunto de todas las sucesiones finitas de enteros positivos $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ definido por

$$\mathrm{F}(\Sigma) = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : \text{ existe } \alpha \in \Sigma, \alpha|n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\right\}.$$

Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto X. Dado $\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ y $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$C_{\alpha|n} = \bigcup \{A_\beta : \beta \in \Sigma \text{ y } \beta|n = \alpha|n\}.$$

Como es habitual, dado un conjunto $C \subset X$ y una sucesión $(x_n)_n$ en X diremos que $(x_n)_n$ está eventualmente en C si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in C$ para $n \geq m$.

El siguiente lema es la clave para la prueba del Teorema 2.5.6.

Lema 2.5.5 ([ACb]). *Sea (Z,d) un espacio métrico separable, X un conjunto, H un subconjunto del espacio Z^X y $\varepsilon \geq 0$. Supongamos que:*

(i) existe $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ de subconjuntos no vacíos de X que cubre X;

(ii) para cada $\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ el conjunto H ε-intercambia límites en Z con cada sucesión $(x_n)_n$ en X que está eventualmente en cada conjunto $C_{\alpha|m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Entonces para cada $f \in \overline{H}^{Z^X}$ existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

para cualquier punto de aglomeración g de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z^X.

Demostración. Definamos $f_0 := f$. Como $\mathrm{F}(\Sigma)$ es numerable, existe una biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{F}(\Sigma)$. Denotemos $D_n := C_{\varphi(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

> *AFIRMACIÓN.- Existe una sucesión de funciones $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ y una sucesión de conjuntos $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ con las siguientes propiedades:*
>
> *(a) $L_n = \{l_1^n, l_2^n, \ldots, l_m^n, \ldots\}$ es un subconjunto numerable de D_n para cada $n \in \mathbb{N}$;*
>
> *(b) para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in D_n$ tendremos*
>
> $$\inf_{y\in L_n} \max_{0\leq k<n} d(f_k(y), f_k(x)) = 0; \tag{2.20}$$
>
> *(c) para cada $n \in \mathbb{N}$ la función f_n pertenece a H y*
>
> $$d(f_n(y), f_0(y)) < \frac{1}{n} \text{ para cada } y \in \{l_k^j : 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq n\}. \tag{2.21}$$

Vamos a probar la existencia de las sucesiones anteriores por recurrencia.

PRIMER PASO. Aplicando el Lema 2.5.4 a $D := D_1$ y f_0 obtendremos un subconjunto numerable $L_1 = \{l_1^1, l_2^1, \ldots, l_m^1, \ldots\}$ de D_1 tal que

$$\inf_{y\in L_1} d(f_0(y), f_0(x)) = 0 \text{ para cada } x \in D_1.$$

Como $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe $f_1 \in H$ tal que

$$d(f_1(l_1^1), f_0(l_1^1)) < 1.$$

INDUCCIÓN. Suponiendo que tenemos $f_0, f_1, \ldots, f_n$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n$ satisfaciendo (2.20) y (2.21), aplicamos el Lema 2.5.4 a $D := D_{n+1}$ y $f_0, f_1, \ldots, f_n$ para obtener $L_{n+1} \subset D_{n+1}$ tal que

$$\inf_{y \in L_{n+1}} \max_{0 \leq k < n+1} d(f_k(y), f_k(x)) = 0 \text{ para cada } x \in D_{n+1}.$$

De nuevo, como $f \in \overline{H}^{Z^X}$ podemos tomar una función $f_{n+1} \in H$ tal que

$$d(f_{n+1}(y), f_0(y)) < \frac{1}{n+1} \text{ para cada } y \in \{l_k^j : 1 \leq k \leq n+1, 1 \leq j \leq n+1\}.$$

Las sucesiones construidas $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ cumplen (a), (b) y (c) y así queda terminada la prueba de la AFIRMACIÓN.

Veamos ahora que la sucesión $(f_n)_n$ tiene las propiedades que queremos: fijemos un punto de aglomeración g de $(f_n)_n$ en Z^X y fijemos un punto $x \in X$, tenemos que probar que $d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Observemos primero que la desigualdad (2.21) implica que

$$\lim_n f_n(y) = f(y) \text{ para cada } y \in L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n. \tag{2.22}$$

Tomemos $\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in \Sigma$ tal que $x \in A_\alpha$ y definamos

$$P := \varphi^{-1}(\{\alpha|n : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{N}.$$

P es un conjunto infinito ya que φ es una biyección. Como $x \in \bigcap_{p \in P} D_p$, al aplicar (2.20) a cada $p \in P$ obtenemos que existe $y_p \in L_p$ tal que

$$d(f_k(y_p), f_k(x)) < \frac{1}{p} \text{ para } 0 \leq k < p. \tag{2.23}$$

Como el conjunto P es infinito, podemos fijar una sucesión estrictamente creciente $(p_n)_n$ en P. Afirmamos que la sucesión $(y_{p_j})_j$ está eventualmente en $C_{\alpha|n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Efectivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $p_{j(n)}$ un elemento de la sucesión $(p_j)_j$, de forma que $p_{j(n)} > \varphi^{-1}(\alpha|i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, si $j > j(n)$ entonces $p_j \neq \varphi^{-1}(\alpha|i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y por ello $\varphi(p_j) = \alpha|n(p_j)$ para algún $n(p_j) > n$. De aquí tendremos que

$$y_{p_j} \in D_{p_j} = C_{\alpha|n(p_j)} \subset C_{\alpha|n}, \text{ para } j > j(n),$$

con lo que hemos probado que $(y_{p_j})_j$ está eventualmente en cada $C_{\alpha|n}$.

Observemos también que (2.23) implica que

$$\lim_j f_k(y_{p_j}) = f_k(x) \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.24}$$

Como $g(x)$ es un punto de aglomeración de $(f_n(x))_n$ en el espacio métrico (Z,d) podemos tomar una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ tal que $\lim_k f_{n_k}(x) = g(x)$. Con todo lo anterior tenemos que

$$\lim_k \lim_j f_{n_k}(y_{p_j}) \overset{(2.24)}{=} \lim_k f_{n_k}(x) = g(x),$$

y

$$\lim_j \lim_k f_{n_k}(y_{p_j}) \overset{(2.22)}{=} \lim_j f(y_{p_j}) \overset{(2.24)}{=} f(x).$$

Como la sucesión $(y_{p_j})_j$ está eventualmente en cada $C_{\alpha|n}$, la hipótesis (ii) del lema nos dice que H ε-intercambia límites con $(y_{p_j})_j$, así que

$$d(g(x), f(x)) = d(\lim_k \lim_j f_{n_k}(y_{p_j}), \lim_j \lim_k f_{n_k}(y_{p_j})) \leq \varepsilon,$$

con lo que termina la demostración. □

Teorema 2.5.6 ([ACb]). *Sea X un espacio numerablemente K-determinado, (Z,d) un espacio métrico separable y H un subconjunto de Z^X. Entonces, para cualquier $f \in \overline{H}^{Z^X}$ existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que*

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \overset{(a)}{\leq} 2\,\mathrm{ck}(H) + 2\hat{d}(H, C(X,Z)) \overset{(b)}{\leq} 4\,\mathrm{ck}(H)$$

para cualquier punto de aglomeración g de (f_n) en Z^X.

Demostración. Definamos $\varepsilon := \mathrm{ck}(H) + \hat{d}(H, C(X,Z))$. Sea $T : \Sigma \to \mathscr{P}(X)$ la multifunción dada por la Definición 2.5.2 y escribamos $A_\alpha := T(\alpha)$ para cada $\alpha \in \Sigma$. Tenemos entonces que la familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ cubre X. Empecemos probando lo siguiente:

> *AFIRMACIÓN.- Para cada $\alpha \in \Sigma$ el conjunto H 2ε-intercambia límites con cada sucesión $(x_n)_n$ en X que está eventualmente en cada conjunto $C_{\alpha|m}$, $m \in \mathbb{N}$.*

Para probar esto basta usar el Lema 2.5.3 ya que cualquier sucesión $(x_n)_n$ está en un conjunto compacto de X, concretamente en el conjunto

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup T(\alpha).$$

El hecho de que K es compacto es un resultado bien conocido sobre aplicaciones multivaluadas superiormente semicontinuas que toman valores compactos pero vamos a incluir una prueba aquí para que la demostración sea autocontenida. Sea $\{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto K en X. Como $T(\alpha)$ es compacto, existe una cantidad finita de elementos de la familia $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_p}$ tales que $T(\alpha) \subset U = \bigcup_{k=1}^p U_{i_k}$. Como T es superiormente semicontinua, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$C_{\alpha|m} = \bigcup \{T(\beta) : \beta \in \Sigma \text{ y } \beta|m = \alpha|m\} \subset U.$$

Como $(x_n)_n$ está eventualmente en cada conjunto $C_{\alpha|m}$, existe $n(m) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > n(m)$. Si tomamos $U_{i_{p+1}}, \dots, U_{i_{p+n(m)}}$ elementos de $\{U_i : i \in I\}$ tales que para $k = 1, 2, \dots, n(m)$ se cumpla que $x_k \in U_{i_{p+k}}$. Tenemos que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p+n(m)} U_{i_k}$ y consecuentemente K es compacto con lo que la AFIRMACIÓN queda probada. Ahora la desigualdad (a) sale del Lema 2.5.5. Para terminar, observemos que dada $f \in H$ si tomamos $\varphi(n) := f$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{clust}_{Z^K}(\varphi) = \{f\}$ y por lo tanto tendremos que

$$\hat{d}(H, C(X,Z)) \leq \operatorname{ck}(H), \tag{2.25}$$

lo que nos proporciona la desigualdad (b). □

Teorema 2.5.7 ([ACb])**.** *Sea X un espacio numerablemente K-determinado, (Z,d) un espacio métrico separable y H un subconjunto relativamente compacto del espacio (Z^X, τ_p). Entonces*

$$\operatorname{ck}(H) \overset{(a)}{\leq} \hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \overset{(b)}{\leq} 3\operatorname{ck}(H) + 2\hat{d}(H, C(X,Z)) \overset{(c)}{\leq} 5\operatorname{ck}(H).$$

Demostración. La desigualdad (a) sale directamente de las definiciones involucradas. Cuando $\operatorname{ck}(H) = +\infty$ todas las desigualdades son triviales. Así que sólo tenemos que tener en cuenta el caso $\operatorname{ck}(H) < +\infty$. La desigualdad (c) se obtiene de (2.25). Para probar (b) definimos ε al igual que hicimos en el Teorema 2.5.6 como $\varepsilon := \operatorname{ck}(H) + \hat{d}(H, C(X,Z))$. Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$\alpha > \operatorname{ck}(H). \tag{2.26}$$

Tomemos $f \in \overline{H}^{Z^X}$. El Teorema 2.5.6 asegura la existencia de una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que

$$\sup_{x \in X} d(g(x), f(x)) \leq 2\varepsilon \tag{2.27}$$

para cualquier punto de aglomeración g de (f_n) en Z^X. La desigualdad (2.26) nos asegura la existencia de un punto de aglomeración g de dicha sucesión con $d(g, C(X,Z)) < \alpha$ lo que junto a la desigualdad (2.27) nos da (b). □

Obsérvese que si $H \subset C(X,Z)$ entonces $\hat{d}(H, C(X,Z)) = 0$ y por lo tanto, la constante 5 puede reemplazarse por un 3 en la desigualdad (c) del resultado previo. Obsérvese también que los Teoremas 2.5.6 y 2.5.7 son autocontenidos y más generales que el Corolario 2.4.9. También podemos hacer aquí como ya hicimos en el Corolario 2.4.12.

Corolario 2.5.8 ([ACb])**.** *Si X y (Z,d) son como en el Teorema 2.5.7 y $H \subset C(X,Z)$ entonces son equivalentes:*

(i) $\operatorname{ck}(H) = 0$,

(ii) H es relativamente numerablemente compacto en $(C(X,Z), \tau_p)$,

(iii) H es relativamente compacto en $(C(X,Z), \tau_p)$.

Mientras (iii)⇒(i) es inmediato y (ii)⇔(iii) era conocido [Ori87], la implicación (i)⇒(ii) parece que efectivamente requiere las desigualdades del Teorema 2.5.7: nosotros no conocemos una demostración de este hecho sin utilizar las desigualdades que hemos establecido.

Para terminar vemos que de los resultados de esta sección se puede deducir directamente la angelicidad de los espacios $(C(X,Z),\tau_p)$ para X numerablemente K-determinado y Z métrico separable. De hecho, por el siguiente teorema, podremos deducir que esto también es cierto para cualquier espacio métrico. Incluimos la prueba del siguiente teorema para hacer esta sección autocontenida.

Teorema 2.5.9 (Fremlin, [Flo80, Theorem 3.5])**.** *Sea X un espacio topológico. Si $(C(X,\mathbb{R}),\tau_p)$ es angélico, entonces $(C(X,Z),\tau_p)$ es angélico para todo espacio métrico Z.*

Demostración. Si $H\subset C(X,Z)$ es τ_p-relativamente numerablemente compacto, entonces para cada $x\in X$, la proyección

$$A(x):=\{f(x): f\in H\}$$

es un conjunto relativamente numerablemente compacto en Z y por lo tanto relativamente compacto en Z. Así por el teorema de Tychonoff, A es relativamente compacto en Z^X. Por lo tanto, para ver que H es relativamente compacto en $(C(X,Z),\tau_p)$ es suficiente probar que $\overline{H}^{Z^X}\subset C(X,Z)$. Para ello basta ver que si fijamos $f\in\overline{H}^{Z^X}$, entonces f es continua. Fijemos $x\in X$ y definamos

$$\begin{array}{rccc} T: & Z & \to & \mathbb{R} \\ & z & \rightsquigarrow & d(z,f(x)). \end{array}$$

T es continua, y por lo tanto también lo es

$$\begin{array}{rccc} T^*: & (Z^X,\tau_p) & \to & (\mathbb{R}^X,\tau_p) \\ & g & \rightsquigarrow & T\circ g. \end{array}$$

Tenemos entonces que $T^*(H)\subset C(X,\mathbb{R})$ y por lo tanto, como $(C(X,\mathbb{R}),\tau_p)$ es angélico, $T^*(H)$ será relativamente compacto en $(C(X,\mathbb{R}),\tau_p)$. Así tenemos que $T^*(f)$ es continua, pero por otro lado $T^*(f)=d(f(\cdot),f(x))$, lo que nos permite concluir que f es continua en x y esto lo podemos hacer para todo $x\in X$.

Para finalizar la prueba, nos queda ver ahora que si $f\in\overline{H}^{Z^X}$, entonces existe una sucesión en H que converge puntualmente a f. Consideremos ahora la aplicación continua

$$\begin{array}{rccc} S: & (C(X,Z),\tau_p) & \to & (C(X,\mathbb{R}),\tau_p) \\ & g & \rightsquigarrow & d(g(\cdot),f(\cdot)). \end{array}$$

Tenemos que $\overline{S(H)}^{\tau_p}$ es un conjunto compacto y

$$0=S(f)\in S(\overline{A}^{\tau_p})\subset\overline{S(H)}^{\tau_p}.$$

Por la angelicidad de $(C(X,\mathbb{R}),\tau_p)$, existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que $(S(f_n))_n$ converge puntualmente a 0. Por la definición de S, esto se traduce en que $(f_n)_n$ converge puntualmente a f con lo que la demostración termina. □

Corolario 2.5.10 (Orihuela, [Ori87])**.** *Sea (Z,d) un espacio métrico y X un espacio numerablemente K-determinado, entonces $C(X,Z)$ es angélico.*

Demostración. Por el Teorema 2.5.9 basta con demostrar que $(C(X,\mathbb{R}),\tau_p)$ es angélico. En particular, nos basta con ver que $(C(X,Z),\tau_p)$ es angélico si Z es separable, y esto es inmediato de los resultados previos. Si tomamos $H \subset C(X,Z)$ un conjunto τ_p-relativamente numerablemente compacto en $C(X,Z)$, entonces $\mathrm{ck}(H) = 0$. Esto implica que el lado derecho de la desigualdad (c) en el Teorema 2.5.7 es cero y por lo tanto tendremos que

$$\hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) = 0,$$

lo que nos dice que $\overline{H}^{Z^X} \subset C(X,Z)$ y así H es relativamente compacto en $(C(X,Z),\tau_p)$. Por otro lado, si tomamos $f \in \overline{H}^{Z^X}$, por el Teorema 2.5.6 tendremos que existe una sucesión $(f_n)_n$ en H tal que para cualquier punto de τ_p-aglomeración g de $(f_n)_n$ se tiene

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) = 0.$$

Esto implica que la sucesión $(f_n)_n$ de hecho converge a f debido a que el conjunto $\overline{H}^{Z^X}$ es compacto en la topología producto y tiene f como su único punto de τ_p-aglomeración. $\square$

Observemos que esta sección es autocontenida y aunque se use el concepto de ε-intercambio de límites, en realidad no hemos usado ninguno de los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Por otro lado, tenemos que si X es un espacio numerablemente K-determinado, entonces X es un espacio Lindelöf, y en particular, como se comentó en la Sección 1.2, paracompacto, así que el Teorema 1.2.19 aquí también es válido cuando Z es un subconjunto convexo de un espacio normado. Por lo tanto, aunque no hayamos usado el concepto de oscilación, este es equivalente a la distancia con la que trabajamos ya que tenemos las desigualdades

$$\frac{1}{2}\mathrm{osc}(f) \leq d(f, C(X,Z)) \leq \mathrm{osc}(f)$$

para toda función $f \in Z^X$.

2.6 Espacios con *tightness* numerable

En las dos secciones anteriores hemos estudiado versiones cuantitativas de la angelicidad de espacios $(C(X,Z),\tau_p)$ bajo distintas hipótesis del espacio topológico X y el espacio métrico (Z,d). Hemos obtenido en particular distintas desigualdades entre $\mathrm{ck}(H)$ y $\hat{d}(\overline{H}, C(X,Z))$. Vamos a dedicar ahora esta sección a estudiar la relación entre estos dos índices cuando X es un espacio con *tightness* numerable o en el caso más restrictivo de que se cumpla el primer axioma de numerabilidad.

Definición 2.6.1. *Se dice que un espacio topológico T tiene* tightness *numerable si para todo subconjunto S de T y $t \in \overline{S}$, existe un subconjunto numerable A de S tal que $t \in \overline{A}$.*

Los espacios más simples que tienen *tightness* numerable son los que cumplen el primer axioma de numerabilidad (en particular, los espacios métricos). Sin embargo existen espacios que no cumplen el primer axioma de numerabilidad y tienen *tightness* numerable, como por ejemplo los espacios de Banach con la topología débil, véase [Köt69, §24.1.6]. Si K es un espacio compacto tal que $(C(K),\tau_p)$ es Lindelöf, entonces K tiene *tightness* numerable: por lo tanto, los compactos de Talagrand, Gulko y Corson tienen *tightness* numerable, [Tal79]. Algunas ideas de la prueba de la siguiente proposición se inspiran en [Sán07, Proposición 8.10], resultado que es mejorado en nuestro Corolario 2.6.4.

Proposición 2.6.2 ([ACb])**.** *Sea X un espacio con* tightness *numerable y H un subconjunto relativamente compacto de $(\mathbb{R}^X,\tau_p)$. Entonces*

$$\sup_{f\in\overline{H}} \operatorname{osc}(f) = \sup_{\varphi\in H^{\mathbb{N}}} \operatorname{ínf}\{\operatorname{osc}(f) : f\in \operatorname{clust}_{\mathbb{R}^X}(\varphi)\}. \tag{2.28}$$

Demostración. Sea α el lado derecho de (2.28). Claramente

$$\beta := \sup_{f\in\overline{H}} \operatorname{osc}(f)\geq \alpha.$$

Si $\beta=0$ tenemos que la igualdad es cierta. Si $\beta>0$, para probar que la igualdad (2.28) se cumple basta con ver que si $\beta>\varepsilon>0$ entonces $\alpha\geq\varepsilon$. Tomemos $f\in\overline{H}$ tal que $\operatorname{osc}(f)>\varepsilon$ y fijemos $x_0\in X$ tal que

$$\operatorname{osc}(f,x_0)>\varepsilon. \tag{2.29}$$

Sea $\mathscr{U}$ una base de entornos para $x_0\in X$. Si definimos

$$f_1(x_0)=\operatorname{ínf}_{U\in\mathscr{U}}\sup_{y\in U} f(y) \quad \text{y} \quad f_2(x_0)=\sup_{V\in\mathscr{U}}\operatorname{ínf}_{z\in V} f(z),$$

entonces para cada $U,V\in\mathscr{U}$ tenemos que

$$+\infty\geq \sup_{y\in U} f(y)\geq f_1(x_0)\geq f(x_0)\geq f_2(x_0)\geq \operatorname{ínf}_{z\in V} f(z)\geq -\infty. \tag{2.30}$$

Probamos ahora la siguiente afirmación:

> *AFIRMACIÓN.- para cada $U\in\mathscr{U}$ existen $y_U,z_U\in U$ tales que para cada par U,V en $\mathscr{U}$ tenemos que*
>
> $$f(y_U)-f(z_V)>\varepsilon. \tag{2.31}$$

Distinguimos aquí tres casos:

CASO 1. Los valores $f_1(x_0)$ y $f_2(x_0)$ son reales.- En este caso claramente tenemos que

$$\operatorname{osc}(f,x_0)=f_1(x_0)-f_2(x_0)\overset{(2.29)}{>}\varepsilon.$$

Para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ la desigualdad (2.30) se puede reescribir entonces como

$$\sup_{y\in U} f(y) - \frac{\varepsilon}{2} \geq f_1(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > \gamma > f_2(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \inf_{z\in V} f(z) + \frac{\varepsilon}{2},$$

para cada $U,V \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, para cada $U,V \in \mathscr{U}$ podemos coger $y_U \in U$ y $z_V \in V$ tales que

$$f(y_U) - \frac{\varepsilon}{2} > \gamma > f(z_V) + \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que la AFIRMACIÓN queda probada en este caso.

CASO 2. $f_1(x_0) = +\infty$.- En este caso, la desigualdad (2.30) se puede reescribir para cada $U,V \in \mathscr{U}$ como

$$+\infty = \sup_{y\in U} f(y) > f(x_0) + 2\varepsilon > f(x_0) + \varepsilon > f_2(x_0) \geq \inf_{z\in V} f(z) \geq -\infty.$$

Por lo tanto podemos tomar $y_U \in U$ y $z_V \in V$ tales que

$$f(y_U) > f(x_0) + 2\varepsilon > f(x_0) + \varepsilon > f(z_V),$$

con lo que la AFIRMACIÓN queda probada en este caso.

CASO 3. $f_1(x_0) = -\infty$.- Este caso es similar al caso *CASO 2*.

Observemos que

$$x_0 \in \overline{\{y_U : U \in \mathscr{U}\}} \cap \overline{\{z_V : V \in \mathscr{U}\}}.$$

Como X tiene *tightness* numerable, existen conjuntos numerables

$$B \subset \{y_U : U \in \mathscr{U}\} \quad \text{y} \quad C \subset \{z_V : V \in \mathscr{U}\}$$

tales que

$$x_0 \in \overline{B} \cap \overline{C}. \tag{2.32}$$

Tenemos entonces que $D := B \cup C \subset X$ es numerable. En tal caso, como $f \in \overline{H}$, existe una sucesión $\varphi \in H^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_n \varphi(n)(x) = f(x)$ para cada $x \in D$. Por lo tanto, si g es un punto de τ_p-aglomeración de φ entonces $g|_D = f|_D$ y si $U \in \mathscr{U}$ es arbitrario, la ecuación (2.32) nos permite tomar $b \in B \cap U$ y $c \in C \cap U$ con lo que

$$d(g(b), g(c)) > \varepsilon$$

por (2.31) ya que $f(b) = g(b)$ y $f(c) = g(c)$. Por lo tanto $\operatorname{osc}(g, x_0) \geq \varepsilon$. Hemos probado que

$$\inf\{\operatorname{osc}(g) : g \in \operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi)\} \geq \varepsilon$$

así que $\alpha \geq \varepsilon$ con lo que se concluye la prueba. $\square$

Cuando suponemos que X cumple el primer axioma de numerabilidad, en la Proposición 2.6.2 se puede reemplazar $\mathbb{R}$ por un espacio métrico arbitrario, y la prueba es mucho más sencilla.

Proposición 2.6.3 ([ACb]). *Sea X un espacio que cumpla el primer axioma de numerabilidad, (Z,d) un espacio métrico y H un subconjunto relativamente compacto de (Z^X,τ_p). Entonces*

$$\sup_{f\in\overline{H}} \operatorname{osc}(f) = \sup_{\varphi\in H^{\mathbb{N}}} \inf\{\operatorname{osc}(f) : f \in \operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi)\}. \tag{2.33}$$

Demostración. Al igual que en la prueba de la Proposición 2.6.3 tenemos que

$$\beta := \sup_{f\in\overline{H}} \operatorname{osc}(f) \geq \alpha$$

donde α el lado derecho de (2.33) así que es suficiente con ver que si $\beta > \varepsilon > 0$ entonces $\alpha \geq \varepsilon$.

Tomemos $f \in \overline{H}$ tal que $\operatorname{osc}(f) > \varepsilon$ y fijemos $x_0 \in X$ tal que

$$\operatorname{osc}(f,x_0) > \varepsilon. \tag{2.34}$$

Sea $\mathscr{U}$ una base de entornos numerable para $x_0 \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando la desigualdad (2.34) podemos tomar $x_n, y_n \in U_n$ tales que $d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. Escribamos

$$D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $D \subset X$ es numerable, procediendo como hicimos en la prueba de la Proposición 2.6.2, deducimos la existencia de una sucesión $\varphi \in H^{\mathbb{N}}$ tal que $\operatorname{lím}_n \varphi(n)(x) = f(x)$ para cada $x \in D$. Por lo tanto, si g es un punto de τ_p-aglomeración arbitrario de φ, entonces $g|_D = f|_D$ y en particular

$$d(g(x_n), g(y_n)) > \varepsilon, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Así tenemos que $\operatorname{osc}(g,x_0) \geq \varepsilon$ y como g es un punto de τ_p-aglomeración arbitrario de φ, la prueba de este caso se termina igual que se concluía la prueba de la Proposición 2.6.2. $\square$

Corolario 2.6.4 ([ACb]). *Sea X un espacio topológico, sea E un espacio de Banach y sea H un subconjunto τ_p-relativamente compacto de E^X.*

(i) Si X es un espacio métrico, entonces

$$\operatorname{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, C(X,E)) \leq 2\operatorname{ck}(H).$$

(ii) Si X es normal con tightness *numerable y $E = \mathbb{R}$, entonces*

$$d(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) = \operatorname{ck}(H).$$

Demostración. Si X es un espacio métrico, en particular cumple el primer axioma de numerabilidad, y por lo tanto, aplicando la Proposición 2.6.3 tenemos que

$$\sup_{f\in\overline{H}} \operatorname{osc}(f) = \sup_{\varphi\in H^{\mathbb{N}}} \inf\{\operatorname{osc}(f) : f \in \operatorname{clust}_{E^X}(\varphi)\}.$$

Por otro lado, al ser X un espacio métrico, también es paracompacto, así que la igualdad anterior junto al Teorema 1.2.19 nos da

$$\mathrm{ck}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, C(X,E)) \leq 2\,\mathrm{ck}(H).$$

En el caso de que X tenga *tightness* numerable y $Z = \mathbb{R}$, podremos aplicar la Proposición 2.6.2 junto al Teorema 1.1.9 para obtener la igualdad deseada. □

Observemos que la igualdad $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C(X)) = \mathrm{ck}(H)$ no es cierta en general en el caso de que X no tenga *tightness* numerable como se puede ver en el Ejemplo 2.4.10.

2.7 Versión cuantitativa del teorema de Mazur

Un clásico teorema de Mazur dice que si tenemos una sucesión acotada de funciones continuas que convergen a una función continua f definida sobre un compacto, entonces en la envoltura convexa de la sucesión podemos encontrar una sucesión que converge a f uniformemente, Corolario 2.7.2. El objetivo de esta sección es obtener una versión cuantitativa de este teorema que además nos será muy útil en la prueba del Teorema 4.3.2. Para ello vamos a usar el Lema de Pták, Teorema 1.6.4, inspirándonos en las ideas de la prueba del Teorema de Mazur que aparece en [Tod97].

Teorema 2.7.1 ([ACN])**.** *Sea X un espacio numerablemente compacto, $a > 0$ y $(f_n)_n \subset \mathbb{R}^X$ una sucesión uniformemente acotada tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq a$ eventualmente en n, es decir, para cada $x \in X$ existe n_x tal que*

$$\text{si } n > n_x, \text{ entonces } |f_n(x) - f(x)| \leq a.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathrm{conv}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\|g - f\|_\infty < 2d + a + \varepsilon.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f = 0$ y que $d < +\infty$. Para cada $x \in X$ definamos

$$F_x := \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \geq 2d + a + \varepsilon/2\}.$$

Para cada $x \in X$, existe n_x tal que cuando $n > n_x$, $|f_n(x)| \leq a$, por lo que tenemos que F_x es finito. Pongamos $\mathscr{F} = \{F_x : x \in X\}$. Veamos que $\mathscr{F}$ es una familia bien fundamentada. Supongamos que no es así. Entonces tenemos que existe una sucesión creciente $(n_i)_i$ en $\mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$ tal que $\{n_1, \dots, n_k\} \subset F_{x_k}$. Como X es numerablemente compacto, $(x_k)_k$ debe tener un punto de aglomeración x_∞. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Entonces para $j \geq k$, $n_k \in F_{x_j}$. Así que para todo $j \geq k$, $|f_{n_k}(x_j)| \geq 2d + a + \varepsilon/2$. Como $d(f_{n_k}, C(X)) \leq d$, existe $g \in C(X)$ tal que $d(f_{n_k}, g) < d + \varepsilon/8$. Por lo tanto para cada $j \geq k$,

$$\begin{aligned} 2d + a + \varepsilon/2 \leq |f_{n_k}(x_j)| &\leq |f_{n_k}(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x_\infty)| \\ &\quad + |g(x_\infty) - f_{n_k}(x_\infty)| + |f_{n_k}(x_\infty)| \\ &\leq |f_{n_k}(x_\infty)| + 2d + \varepsilon/4 + |g(x_j) - g(x_\infty)|; \end{aligned}$$

así que

$$a+\varepsilon/4 \leq |f_{n_k}(x_\infty)| + |g(x_j) - g(x_\infty)|.$$

Como g es continua y x_∞ es un punto de aglomeración de $(x_j)_j$, $|g(x_j)-g(x_\infty)|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño. Por lo tanto, $a+\varepsilon/4 \leq |f_{n_k}(x_\infty)|$ y esto es cierto para cada $k \in \mathbb{N}$, contradiciendo la hipótesis de que $|f_n(x_\infty)| \leq a$ eventualmente cuando n tiende a $+\infty$. Hemos probado que $\mathscr{F}$ es bien fundamentada, así que podemos aplicar el Lema de Pták, 1.6.4, a $\mathscr{F}$, por lo que existe $\mu \in \mathbf{M}$ tal que $\mu(F_x) < \varepsilon/(3N)$ para cada $x \in X$, donde N es una cota uniforme de $(f_n)_n$. Elijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{sop}(\mu) \subset \{1,2,\ldots,k\}$. Sea $\lambda_i = \mu(i)$ para $1 \leq i \leq k$. Entonces $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Sea $x \in X$. Para $i \notin F_x$, $|f_i(x)| < 2d+a+\varepsilon/2$. Esto nos lleva a que:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)\right| &\leq \sum_{i\in F_x\cap\{1,\ldots,k\}} |\lambda_i f_i(x)| + \sum_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus F_x} |\lambda_i f_i(x)| \\
&\leq N \sum_{i\in F_x\cap\{1,\ldots,k\}} \lambda_i + \sum_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus F_x} \lambda_i (2d+a+\frac{\varepsilon}{2}) \\
&\leq N\mu(F_x) + 2d + a + \frac{\varepsilon}{2} \leq N\frac{\varepsilon}{3N} + 2d + a + \frac{\varepsilon}{2} = 2d + a + \frac{5}{6}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i\|_\infty < 2d+a+\varepsilon$ como queríamos. □

Corolario 2.7.2 (Mazur)**.** *Sea X un espacio numerablemente compacto y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas uniformemente acotadas definidas en X y puntualmente convergente a una función continua f. Entonces existe una sucesión $(g_n)_n$ en* $\mathrm{conv}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *que es $\|\cdot\|_\infty$-convergente a f.*

Capítulo 3

Distancia a espacios de Banach

En el Capítulo 2 hemos estudiado en términos de distancias lo lejos que está un conjunto $H \subset Z^X$ de ser τ_p-relativamente compacto en $C(X,Z)$. Podemos proceder de forma similar cuando consideramos un espacio de Banach E: si H es un subconjunto acotado de E y consideramos la w^*-clausura de H en X^{**} podemos ver una forma de *medir* si H está próximo de ser w-relativamente compacto en E mediante la distancia

$$\mathrm{k}(H) = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) = \sup_{x \in \overline{H}^{w^*}} d(x, E),$$

donde las distancias consideradas son las asociadas a la norma de E^{**}. En este capítulo vemos cómo podemos aplicar los resultados obtenidos sobre distancias a espacios de funciones continuas sobre compactos para obtener resultados similares sobre distancias a espacios de Banach, Proposición 3.1.3. En particular demostramos que si H es un subconjunto acotado de un espacio de Banach, entonces

$$\mathrm{ck}(H) \leq \mathrm{k}(H) \leq 2\,\mathrm{ck}(H),$$

donde

$$\mathrm{ck}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\mathrm{clust}_{(E^{**}, w^*)}(\varphi), E),$$

véase Corolario 3.3.11. Este resultado nos explica *la diferencia cuantitativa entre w-compacidad numerable y w-compacidad* en espacios de Banach.

Obsérvese que tanto k como ck son medidas de no compacidad débil, Definición 3.3.1. También estudiamos en este capítulo otras medidas de no compacidad débil, viendo la relación que hay entre ellas en general y en qué casos son iguales.

Por último, para cerrar este capítulo, obtenemos versiones cuantitativas del teorema de Gantmacher sobre compacidad débil de operadores adjuntos y del teorema de Grothendieck sobre la relación entre compacidad débil y compacidad puntual en espacios de funciones continuas sobre conjuntos compactos. En la Sección 3.1 recogemos resultados de [CMR06] y de [GHS04] que se utilizarán más adelante. En la Sección 3.2 recogemos resultados de [FHMZ05] y [Gra06]. El resto de secciones contiene resultados originales.

3.1 Distancias a espacios de Banach vía distancias a espacios de funciones continuas

En esta sección estudiamos como se pueden aplicar resultados del capítulo anterior a espacios de Banach. Esto se consigue gracias a la Proposición 3.1.3.

Dado un subconjunto compacto K de un espacio localmente convexo, denotamos por $\mathscr{A}(K)$ el espacio de las funciones afines definidas en K, y por $\mathscr{A}^C(K)$ al espacio de las funciones afines continuas definidas en K.

Proposición 3.1.1 ([CMR06, Proposition 4.1])**.** *Sea K un subconjunto compacto convexo de un espacio localmente convexo y sea $f \in \mathscr{A}(K)$. Entonces*

$$d(f, C(K)) = d(f, \mathscr{A}^C(K)).$$

Demostración. Es suficiente ver que $d(f, \mathscr{A}^C(K)) \leq d(f, C(K))$. Después del Teorema 1.1.9, esto es lo mismo que ver que $d(f, \mathscr{A}^C(K)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$. Sea $\delta > \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$, definamos al igual que se hace en la prueba del Teorema 1.1.9

$$f_1(x) = \inf_{U \in \mathscr{U}_x} \sup_{z \in U} f(z) - \delta$$

y

$$f_2(x) = \sup_{U \in \mathscr{U}_x} \inf_{z \in U} f(z) + \delta$$

donde $\mathscr{U}_x$ es el conjunto de entornos de x en K. Tenemos entonces que f_1 superiormente semicontinua, f_2 es inferiormente semicontinua y $f_1 < f_2$. Veamos que f_1 es cóncava (y de forma análoga f_2 es convexa). Sea $\eta > 0$, $x, y \in K$ y $0 < \lambda < 1$. Sea U un entorno de $\lambda x + (1-\lambda)y$ tal que

$$\sup_{z \in U} f(z) - \delta \leq f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \eta. \tag{3.1}$$

Sean V y W entornos de x e y respectivamente, tales que $\lambda V + (1-\lambda)W \subset U$. Como f es afín, para $u \in V$ y $v \in W$ tenemos que

$$\lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) = f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \sup_{z \in U} f(z)$$

y por lo tanto

$$\lambda \sup_{z \in V} f(z) + (1-\lambda) \sup_{z \in W} f(z) - \delta \leq \sup_{z \in U} f(z) - \delta$$

de donde deducimos usando (3.1) que

$$\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(x) \leq f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \eta.$$

Por lo tanto, como η era arbitrario tenemos que f_1 es cóncava. Dado que $f_1 < f_2$, por el Teorema 1.3.3, existe una función afín continua h definida en K tal que

$$f_1(x) < h(x) < f_2(x)$$

para todo $x \in K$. Como para $x \in K$ se cumple que $f_2(x) - \delta \leq f(x)$ y $f_1(x) + \delta \geq f(x)$, tenemos que $h(x) - \delta < f(x) < h(x) + \delta$ y por lo tanto $\|f - h\|_\infty \leq \delta$. Así que $d(f, \mathscr{A}^C(K)) \leq \delta$ para todo $\delta > \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K)$, es decir,

$$d(f, \mathscr{A}^C(K)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K).$$

□

Recordemos que como vimos en la Sección 1.1, si X es normal y $f \in \mathbb{R}^X$ es acotada, entonces existe $g \in C(X)$ tal que $d(f, g) = d(f, C(X))$.

Problema 3. *Sea K un espacio compacto y sea $f \in \mathscr{A}(K)$. ¿Existe alguna función $g \in \mathscr{A}^C(K)$ tal que $d(f, g) = d(f, \mathscr{A}^C(K))$?*

La Proposición 3.1.3 nos va a decir que dado un espacio de Banach E, medir la distancia de un elemento del bidual $z \in E^{**}$ a E es lo mismo que medir la distancia a $C(B_{E^*}, w^*)$. Obsérvese que dicho resultado es una versión cuantitativa del criterio de completitud de Grothendieck, que enunciamos a continuación.

Teorema 3.1.2 (Criterio de completitud de Grothendieck, véase [Köt69, §21.9(4)])**.** *Sea E un espacio normado y E^{**} su espacio bidual. Son equivalentes*

(i) E es un espacio de Banach,
(ii) todo $x^{**} \in E^{**}$ continuo en (B_{E^*}, w^*) pertenece a E.

Proposición 3.1.3 ([CMR06, Corollary 4.2])**.** *Sea E un espacio de Banach y sea B_{E^*} la bola unidad cerrada en su dual E^* con la topología w^*. Consideremos $i : E \to E^{**}$ y $j : E^{**} \to \ell_\infty(B_{E^*})$ las inclusiones canónicas. Entonces, para todo $x^{**} \in E^{**}$ tenemos que*

$$d(x^{**}, i(E)) = d(j(x^{**}), C(B_{E^*})).$$

Demostración. Viendo x^{**} como una función afín acotada definida en B_{E^*}, tenemos por la Proposición 3.1.1 que para cada $\delta > d(x^{**}, C(B_{E^*}))$ existe una función afín w^*-continua h_1 definida en B_{E^*} tal que $\|x^{**} - h_1\| \leq \delta$. Definamos $h_2(x^*) = -h_1(-x^*)$ para todo $x^* \in B_{E^*}$. Como x^{**} es lineal tenemos que $\|x^{**} - h_2\| \leq \delta$. Por lo tanto, la función $g = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ definida en B_{E^*} es afín, w^*-continua y $g(0) = 0$. Por lo tanto, g se puede extender a una forma lineal y^{**} definida en todo E^*. Ahora bien, como $y^{**}|_{B_{E^*}} = g$ es w^*-continua, por el criterio de completitud de Grothendieck, Teorema 3.1.2, tenemos que $y^{**} = i(x)$ para algún $x \in E$. Finalmente, para cada $x^* \in B_{E^*}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x^{**}(x^*) - i(x)(x^*)\| &= \|\frac{1}{2}x^{**}(x^*) - \frac{1}{2}h_1(x^*) + \frac{1}{2}x^{**}(x^*) - \frac{1}{2}h_2(x^*)\| \\
&\leq \frac{1}{2}(\|x^{**}(x^*) - h_1(x^*)\| + \|x^{**}(x^*) - h_2(x^*)\|) \leq \delta,
\end{aligned}$$

así que como esto ocurre para todo $\delta > d(f, C(B_{E^*}))$ concluimos

$$d(x^{**}, i(E)) \leq d(j(x^{**}), C(B_{E^*})).$$

Dado que la otra desigualdad es evidente, la proposición queda probada. □

Utilizando la Proposición 3.1.3 se pueden particularizar los resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior para $C(K) \subset \mathbb{R}^K$ en espacios de Banach. Consideremos un espacio de Banach E y un conjunto acotado $H \subset E^{**}$. Con la notación de la Proposición 3.1.3 tenemos que

$$\overline{j(H)}^{\tau_p} = j(\overline{H}^{w^*})$$

ya que $\overline{H}^{w^*}$ es un conjunto compacto y j es continua. Así

$$\begin{aligned}\hat{d}(\overline{j(H)}^{\tau_p}, C(B_{E^*}, w^*)) &= \hat{d}(j(\overline{H}^{w^*}), C(B_{E^*}, w^*)) = \sup_{z\in\overline{H}^{w^*}} d(j(z), C(B_{E^*}, w^*)) \\ &= \sup_{z\in\overline{H}^{w^*}} d(z, i(E)) = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, i(E)).\end{aligned}$$

De forma análoga también se tiene que

$$d(\overline{j(H)}^{\tau_p}, C(B_{E^*}, w^*)) = d(\overline{H}^{w^*}, i(E)).$$

En particular tenemos que:

Corolario 3.1.4. *Sea E un espacio de Banach y sea $H \subset E$ acotado. Entonces H es débilmente relativamente compacto en E si, y sólo si,*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{E^*}}}, C(B_{E^*})) = 0.$$

Como consecuencia del Corolario 2.2.1 y la Proposición 3.1.3 tenemos:

Corolario 3.1.5 ([FHMZ05, Proposition 8])**.** *Sea E un espacio de Banach y H un subconjunto acotado de E.*

(i) Si H ε-intercambia límites con B_{E^*}, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \varepsilon$.

(ii) Si $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \varepsilon$, entonces H 2ε-intercambia límites con B_{E^*}.

Como consecuencia del Corolario 2.2.2 y la Proposición 3.1.3 tenemos:

Corolario 3.1.6. *Sea E un espacio de Banach y H un subconjunto acotado de E que ε-intercambia límites con un conjunto w^*-denso de B_{E^*}, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq 2\varepsilon$.*

El Teorema de Krein nos dice que si E es un espacio de Banach y $H \subset E$ es un conjunto débilmente relativamente compacto, entonces también lo es su envoltura convexa $\mathrm{conv}(H)$ (véase [FHH+01, Theorem 3.58]). Esto es equivalente a decir que si $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) = 0$, entonces $\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}, E) = 0$. El siguiente resultado es una versión cuantitativa de este teorema.

Corolario 3.1.7 ([FHMZ05, Theorem 2])**.** *Sea E un espacio de Banach y H subconjunto acotado de E. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}, E) \leq 2\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E).$$

Demostración. Basta aplicar el Corolario 2.3.4 y la Proposición 3.1.3. □

Si sólo exigimos que $H \subset E^{**}$ sea w^*-compacto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.8 ([Gra06, Theorem 5]). *Sea E un espacio de Banach y sea $H \subset E^{**}$ un subconjunto w^*-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}, E) \leq 5\hat{d}(H,E).$$

Demostración. Aplicar el Teorema 2.3.5 y la Proposición 3.1.3. □

Observación 3.1.9. En [Gra06] se construye un ejemplo bajo la hipótesis del continuo con el que se demuestra que la constante 2 del Corolario 3.1.7 es óptima. En [GHS04] se construye otro ejemplo en el que se vuelve a demostrar que esta constante es óptima (sin utilizar la hipótesis del continuo). Sin embargo, no se sabe si la constante 5 del Corolario 3.1.8 es la mejor que se puede poner, pero en [GHS04] se demuestra también que no podemos poner una constante menor que 3. De aquí se puede deducir que también tenemos la constante óptima en el Corolario 2.3.4 y que en el Teorema 2.3.5 no podemos poner una constante menor que 3. Además, también tenemos que la constante 2 que aparece en el Corolario 3.1.5 (ii) es también óptima ya que si no lo fuera, se obtendría que tampoco lo sería en el Corolario 3.1.7.

Recogemos en la siguiente proposición un ejemplo distinto al dado en [GHS04], aunque con la misma filosofía, que aparece en [GS06] y [GS07b] y que nos da el mismo resultado tal como se muestra en la Tesis [Sán07].

Proposición 3.1.10 ([GHS04]). *Existe un espacio de Banach X, un subconjunto $H \subset X$ y un subconjunto w^*-compacto $H' \subset B_{X^{**}}$ tales que*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}\, H}^{w^*}, X) = 2\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \quad y \quad \hat{d}(\overline{\mathrm{conv}\, H'}^{w^*}, X) = 3\hat{d}(H', X).$$

Demostración. Consideremos el conjunto de Cantor $\mathscr{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y el conjunto de sucesiones finitas de ceros y unos $\mathscr{S} = \{0,1\}^{(\mathbb{N})}$. Denotemos por λ la probabilidad de Haar sobre $\mathscr{C}$. Al igual que hicimos en la Sección 2.5, si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots) \in \mathscr{C}$, denotemos $\sigma|n = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Para cada subconjunto A de $\{0,1\}^n$ sea $f_A : \mathscr{C} \to \{0,1\}$ la función continua definida como

$$f_A(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma|n \in A, \\ 0 & \text{si } \sigma|n \notin A. \end{cases}$$

Definamos ahora

$$I := \{ f_A : A \subset \{0,1\}^n \text{ y } |A| = 2^n - n, n \in \mathbb{N}\}.$$

I es un conjunto numerable así que podemos expresarlo como $I = \{ f_{A_m} : m \in \mathbb{N}\}$. Para $\sigma \in \mathscr{C}$ denotemos

$$P(\sigma) := \{ f_A \in I : f_A(\sigma) = 0\}.$$

Tenemos entonces que

(i) I separa puntos de $\mathscr{C}$.

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{f_A \in I : \int_{\mathscr{C}} f_A d\lambda \leq 1 - \frac{1}{k}\}$ es finito. Por lo tanto

$$\lim_m \int_{\mathscr{C}} f_{A_m}(\sigma) d\lambda(\sigma) = 1.$$

(iii) Si $\sigma^{(i)} \in \mathscr{C}$ y $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ para $i = 1,2,\ldots p$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{p} P(\sigma^{(i)})^{\varepsilon_i}$$

es un conjunto infinito numerable donde $P(\sigma^{(i)})^{+1} = P(\sigma^{(i)})$ y $P(\sigma^{(i)})^{-1} = I \backslash P(\sigma^{(i)})$.

(iv) Para todo $f_A \in I$ existe $\sigma \in \mathscr{C}$ tal que $f_A(\sigma) = 1$.

Sea βI la compactificación de Stone-Čech del conjunto discreto I. Cada vez que tengamos una aplicación g definida e I denotaremos por $\check{g}$ a su extensión de Stone-Čech a todo el espacio βI. Por (iii) y (iv) tenemos que

$$\emptyset \neq P := \bigcap_{\sigma \in \mathscr{C}} \overline{P(\sigma)}^{\beta I} \subset I^* := \beta I \backslash I.$$

Además P es un conjunto compacto. Consideremos ahora la función $\varphi : \mathscr{C} \to \{0,1\}^I \subset B_{\ell_\infty(I)}$ definida por

$$\varphi(\sigma)(f_A) = f_A(\sigma)$$

para todo $\sigma \in \mathscr{C}$ y $f_A \in I$. La aplicación φ es inyectiva y continua cuando dotamos a $\{0,1\}^I$ de la topología producto que coincide con la topología heredada de $(\ell_\infty(I), w^*)$. El conjunto

$$D := \varphi(\mathscr{C}) \subset \{0,1\}^I$$

es un conjunto compacto homeomorfo a $\mathscr{C}$. Si denotamos por $\check{D}$ al conjunto de aplicaciones continuas sobre βI que son extensión de elementos de D, tenemos que $\check{D}|_P = 0$. Sea ahora $\mu := \varphi(\lambda)$ la probabilidad de Radon sobre D, imagen de λ mediante la función continua φ, y $z_0 \in \overline{\text{conv}(D)}^{w^*}$ el baricentro de μ. Por (ii) tenemos que $\check{z}_0(p) = 1$ para todo $p \in I^*$. Así que

$$\check{z}_0|_P = 1. \tag{3.2}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos

$$D_1^m := \{d \in D : \pi_m(d) = 1\}, \quad D_0^m := \{d \in D : \pi_m(d) = 0\} = D \backslash D_1^m$$

donde $\pi_m : \ell_\infty(I)$ es la proyección sobre la coordenada f_{A_m}. Tenemos entonces que

$$\mu(D_1^m) = \int_D \pi_m(x) d\mu(x) = \int_C \pi_m \circ \varphi(\sigma) d\lambda(\sigma) = \int_C \varphi(\sigma)(f_{A_m}) d\lambda(\sigma) = \int_C f_{A_m}(\sigma) d\lambda(\sigma)$$

así que por (ii) tenemos que $\mu(D_1^m) \to 1$ y por lo tanto $\mu(D_0^m) = \mu(D \backslash D_1) \to 0$. Definamos ahora

$$X := \{f \in \ell_\infty(I) : f|_P = 0\}.$$

Su dual es

$$X^* = \ell_1(I) \oplus_1 M_R(I^*, P),$$

donde $M_R(I^*, P)$ es el espacio de las medidas de Radon ν sobre I^* tales que $|\nu|(P) = 0$. El bidual de X es

$$X^{**} = \ell_\infty(I) \oplus_\infty M_R(I^*, P)^*.$$

Sean $\pi_1 : X^{**} \to \ell_\infty(I)$ y $\pi_2 : X^{**} \to M_R(I^*, P)^*$ las proyecciones canónicas. Sea $J : X \to X^{**}$ la inmersión canónica. Dada $f \in X$, escribimos $J(f) = (f_1, f_2)$ donde $f_1 = \pi_1(f) = f$ y $\pi_2(f) = f_2$ es tal que

$$f_2(\nu) = \nu(\check{f}) = \int_{I^* \backslash P} \check{f} d\nu$$

para toda $\nu \in M_R(I^*, P)$.

La aplicación $\phi : \ell_\infty(I) \to X^{**}$ tal que $\phi(f) = (f, 0)$ es un isomorfismo isométrico entre $\ell_\infty(I)$ y $\pi_1(X^{**})$. La aplicación ϕ también es un isomorfismo entre dichos espacios cuando consideramos las topologías w^* (viendo $\ell_\infty(I)$ como dual de $\ell_1(I)$). Tenemos entonces que $\phi(D) \subset B_{X^{**}}$ es un conjunto w^*-compacto homeomorfo a $\mathscr{C}$. Observemos que $(B_{ob}(I^*, P), \|\cdot\|_\infty)$, el conjunto de las funciones bolerianas acotadas $h : I^* \to \mathbb{R}$ que se anulan sobre P está isométricamente sumergido en $\pi_2(X^{**})$. De hecho, si $f \in X$, entonces

$$\pi_2(f) = f_2 = \check{f} \in B_{ob}(I^*, P).$$

Sea

$$K := \{(f, 0) \in B_{X^{**}} : 0 \leq f \leq d \text{ para algún } d \in D\}.$$

K es un conjunto w^*-compacto de $B_{\ell_\infty(I)} \subset B_{X^{**}}$ tal que $\phi(D) \subset K$ y $\overline{K \cap J(X)}^{w^*} = K$. Denotemos $H = K \cap J(X)$. Vamos ver ahora que

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv} H}^{w^*}, X) = 2\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X).$$

Por el Corolario 3.1.7 es suficiente ver que

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv} H}^{w^*}, X) \geq 2\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X).$$

Sea $(f, 0) \in K$. Se tiene que $\|(f, 0) - \frac{1}{2}J(f)\| = \|(\frac{1}{2}f, -\frac{1}{2}\check{f})\| \leq \frac{1}{2}$ y por lo tanto

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) = \hat{d}(K, X) \leq \frac{1}{2}.$$

Así que basta ver que

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv} H}^{w^*}, X) = \hat{d}(\overline{\operatorname{conv} K}^{w^*}, X) \geq 1.$$

Para ello sea $\eta := \phi(\mu)$ la probabilidad sobre $\phi(D) \subset K$ imagen de μ mediante ϕ. El baricentro $r(\eta)$ de η pertenece a $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ y verifica que $r(\eta) = (z_0, 0)$ donde recordemos que $z_0 \in B_{\ell_\infty(I)}$ era el baricentro de μ. Vamos a ver que $d((z_0,0),J(X)) \geq 1$. Dado $h \in X$ se tiene que $\check{h}|_P = 0$ mientras que por (3.2) tenemos que $\check{z}_0|_P = 1$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto V de P en βI tal que para todo $v \in V$,

$$\check{h}(v) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \check{z}_0(v) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular esto también pasará para cualquier $v \in V \cap I \neq \emptyset$ así que como $\varepsilon > 0$ era arbitrario concluimos que $\|z_0 - h\| \geq 1$. Tenemos entonces que $\|(z_0,0) - (h,\check{h})\| \geq 1$ y por lo tanto

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}\,K}^{w^*}, X) \geq 1$$

como queríamos ver.

Construyamos ahora H'. Sea $g \in B_{ob}(I^*, P)$ la aplicación que vale 1 en $I^* \backslash P$ y 0 en P y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \delta : \ell_\infty(I) &\longrightarrow X^{**} \\ f &\rightsquigarrow (f, \frac{1}{3}g). \end{aligned}$$

δ es una aplicación afín entre $\ell_\infty(I)$ y $\pi_1(X^{**})$ que es continua para las topologías w^*. Por lo tanto

$$H' := \delta(D) = \{(d, \frac{1}{3}g) : d \in D\} \subset B_{X^{**}}$$

es un conjunto w^*-compacto homeomorfo a $\mathscr{C}$. Veamos que

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}\,H'}^{w^*}, X) = 3\hat{d}(H', X). \tag{3.3}$$

Si $(d, \frac{1}{3}g) \in H'$ entonces

$$\|(d, \frac{1}{3}g) - \frac{2}{3}J(d)\| = \|(\frac{1}{3}d, \frac{1}{3}g - \frac{2}{3}\check{d})\| \leq \frac{1}{3}$$

y por lo tanto $\hat{d}(H', J(X)) \leq \frac{1}{3}$. Por otro lado, si $\tau \in \mathscr{C}$, tomamos $d_\tau := \varphi(\tau)$ y $A_\tau := \mathrm{sop}(d_\tau)$ que es un conjunto infinito. Vamos a ver que $d((d_\tau, \frac{1}{3}g), J(X)) \geq 1/3$. Supongamos que esto es falso. Entonces existe $h \in X$ tal que

$$\|(d_\tau, \frac{1}{3}g) - J(h)\| = \|(d_\tau - h, \frac{1}{3}g - h)\| < \frac{1}{3}.$$

Así que $\|d_\tau - h\| < \frac{1}{3}$ por lo que $h > \frac{2}{3}$ en A_τ y entonces $\check{h} \geq \frac{2}{3}$ en $\overline{A_\tau}^{\beta I}$. Como A_τ es infinito, existe $p \in \overline{A_\tau}^{\beta I} \backslash I \subset I^*$. Sea $\delta_p \in M_R(I^*, P)$ la probabilidad que vale 1 en p. Entonces

$$|((d_\tau, \frac{1}{3}g) - (h, \check{h}))(\delta_p)| = |(\frac{1}{3}g - \check{h})(\delta_p)| = |\frac{1}{3}g(p) - \check{h}(p)| \geq \frac{1}{3},$$

así que $\|(d_\tau, \frac{1}{3}g) - J(h)\| \geq \frac{1}{3}$ con lo que llegamos a una contradicción con la hipótesis inicial. Con esto queda demostrado que

$$\hat{d}(H', X) = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, para probar (3.3) tenemos que ver que $\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H')}^{w^*}, J(X)) = 1$. Es inmediato que $\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H')}^{w^*}, J(X)) \leq 1$ ya que $\overline{\mathrm{conv}(H')}^{w^*} \subset B_{X^{**}}$. Por otro lado, sea $\rho := \delta(\mu)$. Razonando ahora de forma similar a como hicimos con η para demostrar que $\hat{d}(\overline{\mathrm{conv} K}^{w^*}, X) \geq 1$ obtenemos que $d(\overline{\mathrm{conv}(H')}^{w^*}, J(X)) \geq 1$ con lo que finaliza la prueba. $\square$

3.2 Envoltura convexa en algunos casos particulares

En esta sección estudiamos algunas propiedades de los espacios de Banach que nos permitan asegurar que las dos distancias involucradas en el Corolario 3.1.7 son iguales. Esto ocurre en el caso de que el dual no contenga una copia de ℓ_1 y en el caso de que E cumpla cierta propiedad que llamaremos J que fue introducida en [Gra06].

Definición 3.2.1. *Se dice que un espacio de Banach E tiene la propiedad J (brevemente $E \in J$) si para cada $z \in B_{E^{**}} \backslash E$ y para todo $0 < b < d(z, E)$, existe una sucesión $\{x_n^*\}_n \subset \{x^* \in B_{E^*} : z(x^*) \geq b\}$ que converge a 0 en la topología w^*.*

Veamos primero el siguiente lema técnico:

Lema 3.2.2. *Si $z \in E^{**} \setminus E$ y $b \in \mathbb{R}$ cumple que $d(z, E) > b > 0$, entonces*

$$0 \in \overline{\{x^* \in B_{E^*} : z(x^*) > b\}}^{w^*}.$$

Demostración. Tenemos que probar que para cada $\varepsilon > 0$ y para cada cantidad finita de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ el w^*-entorno del origen en E^*

$$V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{y^* \in E^* : \sup_{1 \leq i \leq n} |y^*(x_i)| < \varepsilon\}$$

corta con el conjunto $S(z, b) := \{x^* \in B_{E^*} : z(x^*) > b\}$. El teorema de Hahn-Banach nos dice que existe un funcional $\phi \in E^{***}$ tal que $\phi(x) = 0$ para cada $x \in E$, $\|\phi\| = 1$ y $\phi(z) = d(z, E)$. Podemos suponer que $b < b + \varepsilon < d(z, X)$. Usando el teorema de Goldstine para $B_{E^*} \subset B_{E^{***}}$ podemos encontrar un elemento x^* en B_{E^*} tal que

$$|\phi(x_i) - x^*(x_i)| = |x^*(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

y

$$|\phi(z) - z(x^*)| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Las desigualdades (3.4) implican que $x^*, -x^* \in V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)$. Por otro lado, la desigualdad (3.5) implica que

$$\begin{aligned}|z(x^*)| = |(z(x^*) - \phi(z)) + \phi(z)| &\geq \big| |z(x^*) - \phi(z)| - |\phi(z)| \big| \\ &= |\phi(z)| - |z(x^*) - \phi(z)| > b + \varepsilon - \varepsilon = b.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta todo esto, tenemos que x^* o $-x^*$ pertenecen a

$$V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \cap S(z, b)$$

con lo que termina la prueba. □

Proposición 3.2.3 ([Gra06]). *Sea E un espacio de Banach tal que (B_{E^*}, w^*) es angélico. Entonces $E \in J$.*

Demostración. Sea $z \in B_{E^{**}} \backslash E$, $0 < z < d(z, E)$ y $S(z, b) = \{u \in B_{E^*} : z(u) > b\}$. Por el Lema 3.2.2 tenemos que $0 \in \overline{A}^{\sigma(E^*, E)}$. Por lo tanto, como (B_{E^*}, w^*) es angélico tendremos que existe una sucesión $(x_m^*)_m \subset A$ que converge a 0 en (B_{E^*}, w^*) con lo que termina la prueba. □

Gracias a la Proposición 3.2.3 tendremos que el siguiente resultado es una generalización de [FHMZ05, Proposition 14]. El siguiente resultado es original y nos hará falta en la prueba del Teorema 3.2.5.

Proposición 3.2.4. *Sea E un espacio de Banach, H un subconjunto acotado y $\varepsilon > 0$.*

(i) Si $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \varepsilon$, entonces H ε-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n \subset B_{E^*}$ w^*-convergente a 0.

(ii) Si $E \in J$ y H ε-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n \subset B_{E^*}$ que w^*-convergente a 0, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) \leq \varepsilon$.

Demostración. Veamos primero (i). Sean $(x_m)_m \subset H$ y $(x_n^*)_n \subset B_{E^*}$ tales que w^*-$\lim x_n^* = 0$ y existan los siguientes límites

$$\lim_n \lim_m x_n^*(x_m) \quad \text{y} \quad \lim_m \lim_n x_n^*(x_m).$$

Tomemos $z \in \overline{H}^{w^*}$ un w^*-punto de acumulación de $(x_n)_n$ y fijemos $\delta > 0$. Tenemos entonces que existe $x \in E$ tal que $\|z - x\| \leq \varepsilon + \delta$ y que

$$\lim_n \lim_m x_n^*(x_m) = \lim_n x_n^*(z) \quad \text{y} \quad \lim_m \lim_n x_n^*(x_m) = \lim_m 0 = 0.$$

Por lo tanto

$$\rho := |\lim_n \lim_m x_n^*(x_m) - \lim_m \lim_n x_n^*(x_m)| = |\lim_n x_n^*(z)|$$

de donde podemos deducir que

$$\rho \leq |\lim_n x_n^*(z - x)| + |\lim_n x_n^*(x)| = |\lim_n x_n^*(z - x)| \leq \varepsilon + \delta$$

y como esto se cumple para todo $\delta > 0$ queda demostrado el ε-intercambio de límites.

Veamos ahora (ii). Realizando una homotecia sobre H podemos suponer que $H \subset B_E$. Sea $z \in \overline{H}^{w^*} \setminus E$ y sea $0 < b < d(z,E)$. Tenemos entonces que $z \in B_{E^{**}} \setminus E$ y como $E \in J$ existe una sucesión $(x_n^*)_n \subset A := \{u \in B_{E^*} : z(u) \geq b\}$ que converge hacia 0 en la topología w^*. Sea ahora $(x_m)_m$ una sucesión en H que tal que $\lim_m x_n^*(x_m) = x_n^*(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \lim_m \lim_n x_n^*(x_m) &= 0, \\ \lim_n \lim_m x_n^*(x_m) &= \lim_n x_n^*(z) \geq b \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$b \leq |\lim_m \lim_n x_n^*(x_m) - \lim_n \lim_m x_n^*(x_m)| \leq \varepsilon$$

y esto se da para todo $0 < b < d(z,E)$ por lo que tendremos que $d(z,E) \leq \varepsilon$. $\square$

El siguiente resultado aparece en [Gra06, Theorem 3] generalizado para $H \subset E^{**}$ w^*-compacto pero con una demostración que utiliza técnicas muy diferentes a las desarrolladas aquí. La prueba que usamos aquí es una adaptación de la prueba dada en [FHMZ05, Theorem 2] donde ahora utilizamos la Proposición 3.2.4.

Teorema 3.2.5 ([Gra06]). *Sea E un espacio de Banach que tiene la propiedad J y sea $H \subset E$ un conjunto acotado. Tenemos entonces que*

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) = \hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, E).$$

Demostración. Está claro que el término de la derecha es mayor o igual al de la izquierda. Veamos la otra desigualdad. Sea $\varepsilon = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E)$. Por la Proposición 3.2.4 tenemos que H ε-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n \subset B_{E^*}$ que w^*-converja a 0. Si nos fijamos en la demostración del Teorema 2.3.1 podemos observar que si $\operatorname{conv}(H)$ no ε-intercambia límites con una sucesión $(y_n^*)_n$ del espacio dual entonces H no ε-intercambia límites con alguna subsucesión de $(y_n^*)_n$. De aquí deducimos inmediatamente que $\operatorname{conv}(H)$ ε-intercambia límites con (x_n^*) y por lo tanto, de nuevo por la Proposición 3.2.4 podremos afirmar que $\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, E) \leq \varepsilon$. $\square$

Teorema 3.2.6 ([FHMZ05]). *Sea E un espacio de Banach tal que E^* no contiene una copia de ℓ_1. Tenemos entonces que*

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) = \hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, E).$$

Demostración. Sea $\varepsilon = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E)$ y tomemos $C := \overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}$. Tenemos que probar que C está contenido en A:=$\{z \in E^{**} : d(z,E) \leq \varepsilon\}$. C es un subconjunto w^*-compacto convexo de E^{**} y por lo tanto tendremos (véase por ejemplo [Die84, p.215]) que

$$C = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext} C)}^{\|\cdot\|}.$$

Por el Teorema de Milman tendremos que $\operatorname{ext} C \subset \overline{M}^{w^*} \subset A$. Ahora bien, como A es $\|\cdot\|$-cerrado y convexo, $C = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext} C)}^{\|\cdot\|} \subset A$ con lo que termina la prueba. $\square$

3.3 Medidas de no compacidad débil

Definición 3.3.1. *Una medida de no compacidad débil es una función no negativa μ definida en la familia de los conjuntos acotados de los espacios de Banach, con la propiedad de que si E es un espacio de Banach y $\mathscr{M}_E$ la familia de los acotados de E, entonces para cada $A, B \in \mathscr{M}_E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que*

(i) $\mu(A) = 0$ *si, y sólo si, A es débilmente relativamente compacto en E,*
(ii) *si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$,*
(iii) $\mu(\lambda A) = |\lambda| \mu(A)$.

En [KP01], se puede encontrar la definición de medidas de no compacidad débil con más hipótesis, como por ejemplo $\mu(\mathrm{conv}(A)) = \mu(A)$ para todo subconjunto acotado A de un espacio de Banach. Sin embargo hemos preferido aquí limitar las hipótesis porque realmente lo que nos interesa es la condición (i) y que la función μ se comporte en cierto sentido como una medida. Las funciones γ y ω que van a aparecer en esta sección son medidas de no compacidad débil en el sentido de [KP01]. Sin embargo, las funciones k y ck van a fallar en alguna hipótesis aunque sí van a cumplir las condiciones impuestas en nuestra definición.

A partir de la noción de ε-intercambio de límites, en [AT90] se introduce la siguiente medida de no compacidad débil.

Definición 3.3.2. *Sea H un subconjunto acotado de un espacio de Banach E. Se define*

$$\gamma(H) = \sup\{\lim_n \lim_m f_n(x_m) - \lim_m \lim_n f_n(x_m)\}$$

donde el supremo de arriba se toma para todo par de sucesiones $(x_m)_m \subset H$ y $(f_n)_n \subset B_{E^*}$ tales que los límites involucrados existen.

En otras palabras, $\gamma(H)$ es el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que H ε-intercambia límites con B_{E^*}. En [KPS00] se define una medida de no compacidad débil que demuestran que coincide con $\gamma(\mathrm{conv}(H))$. Pero de hecho, por el Teorema 2.3.1 tenemos que $\gamma(\mathrm{conv} H) = \gamma(H)$. Antes de estudiar otras medidas de no compacidad débil veamos las equivalencias de γ estudiadas en [KPS00]. La medida que introducen allí es $\delta(H) = \alpha(\mathrm{conv}(H))$ donde α es la medida dada en la siguiente definición.

Definición 3.3.3. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de un espacio de Banach E. Se define la separación convexa de $(x_n)_n$ como*

$$\mathrm{csep}((x_n)_n) = \inf\{\|u_1 - u_2\| : (u_1, u_2) \in \mathrm{scc}((x_n)_n)\}$$

donde

$$\mathrm{scc}((x_n)_n) = \{(u_1, u_2) : u_1 \in \mathrm{conv}\{x_i\}_{i=1}^m, u_2 \in \mathrm{conv}\{x_i\}_{i=m+1}^\infty, m \in \mathbb{N}\}.$$

Si H un subconjunto acotado de E. Se define

$$\alpha(H) = \sup\{\mathrm{csep}((x_n)_n) : (x_n)_n \subset H\}.$$

La siguiente proposición aparece en [KPS00] cuando sustituimos H por su envoltura convexa. La misma prueba que dan allí sirve en nuestro caso.

Proposición 3.3.4 ([KPS00])**.** *Sea E un espacio de Banach y $H \subset E$ un subconjunto acotado. Entonces*

$$\alpha(H) = \sup\{d(x^{**}, \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) : (x_n)_n \subset H, x^{**} \in \operatorname{clust}_{(E^{**},w^*)}((x_n)_n)\}. \tag{3.6}$$

Demostración. Llamemos $\beta(H)$ a la parte derecha de la igualdad (3.6), es decir

$$\beta(H) = \sup\{d(x^{**}, \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) : (x_n)_n \subset H, x^{**} \in \operatorname{clust}_{(E^{**},w^*)}((x_n)_n)\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos una sucesión $(x_n)_n$ en H tal que

$$\alpha(H) - \varepsilon \leq \operatorname{csep}((x_n)_n)$$

y fijemos $x \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \operatorname{conv}\{x_i\}_{i=1}^{m}$. Entonces si $y \in \operatorname{conv}\{x_i\}_{i=m+1}^{\infty}$ tenemos que

$$\|y - x\| \geq \operatorname{csep}((x_n)_n) \geq \alpha(H) - \varepsilon.$$

Por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional $x^* \in B_{X^*}$ tal que $x^*(y-x) \geq \alpha(H) - \varepsilon$ para todo $y \in \operatorname{conv}\{x_i\}_{i=m+1}^{\infty}$. Tomemos ahora $z \in X^{**}$ un punto de w^*-aglomeración de $(x_n)_n$. Existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que

$$z(x) = \lim_{k\to\infty} x^*(x_{n_k})$$

y por lo tanto

$$\|z - x\| \geq (z-x)(x^*) = \lim_{k\to\infty} x^*(x_{n_k} - x) \geq \alpha(H) - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario obtenemos que $\beta(H) \geq \alpha(H)$.

Veamos ahora que $\beta(H) \leq \alpha(H)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(x_n)_n$ en H y un punto de w^*-aglomeración $z \in X^{**}$ de la sucesión tal que $d(z, \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \geq \beta(H) - \varepsilon$. Por el teorema de Hahn-Banach, podemos tomar $y \in B_{X^{***}}$ tal que

$$y(z - x) \geq \beta(H) - \varepsilon$$

para todo $x \in \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

AFIRMACIÓN.- Existe una sucesión $(x_k^*)_k \subset (1+\varepsilon)B_{X^*}$ y una subsucesión (x_{n_k}) de $(x_n)_n$ tal que

$$\begin{array}{rcll} x_k^*(x_{n_i}) & \geq & y(z) - \varepsilon & si \quad k \leq i \\ x_k^*(x_{n_i}) & = & y(x_{n_i}) & si \quad k > i. \end{array} \tag{3.7}$$

Construyamos dichas sucesiones por inducción. Aplicando el principio de reflexividad local (Teorema 1.4.6) tomando $G = \text{span}\{y\}$ y $F = \text{span}\{z\}$, obtenemos que existe $x_1^* \in (1+\varepsilon)B_{X^*}$ tal que $z(x_1^*) = y(x)$ (x_1^* es la imagen de y a través de la aplicación que se obtiene del Teorema 1.4.6). Al ser z un punto de aglomeración de $(x_n)_n$, podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_1^*(x_{n_1}) - z(x_1^*)| \leq \varepsilon$.

Supongamos ahora que hemos obtenido $x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*$ y $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$. Aplicando de nuevo el principio de reflexividad local tomando $G = \text{span}\{y\}$ y $F = \text{span}\{z, x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}\}$ tenemos que existe $x_k^* \in (1+\varepsilon)B_{X*}$ tal que $z(x_k^*) = y(z)$ y $x_k^*(x_{n_i}) = y(x_{n_i})$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Usando de nuevo que z es un punto de aglomeración de $(x_n)_n$, podemos encontrar un número natural $n_k > n_{k-1}$ tal que $|x_i^*(x_{n_k}) - z(x_i^*)| \leq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, k$. Claramente las sucesiones construidas cumplen (3.7) con lo que termina la prueba de la AFIRMACIÓN.

Tomemos ahora $m \in \mathbb{N}$, $u \in \text{conv}\{x_i\}_{i=1}^m$ y $v \in \text{conv}\{x_i\}_{i=m+1}^\infty$. Tenemos que $x_{m+1}^*(u) = y(u)$ y $x_{m+1}^*(v) \geq y(z) - \varepsilon$, y por lo tanto

$$(1+\varepsilon)\|u - v\| \geq x_{m+1}^*(v-u) \geq y(z-u) - \varepsilon \geq \beta(H) - 2\varepsilon$$

así que

$$\alpha(H) \geq \text{csep}((x_{n_i})_i) \geq \frac{\beta(H) - 2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Como ε es arbitrario concluimos que $\alpha(H) = \beta(H)$. $\square$

La Proposición 3.3.6 nos da otra caracterización de γ. Dicho resultado aparece en [KPS00] enunciado para $\gamma(\text{conv}(H))$ en vez de $\gamma(H)$. La demostración que incluimos aquí es la dada en [KPS00]. Necesitamos para ello el siguiente resultado.

Proposición 3.3.5 ([KPS00, Theorem 2.1])**.** *Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en un espacio de Banach E. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(m_n)_n$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión $(y_n)_n$ en E con $y_1 \in \text{conv}\{x_1, \ldots, x_{m_1}\}$ e $y_n \in \text{conv}\{x_{m_{n-1}+1}, \ldots, x_{m_n}\}$ para $n > 1$ (es decir, $(y_n)_n$ es una sucesión de sucesivas combinaciones convexas de $(x_n)_n$) tal que si $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \text{scc}((y_n)_n)$ entonces*

$$\|u_1 - u_2\| - \|v_1 - v_2\| \leq \varepsilon.$$

Proposición 3.3.6. *Sea E un espacio de Banach y $H \subset E$ un subconjunto acotado. Entonces*

$$\gamma(H) = \alpha(\text{conv}(H)).$$

Demostración. Veamos primero que $\alpha(H) \leq \gamma(H)$. Siguiendo la demostración de la desigualdad $\beta(H) \leq \alpha(H)$ en la demostración de la proposición anterior, se tiene que existe a (a sería $y(z)$ en la demostración de la proposición anterior) tal que para todo $\varepsilon > 0$, existen sucesiones $(y_k)_k$ en H (y_k sería x_{n_k}) y $(f_n)_n$ en $(1+\varepsilon)B_{X^*}$ (f_n sería x_n^*) que cumplen que $f_n(y_k) \geq a - \varepsilon$ para $n \leq k$ y $f_n(y_k) \leq a - \alpha(H) - \varepsilon$ para $n > k$. Tomemos $g_n = f_n/(1+\varepsilon) \in B_{X^*}$ para $n \in \mathbb{N}$. Tomando subsucesiones podemos suponer que los límites

$$\rho_1 = \lim_n \lim_k g_n(x_k) \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = \lim_k \lim_n g_n(x_k)$$

existen. Tenemos que

$$\frac{\alpha(H)-2\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \rho_1 - \rho_2 \leq \gamma(H)$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario deducimos que $\alpha(H) \leq \gamma(H)$.

Nos queda probar que $\gamma(H) \leq \alpha(\mathrm{conv}(H))$ ya que por lo que acabamos de demostrar, tenemos que $\alpha(\mathrm{conv}(H)) \leq \gamma(\mathrm{conv}(H)) = \gamma(H)$. Sea $(x_k)_k$ una sucesión en H y sea $(f_n)_n$ una sucesión en B_{X^*} de modo que los límites

$$\rho_1 = \lim_n \lim_k f_n(x_k) \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = \lim_k \lim_n f_n(x_k)$$

existan. Por la Proposición 3.3.5 tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de sucesivas combinaciones convexas $(z_k)_k$ de $(x_n)_n$ tales que $\|z_i - z_j\| - \mathrm{csep}((z_k)_k) \leq \varepsilon$ para $i \neq j$. Entonces

$$\rho_1 = \lim_n \lim_k f_n(z_k) \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = \lim_k \lim_n f_n(z_k).$$

Por lo tanto

$$|\rho_1 - \rho_2| \leq \liminf_j \liminf_i \|z_i - z_j\| \leq \mathrm{csep}((z_k)_k) + \varepsilon \leq \alpha(\mathrm{conv}(H)) + \varepsilon$$

y como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concluimos que $\gamma(H) \leq \alpha(\mathrm{conv}(H))$. □

En la sección anterior aparece de forma natural la siguiente medida de no compacidad débil.

Definición 3.3.7. *Sea H un subconjunto acotado de un espacio de Banach E. Se define*

$$\mathrm{k}(H) = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E).$$

Definición 3.3.8. *Sea E un espacio de Banach y μ, η dos medidas de no compacidad débil en E. Diremos que μ y η son equivalentes si existen constantes $m, M > 0$ tales que para todo subconjunto acotado H de E se tiene que*

$$m\mu(H) \leq \eta(H) \leq M\mu(H).$$

Si reescribimos el Corolario 3.1.5 en términos de γ, tenemos que γ y k son equivalentes:

Corolario 3.3.9. *Sea E un espacio de Banach y $H \subset E$ un subconjunto acotado. Entonces*

$$\frac{1}{2}\gamma(H) \leq \mathrm{k}(H) \leq \gamma(H).$$

De forma análoga a como hicimos en la Definición 2.4.5, introducimos ahora la siguiente medida de no compacidad débil.

Definición 3.3.10. *Se E un espacio de Banach y H un subconjunto acotado de E. Definimos*

$$\mathrm{ck}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\mathrm{clust}_{(E^{**},w^*)}(\varphi), E).,$$

donde $\mathrm{clust}_{(E^{**},w^*)}(\varphi)$ *denota el conjunto de w^*-puntos de aglomeración de la sucesión φ en E^{**}.*

Para ver que ck es una medida de no compacidad débil basta ver que H es relativamente compacto en E si, y sólo si, $\mathrm{ck}(H)=0$ pero esto es inmediato por el siguiente corolario ya que γ es una medida de no compacidad débil.

Corolario 3.3.11 ([ACa])**.** *Sea E un espacio de Banach y H un subconjunto acotado de E, entonces*

$$\mathrm{ck}(H)\leq\gamma(H)\leq 2\,\mathrm{ck}(H).$$

Demostración. De nuevo por la Proposición 3.1.3 podemos deducir estas desigualdades de las obtenidas previamente para espacios de funciones continuas sobre compactos. Así que para obtener la segunda desigualdad, basta con aplicar el Lema 2.4.7. La primera desigualdad se obtiene gracias a la desigualdad $\mathrm{ck}(H)\leq \mathrm{k}(H)$ que es inmediata, y al Corolario 3.3.9. $\square$

Definición 3.3.12. *Sea E un espacio de Banach y H un subconjunto acotado de E. La medida de no compacidad débil de De Blasi de H se define como*

$$\omega(H)=\operatorname{ínf}\{\varepsilon>0: H\subset K_\varepsilon+\varepsilon B_E \text{ y } K_\varepsilon\subset X \text{ es } w\text{-compacto}\}.$$

A continuación vemos que ω es efectivamente es una medida de no compacidad débil. Veamos que cumple la condición (i) de la Definición 3.3.1. Esto sale inmediatamente de la siguiente proposición.

Proposición 3.3.13 ([ACa])**.** *Sea E un espacio de Banach y sea H un subconjunto acotado de E, entonces* $\mathrm{k}(H)\leq\omega(H)$.

Demostración. Basta con demostrar que si $\omega(H)<\varepsilon$, entonces $\mathrm{k}(H)\leq\varepsilon$. Fijemos $\varepsilon>\omega(H)$, entonces existe un conjunto w-compacto K_ε tal que

$$H\subset K_\varepsilon+\varepsilon B_\varepsilon$$

y por lo tanto, tomando clausuras en la topología w^* del bidual,

$$\overline{H}^{w^*}\subset K_\varepsilon+\varepsilon B_{E^{**}}\subset X+\varepsilon B_{E^{**}},$$

así que

$$\mathrm{k}(H)=\hat{d}(\overline{H}^{w^*},E)\leq\varepsilon.$$

$\square$

Corolario 3.3.14 (Grothendieck,[Die84, Lemma 2, p. 277])**.** *Si H es un subconjunto acotado de un espacio de Banach E, entonces $\omega(H)=0$ si, y sólo si, H es relativamente compacto en E.*

Observación 3.3.15. *Las condiciones extras que cumplen una medida de no compacidad débil μ sobre un espacio de Banach E según la definición que aparece en [KP01] que no hemos exigido nosotros son las siguientes:*

(a) $\mu(\mathrm{conv}(A))=\mu(A)$ *para* $A\in\mathscr{M}_E$,

(b) $mu(A+B) \leq \mu(A)+\mu(B)$ *para* $A, B \in \mathscr{M}_E$.

Bajo estas hipótesis extras se tiene que para todo H *conjunto acotado de un espacio de Banach* E

$$\mu(H) \leq \mu(B_E)\omega(H).$$

En realidad, para que se de esta desigualdad sólo es necesario que μ cumpla (b). Para probar esto basta tener en cuenta que si $H \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_E$, entonces tenemos que

$$\mu(H) \leq \mu(K_\varepsilon + \varepsilon B_E) \leq \mu(K_\varepsilon) + \varepsilon\mu(B_E) = \varepsilon\mu(B_E)$$

y como esto se puede hacer para $\varepsilon > \omega(H)$ se obtiene la desigualdad deseada. □

Podemos resumir las relaciones obtenidas en el siguiente corolario.

Corolario 3.3.16 ([ACa])**.** *Sea* H *un subconjunto acotado de un espacio de Banach* E*. Entonces*

$$\operatorname{ck}(H) \leq \operatorname{k}(H) \leq \gamma(H) \leq 2\operatorname{ck}(H) \leq 2\operatorname{k}(H) \leq 2\omega(H),$$

$$\gamma(H) = \gamma(\operatorname{conv}(H)) \quad y \quad \omega(H) = \omega(\operatorname{conv}(H)).$$

Además, para cada $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$*, existe una sucesión* $(x_n)_n$ *en* H *tal que*

$$\|x^{**} - y^{**}\| \leq \gamma(H)$$

para cada punto de aglomeración y^{**} *de* $(x_n)_n$ *en* E^{**}*.*

Observación 3.3.17. Si volvemos al Ejemplo 2.4.10 observamos que el compacto K que se define allí es disperso y por lo tanto el bidual de $C(K)$ es $\ell_\infty(K)$ (ya que $C(K)^* = \ell_1(K)$, véase [Rud57]). Por lo tanto, si A es un subconjunto acotado de $C(K)$ se tiene que $\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{\tau_p} \subset \ell_\infty(K)$. Consecuentemente este mismo ejemplo nos sirve para ver que la constante 2 en la desigualdad

$$\operatorname{k}(H) \leq 2\operatorname{ck}(H)$$

es óptima. Así se tiene que la constante 2 en la desigualdad

$$\gamma(H) \leq 2\operatorname{ck}(H)$$

también es óptima. Tal como vimos en la Observación 3.1.9, también sabemos que no se puede mejorar el 2 en la desigualdad

$$\gamma(H) \leq 2k(H).$$

□

Observemos que después del Corolario 3.3.16 tenemos que las medidas γ, k y ck son equivalentes. Sin embargo ω no es equivalente a ninguna de las anteriores, como vemos en la siguiente sección.

Para terminar esta sección vamos a demostrar que las medidas k y ck son iguales cuando E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson. Se dice que un espacio de Banach tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson si cada vez que se tiene una colección de cerrados convexos de E con intersección vacía, entonces existe una subcolección numerable con intersección vacía. Claramente se tiene que si (E,w) es Lindelöf, como los cerrados convexos son los mismos en la topología de la norma y la débil, entonces E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson, pero sin embargo no todos los espacios con la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson cumplen que (E,w) es Lindelöf [Pol80, p.146]. En [Pol80] se demuestra que un espacio de Banach E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson si, y sólo si, para todo conjunto $A \subset E^*$ y todo $z \in \overline{A}^{w^*}$, existe un subconjunto numerable C de A tal que $z \in \overline{\operatorname{conv} A}^{w^*}$. En particular, los espacios de Banach con bola dual w^*-angélica tienen la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson.

Teorema 3.3.18 ([ACa]). *Si E es un espacio de Banach con la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson, entonces para cada conjunto acotado $H \subset E$ tenemos que* $\operatorname{ck}(H) = \operatorname{k}(H)$.

Demostración. Ya sabemos que $\operatorname{ck}(H) \leq \operatorname{k}(H)$, por lo tanto si $\operatorname{k}(H) = 0$ la igualdad es cierta. Así que nos basta con probar que si $0 < b < \operatorname{k}(H)$ entonces $b \leq \operatorname{ck}(H)$. Tomemos en tal caso $x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \setminus E$ con $d(x^{**}, E) > b$. Por el Lema 3.2.2, si denotamos

$$S(x^{**}, b) := \{x^* \in B_{E^*} : x^{**}(x^*) > b\}$$

tenemos que $0 \in \overline{S(x^{**}, b)}^{w^*}$. Como E tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson, existe un conjunto numerable C de $S(x^{**}, b)$ tal que $0 \in \overline{\operatorname{conv} C}^{w^*}$. Como $S(x^{**}, b)$ es convexo, existe un conjunto numerable D de $S(x^{**}, b)$ tal que $0 \in \overline{D}^{w^*}$. Como D es numerable, existe una sucesión $(h_n)_n$ en H que converge a x^{**} puntualmente sobre D. Por lo tanto, si h^{**} es cualquier w^*-punto de aglomeración de $(h_n)_n$ en E^{**}, tenemos que $h^{**}|_D = x^{**}|_D$. En particular,

$$h^{**}(x^*) = x^{**}(x^*) > b,$$

para cada $x^* \in D$. Por otro lado, como $0 \in \overline{D}^{w^*}$, para cada $h \in E$ y $\varepsilon > 0$ existe algún $x^* \in D$ tal que $|x^*(h)| < \varepsilon$. Por lo tanto

$$\|h^{**} - h\| \geq h^{**}(x^*) - x^*(h) > b - \varepsilon.$$

Como ε y h son arbitrarios, obtenemos que $d(h^{**}, E) \geq b$ para cada w^*-punto de aglomeración h^{**} de $\varphi = (h_n)_n$. Concluimos que

$$\operatorname{ck}(H) \geq d(\operatorname{clust}_{E^{**}}(\varphi), E) \geq b$$

y así termina la prueba. □

Obsérvese que $\operatorname{ck}(H) = \operatorname{k}(H)$ implica que $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, E) = \hat{d}(H^c, E)$ donde

$$H^c := \bigcup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} \operatorname{clust}_{E^{**}}(\varphi),$$

sin embargo, puede pasar que $H^c \subsetneq \overline{H}^{w^*}$. Efectivamente, si Γ es un conjunto no numerable, entonces $c_0(\Gamma)$ es débilmente compactamente generado, y en particular débilmente Lindelöf por lo que tiene la propiedad $\mathfrak{C}$ de Corson. Por lo tanto $\mathrm{ck} = \mathrm{k}$ en $c_0(\Gamma)$. Por otro lado, la bola unidad $H := B_{c_0(\Gamma)}$ y H^c están formados por funciones definidas en Γ con soporte numerable y por lo tanto $B_{\ell_\infty(\Gamma)} = \overline{H}^{w^*}$ contiene estrictamente a H^c.

Se puede dar una prueba distinta del Teorema 3.3.18 en el caso particular de que la bola del dual del espacio de Banach sea angélica con la topología w^*. Para ello se usan algunas ideas de [Gra06]. Incluimos también esta prueba para ilustrar como otras técnicas pueden ser utilizadas en este contexto: estas técnicas podrían ser útiles para otras cuestiones. Necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.3.19. *Sean E y F espacios de Banach y $T : E \to F$ una aplicación lineal y continua. Entonces para todo subconjunto acotado $H \subset E$ se tiene que*

$$\mathrm{ck}(T(H)) \le \|T\| \, \mathrm{ck}(H).$$

Demostración. Fijemos una sucesión $(h_n)_n$ contenida en H y denotemos $A := \mathrm{clust}_{(E^{**},w^*)}((h_n)_n)$ y $B := \mathrm{clust}_{(F^{**},w^*)}((T(h_n))_n)$. Como la aplicación adjunta $T^{**} : E^{**} \to F^{**}$ es w^*-w^*-continua con $T^{**}|_E = T$ tenemos que $T^{**}(A) \subset B$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(B,F) &\le d(T^{**}(A), T(E)) \\ &= d(T^{**}(A), T^{**}(E)) \overset{\|T^{**}\|=\|T\|}{\le} \|T\| d(A,E) \\ &\le \|T\| \, \mathrm{ck}(H), \end{aligned}$$

lo que implica que $\mathrm{ck}(T(H)) \le \|T\| \, \mathrm{ck}(H)$. □

Demostración del Teorema 3.3.18 cuando la bola dual es w^*-angélica. Probamos el resultado en dos pasos.

PRIMER PASO: el espacio dual E^* es separable para la norma. Como $\mathrm{k}(H) \ge \mathrm{ck}(H)$, sólo tenemos que ver que $\mathrm{k}(H) \le \mathrm{ck}(H)$, es decir, $d(x^{**}, E) \le \mathrm{ck}(H)$ para cada $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$. Como E^* es separable para la norma, dado $x^{**} \in \overline{H}^{w^*}$ existe una sucesión $(h_n)_n$ en H tal que $\lim_n h_n = x^{**}$ en la topología débil* w^*. Por lo tanto $\mathrm{clust}_{(E^{**},w^*)}((h_n)_n) = \{x^{**}\}$ y así $d(x^{**}, E) \le \mathrm{ck}(H)$ como queríamos probar

SEGUNDO PASO: (B_{E^*}, w^*) es angélico. Como $\mathrm{ck}(H) \le \mathrm{k}(H)$, para ver que $\mathrm{ck}(H) = \mathrm{k}(H)$ sólo tenemos que probar que es imposible que $\mathrm{ck}(H) < \mathrm{k}(H)$. Procedamos por contradicción suponiendo que $\mathrm{ck}(H) < \mathrm{k}(H)$ y entonces construiremos un conjunto acotado $A \subset c_0$ con $\mathrm{ck}(A) < \mathrm{k}(A)$ lo que es imposible tras lo que hemos probado en el primer paso. Tomemos $x^{**} \in \overline{H}^{w^*} \setminus E$ y $b \in \mathbb{R}$ con

$$d(x^{**}, E) > b > \mathrm{ck}(H). \tag{3.8}$$

El Lema 3.2.2 nos dice que

$$0 \in \overline{\{x^* \in B_{E^*} : x^{**}(x^*) \ge b\}}^{w^*}.$$

Como (B_{E^*}, w^*) es angélico, existe una sucesión $(x_n^*)_n$ en B_{E^*} con $x^{**}(x_n^*) \geq b$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y con w^*-$\lim_m x_n^* = 0$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & c_0 \\ x & \rightsquigarrow & (x_n^*(x))_n. \end{array}$$

La aplicación T es lineal y continua con $\|T\| \leq 1$. Definamos $A := T(H)$. Observemos que

$$T^{**}(x^{**}) \in T^{**}(\overline{H}^{w^*}) \subset \overline{T(H)}^{w^*} = \overline{A}^{w^*}. \tag{3.9}$$

Sea $(e_n)_n$ la base canónica en $\ell_1 = c_0^*$. Observemos que para cada $x \in E$ tenemos que

$$T^*(e_n)(x) = e_n T(x) = e_n((x_n^*(x))_n) = x_n^*(x).$$

Por lo tanto $T^*(e_n) = x_n^*$ y así

$$T^{**}(x^{**})(e_n) = x^{**}(T^*(e_n)) = x^{**}(x_n^*) \geq b \tag{3.10}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. La desigualdad (3.10) nos dice que dado $f \in (\ell_\infty)^*$ un punto de w^*-aglomeración fijo de $(e_n)_n$, se tiene que $f(x) = 0$ para cada $x \in c_0$, $\|f\| \leq 1$ y $f(T^{**}(x^{**})) \geq b$. Esto implica que

$$d(T^{**}(x^{**}), c_0) \geq b. \tag{3.11}$$

Como $\|T\| \leq 1$, usando el Lema 3.3.19 obtenemos que

$$\mathrm{k}(A) \overset{(3.9)}{\geq} d(T^{**}(x^{**}), c_0) \overset{(3.11)}{\geq} b \overset{(3.8)}{>} \mathrm{ck}(H) \geq \mathrm{ck}(T(H)) = \mathrm{ck}(A)$$

lo que nos da una contradicción. $\square$

3.4 Medidas de no compacidad débil en c_0

La sección anterior ha terminando con una prueba del Teorema 3.3.18 cuando la bola dual es w^*-angélica, donde se ha usado que en c_0, las medidas k y ck son iguales. En esta sección vemos que de hecho todas las medidas estudiadas en la sección anterior son iguales en c_0. Esto lo podemos hacer gracias a algunos resultados obtenidos en secciones previas y a un teorema de [KPS00] que vamos a desarrollar aquí también, véase Teorema 3.4.2. Empecemos con el siguiente lema.

Lema 3.4.1 ([KPS00, Theorem 2.8])**.** *Sea H un subconjunto acotado de c_0. Entonces*

$$\gamma(H) = \sup\{d(z, c_0) : z \textit{ es un punto de aglomeración de una sucesión en } \mathrm{conv}(H)\}.$$

Demostración. Denotemos

$$\beta(H) = \sup\{d(z,c_0) : z \text{ es un punto de aglomeración de una sucesión en } \operatorname{conv}(H)\}.$$

Por un lado, a partir de las Proposiciones 3.3.4 y 3.3.6 se deduce que $\beta(H) \leq \gamma(H)$. Veamos ahora que $\gamma(H) \leq \beta(H)$. Fijemos una sucesión $(x_n)_n$ en H. Para cada punto de w^*-aglomeración $z = (z(k))_k$ de la sucesión $(x_n)_n$, existirá una subsucesión $(x_{n_i})_i$ tal que $z = w^*\text{-lím}_i x_{n_i}$. Pongamos $d = d(z,c_0) = \operatorname{lím\,sup}_k |x^{**}(k)|$ y denotemos $y_i = x_{n_i}$ para $i \in \mathbb{N}$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathbb{N}$. Tomemos $y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots y_{n_p}$ elementos de la sucesión y números naturales $k_1 \leq k_2 \leq \ldots k_{p+1}$ de modo que

$$\begin{array}{lll} |z(k)| < d + \varepsilon & \text{para} & k > k_1 \\ |y_{n_i}(k) - z(k)| < \varepsilon & \text{para} & k \leq k_i, i = 1, \ldots, p, \\ |y_{n_i}(k)| < \varepsilon & \text{para} & k > k_{i+1}, i = 1, \ldots, p. \end{array}$$

Definamos ahora

$$x = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{n_i} \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $H \subset M \cdot B_{c_0}$ y $k_j < k \leq k_{j+1}$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |x(k) - z(k)| & \leq & \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} |y_{n_i}(k) - z(k)| \\ & \leq & \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(|y_{n_i}(k)| + |z(k)|) + (|z(k)| + |y_{n_j}|) + \sum_{i=j+1}^{p} |y_{n_i}(k) - z(k)|\right) \\ & \leq & \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(\varepsilon + d + \varepsilon) + (d + \varepsilon + M) + \sum_{i=j+1}^{p} \varepsilon\right) \\ & \leq & 2\varepsilon + d + \frac{M}{p}, \end{array}$$

y para $k \leq k_1$ tenemos

$$|x(k) - z(k)| < \varepsilon.$$

Teniendo en cuenta que tanto p como ε eran arbitrarios se deduce que $d(z, \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \leq d$ y esto junto a las Proposiciones 3.3.4 y 3.3.6 nos permite concluir que $\gamma(H) \leq \beta(H)$. □

Teorema 3.4.2 ([KPS00, Theorem 2.9])**.** *Las medidas γ y ω son iguales en c_0.*

Demostración. Dado $d \geq 0$, consideremos la función $r_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$r_d(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\alpha| \leq d \\ \alpha - d\frac{\alpha}{|\alpha|} & \text{si} \quad |\alpha| > d. \end{cases}$$

Consideremos ahora

$$\begin{array}{rccc} R_d : & c_0 & \to & c_0 \\ & \big(x(k)\big)_k & \rightsquigarrow & \big(r_d(x(k))\big)_k. \end{array}$$

Sea H un subconjunto acotado no vacío de c_0 y tomemos $d = \gamma(H)$. Vamos a ver ahora que $\gamma(R_d(H)) = 0$. Tomemos una sucesión $(x_n)_n$ en H. Sea $z \in c_0^{**}$ un punto de w^*-aglomeración de la sucesión. Tomando una subsucesión podemos suponer que $w^*\text{-lím}_n x_n = z$. Por el Lema 3.4.1 tenemos que $\text{lím sup}_k |z(k)| \leq d$. Por lo tanto

$$\text{lím sup}_k \left| \left(w^* - \text{lím}_n R_d(x_n) \right)(k) \right| = \text{lím sup}_k |r_d(z(k))| = r_d \left(\text{lím}_k |z(k)| \right) = 0.$$

Aplicando de nuevo el Lema 3.4.1 obtenemos que $\gamma(R_d(H)) = 0$. Por lo tanto, $R_d(H)$ es un conjunto w-relativamente compacto en c_0. Así que, como $H \subset R_d(H) + d \cdot B_{c_0}$, tenemos que $\omega(H) \leq d = \gamma(H)$.

Por otro lado, $\gamma(B_{c_0}) = 1$. Es inmediato que dados dos conjuntos acotados A y B de c_0 (o de un espacio de Banach cualquiera), se cumple que $\gamma(A+B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$, así que por la Observación 3.3.15 tendremos que

$$\gamma(H) \leq \gamma(B_{c_0})\omega(H) = \omega(H)$$

lo que concluye la prueba. □

Poniendo todos los resultados previos juntos concluimos:

Corolario 3.4.3. *Las medidas* ck, k, γ *y* ω *son iguales en* c_0.

Demostración. Sabemos que en c_0, γ y ω son iguales por el teorema anterior. Por otro lado, del Lema 3.4.1 se tiene que si H es un subconjunto acotado de c_0, entonces $\gamma(H) \leq \mathrm{k}(\mathrm{conv}(H))$. Pero por el Corolario 3.3.9 y el Teorema 2.3.1 tenemos que $\mathrm{k}(\mathrm{conv}(H)) \leq \gamma(\mathrm{conv}(H)) = \gamma(H)$ así que $\gamma(H) = \mathrm{k}(\mathrm{conv}(H))$. Ahora bien, en c_0 podemos aplicar el Teorema 3.3.18 y el Teorema 3.2.5 por lo que obtendremos que $\mathrm{k}(\mathrm{conv}(H)) = \mathrm{k}(H) = \mathrm{ck}(H)$ con lo que terminamos la prueba. □

3.5 Medidas de no compacidad débil en $L_1(\mu)$

Consideremos ahora (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito. En esta sección vamos a estudiar la relación entre las distintas medidas de no compacidad débil estudiadas en la Sección 3.3 en el espacio $L_1(\mu)$. De hecho obtenemos que ck, k y ω son iguales y γ sólo se diferencia de las anteriores en una constante, Teorema 3.5.4. Para ello utilizamos el concepto de integrabilidad uniforme ya que en este espacio está directamente relacionado con la medida ω, Teorema 3.5.2.

Se dice que un subconjunto H de $L_1(\mu)$ es uniformemente integrable si

$$\inf_{\delta>0} \sup\{\int_E |h| d\mu : h \in H, E \in \Sigma \text{ y } \mu(E) \leq \delta\} = 0. \tag{3.12}$$

El siguiente teorema se puede encontrar en [DJ77, Theorem 15, p. 76].

Teorema 3.5.1 (Dunford)**.** *Sea H un subconjunto de $L_1(\mu)$. Entonces H es w-relativamente compacto si, y sólo si, es uniformemente integrable.*

La formula (3.12) con la que más arriba se define la integrabilidad uniforme sirve para calcular la medida ω en $L_1(\mu)$.

Teorema 3.5.2 ([AP84]). *Sea H un subconjunto acotado de $L_1(\mu)$. Entonces*

$$\omega(H) = \inf_{\delta>0} \sup\{\int_E |h| d\mu : h \in H, E \in \Sigma \text{ y } \mu(E) \leq \delta\}.$$

Demostración. Denotemos

$$\eta(H,\delta) = \sup\{\int_E |h| d\mu : h \in H, E \in \Sigma \text{ y } \mu(E) \leq \delta\}$$

y

$$\eta(H) = \inf_{\delta>0} \eta(H,\delta).$$

Tenemos que ver que $\omega(H) = \eta(H)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ y $K \subset L_1(\mu)$ un conjunto relativamente compacto tal que $H \subset K + \varepsilon B_{L_1(\mu)}$. Entonces para cada $\delta > 0$ tenemos que $\eta(H,\delta) \leq \eta(K,\delta) + \varepsilon$, así que por el teorema de Dunford

$$\eta(H) \leq \inf_{\delta>0} \eta(K,\delta) + \varepsilon = \varepsilon$$

y por lo tanto $\eta(H) \leq \omega(H)$.

Veamos ahora la desigualdad opuesta. Supongamos que $H \subset M \cdot B_{L_1(\mu)}$. Fijemos $\delta > 0$ y $a > \delta^{-1} M$. Dado $h \in H$, definamos

$$A_h = \{\omega \in \Omega : |h(\omega)| \geq a\}$$

y observemos que por la desigualdad de Tchebychev se tiene que

$$\mu(A_h) = \mu(\omega \in \Omega : |h(\omega)| \geq a) \leq \frac{\int_\Omega |h| d\mu}{a} \leq \delta.$$

Por lo tanto

$$\int_{A_h} |h| d\mu \leq \eta(H,\delta). \tag{3.13}$$

Definamos $K := \{h\chi_{\Omega \setminus A_h} : h \in H\}$. Observemos que dado $E \in \Sigma$

$$\int_E |h\chi_{\Omega \setminus A_h}| d\mu \leq a\mu(E),$$

y así de nuevo por el teorema de Dunford tenemos que K es w-relativamente compacto en $L_1(\mu)$. Finalmente, la desigualdad (3.13) se puede escribir como

$$\|h - h\chi_{\Omega \setminus A_h}\| = \int_{A_h} |h| d\mu \leq \eta(H,\delta)$$

y por lo tanto

$$H \subset \overline{K}^w + \eta(H,\delta) B_{L_1(\mu)}.$$

de donde deducimos que $\omega(H) \leq \eta(H,\delta)$. Como $\delta > 0$ era arbitrario, podemos concluir que $\omega(H) \leq \eta(H)$.

□

Usando esta caracterización de ω en $L_1(\mu)$, en [KP01, Theorem 2.5] se prueba que en dicho espacio
$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\overline{\gamma}(H),$$
donde
$$\overline{\gamma}(H) = \sup\{d(z, L_1(\mu)) : z \text{ es un punto de aglomeración de una sucesión en } \operatorname{conv}(H)\}.$$
Para ello demuestran por separado que $\gamma(H) = 2\omega(H)$ y que $\omega(H) = \overline{\gamma}(H)$. Recogemos este resultado en el Teorema 3.5.4, donde vemos que de hecho la segunda igualdad sale directamente debido a las relaciones conocidas entre las distintas medidas de no compacidad débil con lo que se simplifica la prueba. De hecho, lo que podemos deducir directamente de la primera igualdad es que
$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\,\mathrm{ck}(H) = 2\,\mathrm{k}(H) = 2\overline{\gamma}(H).$$
Enunciemos primero el siguiente lema de Rosenthal ya que nos hará falta en dicha prueba.

Lema 3.5.3 (Rosenthal, véase [Die84], Chapter VII, o [DJ77], Chapter I)**.** *Sea $(\mu_n)_n$ una sucesión de medidas numerablemente aditivas definidas en Σ con $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n|(\Omega) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ y una sucesión disjunta $(E_n)_n$ en Σ, existe un conjunto infinito $P \subset \mathbb{N}$ tal que*
$$|\mu_n|\Big(\bigcup_{\substack{m\neq n\\ m\in P}} E_m\Big) \leq \varepsilon \quad \textit{para todo } n \in P.$$

Teorema 3.5.4. *Sea H un subconjunto acotado de $L_1(\mu)$, entonces*
$$\gamma(H) = 2\omega(H) = 2\,\mathrm{ck}(H) = 2\,\mathrm{k}(H).$$

Demostración. Por el Corolario 3.3.16 tenemos que $\gamma(H) \leq 2\,\mathrm{ck}(H) \leq 2\,\mathrm{k}(H) \leq 2\omega(H)$. Por lo tanto, es suficiente probar que $2\omega(H) \leq \gamma(H)$. Tomemos $H \subset L_1(\mu)$ un conjunto acotado con $\omega(H) > 0$ y tomemos δ tal que $0 < 2\delta < \omega(H)$. Vamos a construir primero una sucesión de conjuntos medibles $(D_n)_n$ y una sucesión $(x_n)_n$ en H tales que

(i) $\displaystyle\int_{D_n} |x_n(t)|d\mu(t) > \omega(H) - \delta$ para $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\displaystyle\int_{D_n} |x_m(t)|d\mu(t) \leq \frac{\delta}{2^{n-1}}$ para $1 \leq m < n$.

Por el Teorema 3.5.2 tenemos que existe un conjunto medible D_1 y $x_1 \in H$ tales que
$$\int_{D_1} |x_1(t)|d\mu(t) > \omega(H) - \delta.$$
Supongamos que hemos obtenido $x_1, \ldots, x_n$ y $D_1, \ldots, D_n$. Fijemos $\varepsilon > 0$ tal que
$$\sup_{1\leq m<n+1} \int_E |h_m|d\mu \leq \frac{\delta}{2^n} \text{ cuando } \mu(E) \leq \varepsilon.$$

De nuevo por el Teorema 3.5.2, existe D_{n+1} con $\mu(D_{n+1}) \leq \varepsilon$ y $x_{n+1} \in H$ tales que

$$\int_{D_{n+1}} |x_{n+1}(t)| d\mu(t) > \omega(H) - \delta.$$

Las sucesiones construidas cumplen los requisitos pedidos. Tomemos ahora $B_n = \cup_{m \geq n} D_n$ y sea $E_n = B_n \backslash B_{n+1}$. La sucesión $(E_n)_n$ es una familia disjunta de conjuntos medibles y para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos por (ii) que

$$\int_{B_{n+1}} |x_n(t)| d\mu(t) \leq \sum_{m>n} \int_{D_m} |x_n(t)| d\mu(t) \leq \sum_{m>n} \frac{\delta}{2^{m-1}} \leq \delta.$$

Aplicando ahora (i) tenemos para $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |x_n(t)| d\mu(t) &= \int_{B_n} |x_n(t)| d\mu(t) - \int_{B_{n+1}} |x_n(t)| d\mu(t) \\ &\geq \int_{D_n} |x_n(t)| d\mu(t) - \delta \geq \omega(H) - 2\delta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sea ahora $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Por el lema de Rosenthal (Lema 3.5.3) tomando una subsucesión podemos suponer que

$$\int_{E \backslash E_k} |x_k(t)| d\mu(t) < \delta. \tag{3.15}$$

Dados escalares $a_1, \ldots, a_n$ tenemos

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \Big\|_1 &\geq \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \Big| \sum_{k=1}^n a_k x_k(t) \Big| d\mu(t) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \Big(|a_j| \int_{E_j} |x_j(t)| d\mu(t) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_k| \int_{E_j} |x_k(t)| \, d\mu(t) \Big) \\ &\stackrel{(3.14)}{\geq} (\omega(H) - 2\delta) \cdot \sum_{j=1}^n |a_j| - \sum_{k=1}^n \Big(|a_k| \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \int_{E_j} |x_k(t)| d\mu(t) \Big) \\ &\stackrel{(3.15)}{\geq} (\omega(H) - 3\delta) \cdot \sum_{k=1}^n |a_k|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\mathrm{csep}((x_n)_n) > 2(\omega(H) - 3\delta)$ así que por la Proposición 3.3.6, tenemos que $\gamma(H) > 2(\omega(H) - 3\delta)$ y como $\delta > 0$ era arbitrario, concluye la prueba. $\square$

3.6 Versión cuantitativa del teorema de Gantmacher

La medida de no compacidad de Hausdorff de un subconjunto acotado H de un espacio de Banach E viene definida por

$$\mathrm{h}(H) = \mathrm{ínf}\{\varepsilon > 0 : H \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_E \text{ y } K_\varepsilon \subset X \text{ es finito}\}.$$

Un teorema de Schauder dice que un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach $T : E \to F$ es compacto (es decir, $T(B_E)$ es un conjunto relativamente compacto en F) si, y sólo si, su operador adjunto $T^* : F^* \to E^*$ es compacto. Usando la medida de no compacidad de Hausdorff, Goldenstein y Marcus probaron un resultado más fuerte (véase cita en [AT90, p. 367]) estableciendo las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{h}(T(B_E)) \leq \mathrm{h}(T^*(B_{F^*})) \leq 2\,\mathrm{h}(T(B_E)). \tag{3.16}$$

Por otro lado, Gantmacher probó que un operador T es relativamente débilmente compacto si, y sólo si, su adjunto T^* lo es. Una cuestión natural es plantearse si se puede obtener una versión cuantitativa de este teorema en unos términos similares a la desigualdad (3.16). La medida de no compacidad débil que parece ser la primera candidata por su analogía con h es la medida de no compacidad débil de De Blasi. Sin embargo en [AT90, Theorem 4] se da un ejemplo viendo que esto no es posible. En esta sección vemos que si en vez de considerar ω, usamos la medida γ (u otra equivalente), es posible obtener una versión cuantitativa del resultado de Gantmacher, Teorema 3.6.6, y como corolario obtenemos que γ y ω no son equivalentes, Corolario 3.6.8. Empecemos viendo el ejemplo introducido en [AT90] en el Teorema 3.6.5. Para ello enunciemos primero unos resultados que nos hacen falta en dicho teorema.

Definición 3.6.1. *Se dice que un espacio de Banach E tiene la propiedad de la aproximación débil compacta (W.A.P.) si existe un $\lambda \geq 1$ tal que para cualquier conjunto w-compacto $K \subset E$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un operador w-compacto $T : E \to E$ tal que*

$$\sup_{x\in K} \|x - Tx\| \leq \varepsilon \quad y \quad \|I_E - T\| \leq \lambda$$

donde $I_E : E \to E$ es el operador identidad.

Proposición 3.6.2 ([AT90])**.** *c_0 no tiene la W.A.P.*

El siguiente resultado es consecuencia fácil del Lema de Riesz.

Lema 3.6.3. *Si E es un espacio de Banach no reflexivo, entonces $\omega(B_E) = 1$.*

Demostración. Está claro que $\omega(B_E) \leq 1$. Supongamos que no es igual a 1. Entonces existirá $0 < \varepsilon < 1$ y un conjunto $K \subset E$ w-compacto tal que $B_E \subset K + B_E$. Tomando clausura w^* en el bidual tenemos que

$$B_{E^{**}} \subset K + \varepsilon B_{E^{**}} \subset E + \varepsilon B_{E^{**}}. \tag{3.17}$$

Por otro lado, por hipótesis E es un subespacio propio de E^{**} así que por el lema de Riesz tenemos que existe $z \in B_{E^{**}}$ tal que $d(z,E) > \varepsilon$ por lo que se llega a una contradicción con (3.17) □

Si E y F son dos espacios de Banach, denotemos

$$W(E,F) = \{T : E \to F : T \text{ es un operador } w\text{-compacto}\}.$$

Si tenemos un operador $T : E \to F$, denotemos $\|T\|_w$ la norma cociente

$$\|T\|_w = d(T, W(E,F)).$$

Proposición 3.6.4 ([Ast80, Theorem 5.2]). *Sea E un espacio de Banach, sea $T: E \to \ell_\infty$ un operador lineal y continuo y sea T^* su operador adjunto. Entonces*

$$\omega(T^*(B_{\ell_1})) = \|T\|_w.$$

Teorema 3.6.5 ([AT90, Theorem 4]). *Existe un espacio de Banach separable E y una sucesión $(T_n : E \to c_0)_n$ de operadores lineales continuos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\omega(T_n^*(B_{\ell_1})) \geq \frac{1}{2} \quad y \quad \omega(T_n(B_E)) \leq \frac{1}{n}.$$

Demostración. Por la Proposición 3.6.2, c_0 no tiene la W.A.P., así que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto w-compacto $K_n \subset c_0$ y $\varepsilon_n > 0$ tal que para todo operador $R : c_0 \to c_0$ tal que

$$\sup_{x \in K_n} \|x - Rx\| \leq \varepsilon_n \quad \text{y} \quad \|I_{c_0} - R\| \leq n$$

se tiene que R no es w-compacto. Por el teorema de Krein-Smulyan podemos suponer que los conjuntos K_n son absolutamente convexos y cerrados. Por lo tanto, el funcional de Minkowski del conjunto A_n

$$|x|_n = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA_n\}$$

donde $A_n = (\varepsilon_n/n)B_{c_0} + K_n$, define una norma equivalente en c_0. Se tiene que

$$\frac{\varepsilon_n}{n}|x|_n \leq \|x_n\| \leq r_n|x|_n$$

para algún $r_n > 0$. Sea ahora $E_n = (c_0, |\cdot|_n)$ y sea $S_n : E_n \to c_0$ la identidad. Veamos ahora que $\|S_n\|_w \geq \varepsilon_n$. Si $R : E_n \to c_0$ es tal que $\|S_n - R\| \leq \varepsilon_n$, entonces

$$\sup_{x \in K_n} \|x - Rx\| \leq \sup_{x \in A_n} \|S_n x - Rx\| \leq \varepsilon_n.$$

Si seguimos denotando por R el operador inducido $R : c_0 \to c_0$ tenemos que

$$\|I_{c_0} - R\| = \sup_{x \in B_{c_0}} \|x - Rx\| \leq \sup_{x \in A_n} \frac{n}{\varepsilon_n} \|S_n x - Rx\| \leq n$$

donde en la primera desigualdad hemos usado que $B_{c_0} \subset \frac{n}{\varepsilon_n} A_n$. Por construcción de K_n tenemos que R no puede ser un operador w-compacto. Por lo tanto

$$\|S_n\|_w \geq \varepsilon_n. \tag{3.18}$$

Por el Lema 3.6.3 tenemos que $\omega(B_{c_0}) = 1$ así que

$$\omega(S_n(B_{E_n})) = \omega(\frac{1}{n}\varepsilon_n B_{c_0} + K_n) \leq \frac{1}{n}\varepsilon_n \omega(B_{c_0}) + \omega(K_n) = \frac{1}{n}\varepsilon_n \tag{3.19}$$

donde hemos usado que $\omega(K_n) = 0$ por ser K w-compacto.

Para terminar la construcción consideremos ahora la c_0-suma

$$E = (\bigoplus_{\mathbb{N}} E_n)_{c_0}$$

con las proyecciones naturales $P_n : E \to E_n$ y las inclusiones $I_n : E_n \to E$. Definamos ahora

$$T_n = \|S_n\|_w^{-1} S_n P_n : E \to c_0.$$

Veamos ahora que $(T_n)_n$ es la sucesión de operadores buscada. Observemos primero que como $\|S_n\|_w^{-1} S_n = T_n I_n$ tenemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n\|_w = 1$$

y por (3.18) y (3.19),

$$\omega(T_n(B_E)) = \|S_n\|_w^{-1}\omega(S_n(B_{E_n}) \leq \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{n}\varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

Consideremos ahora $J_{c_0} : c_0 \to \ell_\infty$ la inclusión canónica. Vamos ahora a comparar $\|T_n\|_w$ con $\|J_{c_0} T_n\|_w$. Por definición de $\|\cdot\|_w$, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar un operador w-compacto W tal que $\|J_{c_0} T_n - W\| \leq \|J_{c_0} T_n\|_w + \varepsilon$. Los conjuntos w-compactos de ℓ_∞ son separables en norma y por lo tanto, el espacio $F = \overline{\operatorname{span}}\{J_{c_0}, WE\}$ es separable. Por el teorema de Sobczyk (véase [LT96, 2.f.5]) existe una proyección $P : F \to c_0$ con $\|P\| \leq 2$ y por lo tanto

$$\|T_n\|_w \leq \|T_n - PW\| = \|P(J_{c_0} T_n - W)\| \leq 2\|J_{c_0} T_n\|_w + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces $\|T_n\|_w \leq 2\|J_{c_0} T_n\|_w$. Ahora por el Teorema 3.6.4 tenemos que

$$\|T_n\|_w \leq 2\|J_{c_0} T_n\|_w = 2\omega((J_{c_0} T_n)^*(B_{\ell_1})) = 2\omega(T_n^*(B_{\ell_1}))$$

y por lo tanto

$$\omega(T_n^*(B_{\ell_1})) \geq \frac{1}{2}\|T_n\|_w = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Si sustituimos ω por la medida de no compacidad débil γ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.6.6. *Sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach. Entonces*

$$\gamma(T(B_E)) \leq \gamma(T^*(B_{F^*})) \leq 2\gamma(T(B_E)).$$

Demostración. Tomemos una sucesión $(x_n)_n$ en B_E y una sucesión $(y_m^*)_m$ en B_{F^*}. Por la definición de T^* tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_n \lim_m y_m^*(T(x_n)) &= \lim_n \lim_m T^*(y_m^*)(x_n), \\ \lim_m \lim_n y_m^*(T(x_n)) &= \lim_m \lim_n T^*(y_m^*)(x_n) \end{aligned} \tag{3.20}$$

cuando los límites del lado derecho (o del lado izquierdo) existan. Por lo tanto, si $(x_n)_n$ e $(y_m^*)_m$ son como antes y tales que los límites del lado izquierdo de (3.20) existan, entonces

$$|\lim_n \lim_m y_m^*(T(x_n)) - \lim_m \lim_n y_m^*(T(x_n))| \leq \gamma(T^*(B_{F^*})).$$

De aquí se obtiene que $\gamma(T(B_E)) \leq \gamma(T^*(B_{F^*}))$.

Por otro lado, si $(x_n)_n$ e $(y_m^*)_m$ son como antes pero suponiendo que los límites del lado derecho de (3.20) existen entonces

$$|\lim_n \lim_m T^*(y_m^*)(x_n) - \lim_m \lim_n T^*(y_m^*)(x_n)| \leq \gamma(T(B_E)).$$

Es decir, tenemos que $T^*(B_{F^*}) \subset C(B_{E^{**}}, w^*)$ $\gamma(T(B_E))$-intercambia límites con $B_E \subset B_{E^{**}}$. Como B_E es w^*-denso en $B_{E^{**}}$ podemos aplicar el Corolario 2.1.7 con lo que finalmente obtenemos que $\gamma(T^*(B_{F^*})) \leq 2\gamma(T(B_E))$. □

Usando el Corolario 3.3.9 concluimos

Corolario 3.6.7. *Sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach. Entonces*

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{k}(T(B_E)) \leq \mathrm{k}(T^*(B_{F^*})) \leq 4\,\mathrm{k}(T(B_E)).$$

Por otro lado, los Teoremas 3.6.5 y 3.6.6 conducen a:

Corolario 3.6.8. *Las medidas de no compacidad débil ω y γ no son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que γ y ω son equivalentes. En tal caso, para cada espacio de Banach E, existen constantes $m, M > 0$ tales que para todo subconjunto acotado H de E tiene que

$$m\omega(H) \leq \gamma(H) \leq M\omega(H).$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.6.6 tenemos que para todo operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach $T : E \to F$ se cumple que

$$m\omega(T^*(B_{F^*})) \leq \gamma(T^*(B_{F^*})) \leq 2\gamma(T(B_E)) \leq 2M\omega(T(B_E))$$

lo que es imposible por el Teorema 3.6.5. □

El hecho de que γ y ω no son equivalentes fue probado previamente en [AT90, p. 372] por Astala y Tylli. Ellos demostraron que existe un espacio de Banach separable E, una isometría lineal $J : E \to \ell_\infty$ y una sucesión $(B_n)_n$ de conjuntos acotados de E con $\omega(B_n) = 1$ y $\omega(JB_n) \leq \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo $\gamma(IB) = \gamma(B)$ para toda isometría lineal I así se obtiene que γ y ω no son equivalentes.

3.7 Versión cuantitativa del teorema de Grothendieck

Para terminar esta sección, vamos a probar una versión cuantitativa más fuerte del Teorema de Grothendieck que caracteriza los subconjuntos débil compactos de $C(K)$ (con K compacto) como aquellos que son uniformemente acotados y τ_p-compactos. Nuestro resultado claramente implica el Teorema de Grothendieck, sin embargo, nuestra prueba no usa el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tal como se hace en la prueba clásica: es puramente topológica. Denotemos

$$\gamma_K(H) := \sup\{|\lim_n \lim_m f_m(x_n) - \lim_m \lim_n f_m(x_n)| : (f_m)_m \subset H, (x_n)_n \subset K\}.$$

Obsérvese que $\gamma_K(H) = 0$ si, y sólo si, H intercambia límites dobles con K y esto pasa si, y sólo si, H es relativamente compacto en $(C(K), \tau_p)$. Consideremos la aplicación

$$\delta : K \to B_{C(K)^*}$$

definida como $\delta(k)(f) = f(k)$. Obsérvese que se tiene que $H \subset C(K)$ ε-intercambia límites con K para algún $\varepsilon > 0$ si, y sólo si, H ε-intercambia límites con $\delta(K) \subset B_{C(K)^*}$.

Teorema 3.7.1. *Sea K un espacio compacto y sea H un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Entones*

$$\gamma_K(H) \leq \gamma(H) \leq 2\gamma_K(H).$$

Demostración. Si H ε-intercambia límites con $B_{C(K)^*}$ para $\varepsilon > 0$, como

$$\delta(K) \subset B_{C(K)^*},$$

tenemos que H ε-intercambia límites con $\delta(K)$, y por lo tanto $H \subset C(K)$ ε-intercambia límites con K y de aquí sale la primera desigualdad.

Supongamos ahora que H ε-intercambia límites con K. En tal caso tenemos que el conjunto $\delta(K)$ ε-intercambia límites con H, y por lo tanto, de forma inmediata tenemos que $-\delta(K)$ también ε-intercambia límites con H. Por otro lado, es obvio que si dos conjuntos ε-intercambian límites con un tercer conjunto, también lo hace la unión de los dos primeros y por lo tanto $Y = \{\pm\delta_x : x \in K\}$ ε-intercambia límites con H. Como Y es uniformemente acotado en H (por ser H uniformemente acotado en K) podemos aplicar el Teorema 2.3.1, de donde obtenemos que $\operatorname{conv}(Y)$ ε-intercambia límites con H. Si consideramos $H \subset \mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}$, tenemos que H ε-intercambia límites con $\operatorname{conv}(Y)$. Por otro lado, $\operatorname{conv}(Y)$ es un conjunto denso de $B_{C(K)^*}$, por lo tanto, si aplicamos la Proposición 2.1.6 tenemos que H 2ε-intercambia límites con $B_{C(K)^*}$ y por lo tanto $\gamma(H) \leq 2\gamma_K(H)$. $\square$

Corolario 3.7.2. *Sea K un espacio compacto y sea H un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Entones*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq \mathrm{k}(H) \leq 4\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

Demostración. Si consideramos la aplicación restricción $p : \mathbb{R}^{B_{C(K)^*}} \to \mathbb{R}^K$ tenemos que

$$p(\overline{H}^{B_{C(K)^*}}) = \overline{H}^{\mathbb{R}^K}$$

ya que p es continua y las clausuras tomadas dan conjuntos compactos. De aquí sale inmediatamente la primera desigualdad. La segunda desigualdad sale como corolario del Teorema 3.7.1 si usamos el Corolario 3.3.9 y el Corolario 2.2.1. □

Corolario 3.7.3 (Grothendieck)**.** *Sea K un espacio compacto, un subconjunto $H \subset C(K)$ es débilmente compacto si, y sólo si, H es uniformemente acotado y τ_p-relativamente compacto.*

Capítulo 4

Distancia a espacios de funciones de la primera clase de Baire

En este capítulo estudiamos distancias a espacios de funciones de la primera clase de Baire. Recordemos que una función $f : X \to Z$ es de la primera clase de Baire si f es el límite de una sucesión de funciones continuas $(f_n)_n \in C(X,Z)$. Si $Z = E$ es un espacio de Banach se tiene que $f \in B_1(X,E)$ si, y sólo si, $d(f, B_1(X,E)) = 0$ ya que los límites uniformes de funciones de funciones de la primera clase de Baire son de la primera clase de Baire:

Proposición 4.0.1 *Sea X un espacio topológico y E un espacio de Banach. Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $B_1(X,E)$ que converge uniformemente a una función $f \in E^X$. Entonces $f \in B_1(X,E)$.*

Demostración. Tomando una subsucesión podemos suponer que para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\| f_n(x) - f(x)\| \leq 1/2^{n+2}$. Sea $g_1 = f_1$ y para $n \geq 2$ sea $g_n = f_n - f_{n-1}$. Tendremos entonces que $\|g_n(t)\| < 1/2^n$ y

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión g_{nj} en $C(X,E)$ tal que el $\lim_j g_{nj}(x) = g_n(x)$ para todo $x \in X$. Consideremos la función $h_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_n(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2^n, \quad h_n(t) = 1/(2^n t) \text{ si } t \geq 1/2^n.$$

Claramente se tiene que las funciones $k_{nj}(x) = h_n(\|g_{nj}(x)\|)g_{nj}(x)$ son continuas. Además, para todo $x \in X$ se tiene que $\|k_{nj}(x)\| \leq 1/2^n$ y por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_{nj}(x) \tag{4.1}$$

converge uniformemente respecto del par $(x, j) \in X \times \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\lim_j k_{nj}(x) = \lim_j h_n(\|g_{nj}(x)\|)g_{nj}(x) = \lim_j g_{nj}(x) = g_n(x).$$

Por la convergencia uniforme de (4.1) tenemos que la suma

$$\varphi_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_{nj}(x)$$

es continua para todo $j \in \mathbb{N}$. Además se cumple que

$$\lim_j \varphi_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_j k_{nj}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = f(x)$$

con lo que finaliza la prueba. $\square$

En la Sección 4.1 estudiamos para que espacios se puede calcular la distancia $d(f, B_1(X,Z))$. Para ello vamos a usar los conceptos de ε-fragmentabilidad y ε-σ-fragmentabilidad, véase Definición 4.1.1 y Definición 4.1.2.

Como ocurre en el caso de espacios de funciones continuas, un conjunto puntualmente acotado $H \subset B_1(X)$ es τ_p-relativamente compacto en $B_1(X)$ si, y sólo si, $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)) = 0$. Así que de nuevo, procediendo de forma similar a como hicimos en espacios de funciones continuas, estudiamos la diferencia cuantitativa entre compacidad y compacidad numerable en espacios $B_1(X,E)$ con E un espacio de Banach.

Estudiamos también una mejora un teorema de Srivatsa [Sri93] que dice que si K es un conjunto compacto y $F : X \to C(K)$ es una función continua para la topología τ_p en $C(K)$, entonces f es una función de la primera clase de Baire para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(K)$: si la aplicación F no es continua pero tiene *oscilación puntual acotada* obtenemos una cota para la distancia $d(F, B_1(X, C(X)))$. Para terminar este capítulo estudiamos mejoras cuantitativas del teorema clásico de Namioka sobre continuidad separada y continuidad global, y del teorema de Rudin sobre funciones separadamente continuas.

4.1 Fragmentabilidad, σ-fragmentabilidad y distancia a espacios de la primera clase de Baire

Definición 4.1.1. *Dado $\varepsilon > 0$, y $f : X \to (Z,d)$ una función de un espacio topológico a un espacio métrico, decimos que f está ε-fragmentada si para cada subconjunto no vacío $F \subset X$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $U \cap F \neq \emptyset$ y* $\operatorname{diam}(f(U \cap F)) \leq \varepsilon$. *Decimos que f está ε-σ-fragmentada por* conjuntos cerrados *si existe un cubrimiento cerrado numerable $(X_n)_n$ de X tal que $f|_{X_n}$ está ε-fragmentada para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Obsérvese que si U es un abierto de X y $A \subset X$, entonces $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$ si, y sólo si, $U \cap A \neq \emptyset$. De aquí se deduce que f está ε-fragmentada si para cada conjunto cerrado $F \subset X$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $U \cap F \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam} f(U \cap F) \leq \varepsilon$.

Definición 4.1.2. *Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y $f \in Z^X$ una función. Definimos:*

$$\operatorname{frag}(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : f \text{ está } \varepsilon\text{-fragmentada}\},$$
$$\sigma\text{-}\operatorname{frag}_c(f) := \inf\{\varepsilon > 0 : f \text{ está } \varepsilon\text{-}\sigma\text{-fragmentada por conjuntos cerrados}\},$$

donde por definición, $\inf \emptyset = +\infty$.

Usando lo anterior, la noción usual de (σ-)fragmentabilidad [JOPV93, p. 248] puede ser definida como sigue:

(i) f *está fragmentada* si, y sólo si, $\text{frag}(f) = 0$.

(ii) f *está σ-fragmentada por conjuntos cerrado* si, y sólo si, $\sigma\text{-frag}_c(f) = 0$.

Recordemos que un espacio topológico X es hereditariamente de Baire si todo subconjunto cerrado $F \subset X$ es un espacio de Baire. La siguiente proposición nos dice que relación hay entre $\text{frag}(f)$ y $\sigma\text{-frag}_c(f)$.

Proposición 4.1.3 ([ACN])**.** *Sea X un espacio topológico y (Z,d) un espacio métrico. Si $f \in Z^X$ entonces*

$$\sigma\text{-frag}_c(f) \leq \text{frag}(f).$$

Si además X es hereditariamente de Baire, entonces

$$\sigma\text{-frag}_c(f) = \text{frag}(f).$$

Demostración. La primera desigualdad sale directamente de la definición. Supongamos entonces que X es hereditariamente de Baire. Tenemos que probar que si $+\infty > \varepsilon > \sigma\text{-frag}_c(f)$, entonces f está ε-fragmentada. Sea C un subconjunto cerrado de X. Fijemos $\varepsilon > \sigma\text{-frag}_c(f)$. Entonces existe una sucesión $(X_n)_n$ de conjuntos cerrados cubriendo X tal que $f_{|X_n}$ está ε-fragmentada para cada $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $H_n = X_n \cap C$. Entonces, la sucesión de conjuntos cerrados $(H_n)_n$ cubre C, y, como C es un espacio de Baire, existe $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto abierto $U \subset X$ tal que

$$\emptyset \neq U' = U \cap C \subset H_n \subset X_n.$$

Como $f|_{X_n}$ está ε-fragmentada, existe un subconjunto abierto V de X tal que $V \cap U' \neq \emptyset$ y además $\text{diam} f(V \cap U') \leq \varepsilon$. Pongamos $W = V \cap U$. Entonces W es un subconjunto abierto de X y

$$W \cap C = V \cap U \cap C = V \cap U' \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\text{diam} f(W \cap C) \leq \varepsilon$ de donde se deduce que f está ε-fragmentada. □

Nuestro objetivo ahora es establecer una fórmula que nos permita estudiar distancias a espacios de funciones de la primera clase de Baire a través de $\text{frag}(f)$ y $\sigma\text{-frag}_c(f)$. Para ello vamos a utilizar funciones que son constantes en los conjuntos de una buena partición.

Proposición 4.1.4 ([JOPV93, Proposition 3])**.** *Sea X un espacio perfectamente paracompacto y E un subconjunto convexo de un espacio de Banach. Si $f : X \to E$ es constante en cada conjunto de una buena partición, entonces $f \in B_1(X,E)$.*

Demostración. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una buena partición de X tal que $f|_{X_i}$ es constante para $i \in I$. Cada $\{X_i : i \in I\}$ se puede expresar como una unión numerable

$$X_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{i,n},$$

de forma que cada familia $\{X_{i,n} : i \in I\}$ es discreta para $n \in \mathbb{N}$. Además, por la Proposición 1.5.2 (i) podemos suponer que los conjuntos $X_{i,n}$ son cerrados para $i \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que

$$T_n := \bigcup\{X_{i,n} : i \in I\}$$

es una sucesión de conjuntos cerrados tal que $f|_{T_n}$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $C_1 = T_1$ y para $n > 1$ denotemos

$$C_n = T_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} T_i.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ así que existe una sucesión creciente de cerrados $(C_{n,m})_m$ tal que

$$C_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{n,m}.$$

Como $f|_{T_n}$ es continua, en particular tenemos que $f|_{C_{n,m}}$ es continua para $n,m \in \mathbb{N}$. Tenemos por lo tanto que

$$D_m = \bigcup_{i=1}^{m} C_{i,m}$$

es una sucesión creciente de cerrados que cubren X. Además, como la familia $\{C_{i,m} : i = 1,2,\dots,m\}$ es disjunta y finita se deduce que $f|_{D_m}$ es continua para cada $m \in \mathbb{N}$. Como X es paracompacto, $f|_{D_m}$ tiene una extensión continua f_m definida en todo X, véase [Are52, Theorem 4.1]. La sucesión $(f_m)_m$ converge puntualmente a f y por lo tanto $f \in B_1(X,E)$. $\square$

Lema 4.1.5 ([ACN]). *Sea X un espacio perfectamente paracompacto, E un subconjunto convexo de un espacio de normado, $\varepsilon > 0$ y $f : X \to E$ una función ε-fragmentada. Entonces existe una función $h : X \to E$ que es constante en cada conjunto de una buena partición de Y tal que*

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \varepsilon \text{ para todo } x \in X.$$

Además, si $E = \mathbb{R}$ entonces h puede elegirse para que satisfaga

$$|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon/2 \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Como f está ε-fragmentada, por inducción transfinita podemos encontrar un ordinal Γ y un cubrimiento abierto $\{G_\gamma : \gamma \prec \Gamma\}$ de X tal que $F_\gamma \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam} f(F_\gamma) \leq \varepsilon$, donde $F_0 = G_0$ y, para $0 \prec \gamma \prec \Gamma$, $F_\gamma = G_\gamma \setminus \bigcup_{\xi \prec \gamma} G_\xi$. Por la Proposición 1.5.4, $\{F_\gamma : \gamma \prec \Gamma\}$ es una buena partición de X. Si $E = \mathbb{R}$, elijamos t_γ el punto medio de $\operatorname{conv} f(F_\gamma)$ y si $E \neq \mathbb{R}$ elijamos t_γ un punto arbitrario de $f(F_\gamma)$ para $\gamma \prec \Gamma$. Definamos ahora $h : Y \to E$ como $h(y) = t_\gamma$ si $y \in F_\gamma$. Claramente h es una función constante en cada conjunto de una buena partición de X que satisface que $d(f,h) \leq \varepsilon$, y si $E = \mathbb{R}$, entonces $d(f,h) \leq \varepsilon/2$. $\square$

Teorema 4.1.6 ([ACN]). *Si X es un espacio perfectamente paracompacto, E un espacio de Banach y $f \in E^X$ entonces*

$$\frac{1}{2}\,\sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f) \leq d(f, B_1(X,E)) \leq \sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f). \tag{4.2}$$

En el caso $E = \mathbb{R}$ tenemos la igualdad

$$d(f, B_1(X)) = \frac{1}{2}\,\sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f). \tag{4.3}$$

Demostración. Probemos la primera desigualdad en (4.2). Si $d(f, B_1(X,E)) = +\infty$ la desigualdad se cumple. Supongamos entonces que $d(f, B_1(X,E))$ es finito. Fijemos $\alpha > d(f, B_1(X,E))$ y tomemos $g \in B_1(X,E)$ con

$$\|f(x) - g(x)\| < \alpha, \text{ para cada } x \in X. \tag{4.4}$$

Tomemos una sucesión $(g_n)_n$ en $C(X,E)$ tal que $\lim_n g_n(x) = g(x)$ para cada $x \in X$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$X_n := \bigcap_{m \geq n} \{x \in X : \|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\}.$$

Está claro que cada X_n es cerrado y que $X = \bigcup_n X_n$. Por otro lado, para cada $x \in X_n$ tenemos que

$$\|g_n(x) - g(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Como g_n es continua, para cada $a \in X_n$ podemos tomar un entorno abierto $V_a \subset X$ de a tal que $\operatorname{diam} g_n(V_a) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto, por (4.4) y (4.5) podemos concluir que $\operatorname{diam} f(V_a \cap X_n) < 2\alpha + \varepsilon$. Esta última desigualdad nos dice que $\sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f) \leq 2\alpha + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Como $\alpha > d(f, B_1(X,E))$ es arbitrario concluimos que $\sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f) \leq 2d(f, B_1(X,E))$ con lo que concluye esta parte de la demostración.

Veamos ahora la última desigualdad en (4.2). Como la desigualdad es trivialmente cierta cuando $\sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f) = +\infty$, podemos suponer que $\sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f)$ es finito. Dado $\varepsilon > \sigma\text{-frag}_{\mathrm{c}}(f)$, existe un cubrimiento cerrado numerable $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tal que $f|_{X_n}$ está ε-fragmentada para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.5.2 (iii), tenemos que $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición de X, donde $Y_1 = X_1$, y para $n > 1$, $Y_n = X_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} X_m$. Por el Lema 4.1.5 aplicado a cada Y_n, existe una función $g_n : Y_n \to E$ que es constante en cada conjunto de una buena partición de Y_n tal que si $x \in Y_n$ entonces $d(g_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ y $d(g_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$ si $E = \mathbb{R}$. Definamos $g : X \to E$ como

$$g(x) = g_n(x) \quad \text{si} \quad x \in Y_n.$$

Por la Proposición 1.5.2 (ii), g es constante en cada conjunto de una buena partición de X y así que por la Proposición 4.1.4, $g \in B_1(X,E)$. Claramente, $d(f,h) \leq \varepsilon$ en general, así que la segunda desigualdad en (4.2) queda probada, y si $E = \mathbb{R}$, entonces tenemos que $d(f,h) \leq \varepsilon/2$ por lo que la igualdad (4.3) queda probada. □

Observación 4.1.7. *Si seguimos la demostración del Lema 4.1.5 podemos observar la conclusión obtenida cuando $E=\mathbb{R}$ se puede obtener también cuando E tiene la propiedad de que para todo conjunto acotado $H\subset E$ existe $x\in E$ tal que*

$$H\subset B(x,\operatorname{diam}(H)/2).$$

Por lo tanto, la fórmula

$$d(f,B_1(X,E))=\frac{1}{2}\,\sigma\text{-frag}_c(f)$$

es válida para los espacios de Banach E con dicha propiedad. Un ejemplo de espacios que cumplen dicha propiedad son los espacios $\ell_\infty(\Gamma)$ con Γ un conjunto arbitrario.

En [GS06] se demuestra que si $f\in\mathbb{R}^X$ con X un espacio polaco (es decir X es un espacio métrico completo separable), entonces

$$d(f,B_1(X))=\frac{1}{2}\operatorname{frag}(f).$$

Combinando el Teorema 4.1.6 y la Proposición 4.1.3 obtenemos que este resultado es también válido en un caso más general.

Corolario 4.1.8 ([ACN])**.** *Si X es un espacio métrico hereditariamente de Baire y $f\in\mathbb{R}^X$, entonces*

$$d(f,B_1(X))=\frac{1}{2}\operatorname{frag}(f).$$

Para terminar esta sección veamos una caracterización de σ-frag$_c(f)$ cuando f está definido en un espacio métrico. Para ello veamos primero el lema siguiente.

Lema 4.1.9. *Sea (X,d) un espacio métrico, $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado y $f:X\to E$ una función. Entonces*

$$\operatorname{frag}(f)\geq \inf\{\varepsilon>0: \text{existe un cubrimiento cerrado } \{X_n\}_n \text{ de } X \text{ tal que } \operatorname{osc}(f_{|X_n})\leq\varepsilon \text{ para } n\in\mathbb{N}\}.$$

Demostración. Supongamos que $\operatorname{frag}(f)<\varepsilon<+\infty$. Entonces, existe un ordinal Γ y una sucesión de conjuntos abiertos G_μ, $\mu\prec\Gamma$ de X tales que $X=\cup_{\mu\prec\Gamma}G_\mu$, $M_\xi=G_\xi\setminus\cup_{\mu\prec\xi}G_\mu\neq\emptyset$ para todo $\xi\prec\Gamma$ y $\operatorname{diam}(f(M_\xi))<\varepsilon$ para todo $\xi\prec\Gamma$. Los conjuntos $F_0=X$ y $F_\xi=X\setminus\cup_{\mu\prec\xi}G_\mu$ son cerrados así que el conjunto

$$F_{\xi k}=\{t\in F_\xi: d(t,X\setminus G_\xi)\geq 1/k\}$$

es cerrado. Si $\gamma\succ\xi$, entonces

$$d(F_{\xi k},F_{\gamma k})\geq d(F_{\xi k},F_\gamma)\geq d(F_{\xi k},X\setminus G_\xi)\geq 1/k$$

así que $X_k=\bigcup_{\xi\prec\Gamma}F_{\xi k}$ es cerrado. Como $M_\xi=\bigcup_k F_{\xi k}$ y $\cup_{\xi\prec\Gamma}M_\xi=X$, entonces $\cup_k X_k=X$.

Elijamos $a\in X_k$. Como la familia $\{F_{\xi k}:\xi\prec\Gamma\}$ es discreta, tenemos que existe un conjunto abierto V_a y $\xi_a\prec\Gamma$ tal que $V_a\cap F_{\xi k}\neq\emptyset$ si, y sólo si, $\xi=\xi_a$. Entonces, $V_a\cap X_k=V_a\cap F_{\xi_a k}\subset M_{\xi_a}$ así que $\operatorname{diam}(f(V_a\cap X_k))\leq\varepsilon$. Hemos probado que $\operatorname{osc}(f_{|X_k})\leq\varepsilon$ con lo que concluye la prueba. $\square$

Proposición 4.1.10. *Sea (X,d) un espacio métrico, $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado y $f : X \to E$ una función. Entonces*

$$\sigma\text{-frag}_c(f) = \inf\{\varepsilon > 0 : \textit{existe un cubrimiento cerrado } \{X_n\}_n \textit{ de } X \textit{ tal que } \operatorname{osc}(f_{|X_n}) \leq \varepsilon \textit{ para } n \in \mathbb{N}\}. \tag{4.6}$$

Demostración. Sea A el ínfimo que aparece al lado derecho de la igualdad (4.6). Claramente tenemos que $\sigma\text{-frag}_c(f) \leq A$. Probemos la desigualdad inversa. Para ello fijemos $\varepsilon > \eta > \sigma\text{-frag}_c(f)$. Tenemos que existe un cubrimiento cerrado $\{X_n\}_n$ de X tal que $f_{|X_n}$ está η-fragmentada para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Lema 4.1.9, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un cubrimiento cerrado $\{X_n^m\}_m$ de X_n tal que $\operatorname{osc}(f_{|X_n^m}) \leq \varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{X_n^m : (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ es un cubrimiento cerrado numerable de X tal que $\operatorname{osc}(f_{|X_n^m}) \leq \varepsilon$ de donde se deduce que $A \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > \sigma\text{-frag}_c(f)$ es arbitrario, tendremos que $A \leq \sigma\text{-frag}_c(f)$. □

4.2 Diferencia cuantitativa entre compacidad y compacidad numerable

En el Capítulo 2, para un conjunto H de Z^X donde X es un espacio topológico y (Z,d) un espacio métrico, hemos definido el índice $\operatorname{ck}(H)$ para *medir* cómo de lejos estaba H de ser relativamente numerablemente compacto en $(C(X,Z),\tau_p)$. En espacios de funciones de la primera clase de Baire podemos hacer algo análogo.

Definición 4.2.1. *Si X es un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y H es un subconjunto del espacio (Z^X,τ_p). Definimos*

$$\operatorname{ck}_{B_1}(H) := \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} d(\operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi), B_1(X,Z)).$$

De forma análoga a como pasa en espacios de funciones continuas $C(X,Z)$, si H es un subconjunto relativamente numerablemente compacto de $(B_1(X,Z),\tau_p)$, entonces $\operatorname{ck}_{B_1}(H) = 0$. El objetivo de esta sección, es estudiar la diferencia cuantitativa entre compacidad y compacidad numerable. Para ello, de forma similar a como hicimos en el Capítulo 2, estudiaremos la relación entre $\operatorname{ck}_{B_1}(H)$ y

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)),$$

véase Corolario 4.2.3. La clave para ello es la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2 ([ACN])**.** *Sea X un espacio métrico separable, (Z,d) un espacio métrico y H un subconjunto relativamente τ_p-compacto de (Z^X,τ_p). Entonces*

$$\sup_{f \in \overline{H}} \operatorname{frag}(f) = \sup_{\varphi \in H^{\mathbb{N}}} \inf\{\operatorname{frag}(f) : f \in \operatorname{clust}_{Z^X}(\varphi)\}, \tag{4.7}$$

donde las clausuras están tomadas en (Z^X,τ_p).

Demostración. Sea α el número que aparece en el lado derecho de (4.7). Claramente

$$\beta := \sup_{f\in\overline{H}} \operatorname{frag}(f) \geq \alpha.$$

Si $\beta = 0$ la igualdad se cumple. En otro caso, la igualdad (4.7) quedará probada si vemos que cada vez que $\beta > \varepsilon > 0$ también tenemos que $\alpha \geq \varepsilon$. Tomemos $\beta > \varepsilon > 0$ y elijamos $f \in \overline{H}$ tal que $\operatorname{frag}(f) > \varepsilon$. Entonces existe un subconjunto no vacío $F \subset X$ tal que $\operatorname{diam} f(F\cap U) > \varepsilon$ para cada conjunto abierto $U \subset X$ con $U \cap F \neq \emptyset$. Fijemos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de la topología en X y escribamos $B := \{n \in \mathbb{N} : U_n \cap F \neq \emptyset\}$. Para cada $n \in B$ podemos tomar $x_n, y_n \in U_n \cap F$ tales que $d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. Tomemos $C := \{x_n : n \in B\} \cup \{y_n : n \in B\}$. Como $C \subset X$ es numerable y $f \in \overline{H}$, existe una sucesión $\varphi \in H^{\mathbb{N}}$ tal que $\text{lím}_n \varphi(n)(x) = f(x)$ para cada $x \in C$. Por lo tanto, si g es un punto de τ_p-aglomeración arbitrario de φ, entonces $g|_C = f|_C$ y en particular tenemos que

$$d(g(x_n), g(y_n)) > \varepsilon, \text{ para cada } n \in B. \tag{4.8}$$

Si U es un conjunto abierto tal que $U \cap C \neq \emptyset$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\emptyset \neq U_n \cap C \subset U \cap F$. Así que, $n \in B$ y como $x_n, y_n \in U \cap C$ concluimos que

$$\operatorname{diam} g(U\cap C) \geq d(g(x_n), g(y_n)) \overset{(4.8)}{>} \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\text{ínf}\{\operatorname{frag}(g) : g \in \operatorname{clust}(\varphi)\} \geq \varepsilon$$

y por lo tanto $\alpha \geq \varepsilon$ con lo que la prueba está finalizada. $\square$

Combinando la Proposición 4.2.2, el Teorema 4.1.6 y la Proposición 4.1.3, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.3 ([ACN])**.** *Sea X un espacio polaco, E un espacio de Banach y H un subconjunto relativamente τ_p-compacto de E^X. Entonces*

$$\operatorname{ck}_{B_1}(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{E^X}, B_1(X,E)) \leq 2\operatorname{ck}_{B_1}(H).$$

En el caso particular $E = \mathbb{R}$, tenemos

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, B_1(X)) = \operatorname{ck}_{B_1}(H).$$

En el caso en el que $\operatorname{ck}_{B_1}(H) = 0$ y $E = \mathbb{R}$ se obtiene el resultado clásico debido a Rosenthal.

Corolario 4.2.4 ([Ros74])**.** *Si X un espacio polaco, $H \subset B_1(X)$ es τ_p-relativamente compacto si, y sólo si, es τ_p-relativamente numerablemente compacto.*

Obsérvese ahora que como hicimos en el caso de funciones continuas, obtenemos que bajo las hipótesis del Corolario 4.2.3, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\operatorname{ck}_{B_1}(H) = 0$,
(ii) H es un conjunto relativamente numerablemente compacto de $(B_1(X,E), \tau_p)$,
(iii) H es un conjunto relativamente compacto de $(B_1(X,E), \tau_p)$.

4.3 Distancia a espacios de funciones de la primera clase de Baire y oscilación puntual

El punto de partida de esta sección es el siguiente teorema de Srivatsa.

Teorema 4.3.1 (Srivatsa, [Sri93, Theorem 2.1])**.** *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y K un conjunto compacto. Entonces:*

(i) Si $F : X \to C(K)$ es τ_p-continua, entonces F es de la primera clase de Baire para la norma.
(ii) Si $F : X \to E$ es w-continua, entonces F es de la primera clase de Baire para la norma.

Obsérvese que la condición de que $F : X \to (C(K),\tau_p)$ sea continua es equivalente a que para todo $k \in K$, la aplicación $\pi_k \circ F$ sea continua donde la aplicación $\pi_k : C(K) \to \mathbb{R}$ está definida por $h \rightsquigarrow h(k)$. Sabemos por el Teorema 1.1.9 que estudiar distancias a espacios de funciones continuas (sobre espacios normales) es equivalente a estudiar la oscilación de dichas funciones. El problema que nos planteamos aquí es estudiar qué pasa cuando sustituimos la condición de que $\pi_k \circ F$ sea continua por la condición de que dichas funciones tengan oscilación menor que cierta cantidad. Como vemos en el siguiente teorema, al hacer este cambio lo que obtenemos es una cota de la distancia que hay de F a las funciones de la primera clase de Baire. Además también recogemos el caso en el que el rango de F no son aplicaciones necesariamente continuas.

Teorema 4.3.2 ([ACN])**.** *Sea X un espacio métrico, K un espacio compacto y $F : X \to \mathbb{R}^K$ una función. Entonces*

$$d(F,B_1(X,C(K))) \leq \frac{3}{2}\sup_{x\in X}\operatorname{osc}(F(x)) + 2\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(\pi_k \circ F), \tag{4.9}$$

donde, para $F,F' : X \to \mathbb{R}^k$, $d(F,F') = \sup\{|F(x)(k) - F'(x)(k)| : (x,k) \in X \times K\}$.

Demostración. Obviamente podemos suponer que el lado derecho de (4.9) es finito.

Sea $a > \sup_{x\in X}\operatorname{osc}(F(x))$ y $b > b' > \sup_{k\in K}\operatorname{osc}(\pi_k \circ F)$.

Primero vamos a reducir el caso general al caso donde la imagen de F es uniformemente acotada en $\mathbb{R}^X$.

Por el Teorema 1.1.9, para cada $k \in K$ existe $j^k \in C(X)$ tal que $d(\pi_k \circ F, j^k) < b/2$. Definamos ahora la aplicación $J : X \to \mathbb{R}^K$ como $J(x)(k) = j^k(x)$. Claramente J es τ_p-continua y $d(F,J) \leq b/2$. Para cada $x \in X, \operatorname{osc}F(x)$ es finita así que $F(x)$ es una función localmente acotada en K. Como K es compacto, tenemos que $F(x) \in \ell_\infty(X)$. Por lo tanto también tenemos que $J(x) \in \ell_\infty(K)$. Denotemos $P_0 = \emptyset$. Sea entonces

$$P_n = \{x \in X : \|J(x)\|_\infty \leq n\} \text{ y } Q_n = P_n \setminus P_{n-1}.$$

Entonces cada P_n es cerrado en X y $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición de X por la Proposición 1.5.2 (iii). Como $J(Q_n)$ es acotado en $\ell_\infty(K)$, $F(Q_n)$, también es acotado en $\ell_\infty(K)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una función H_n sobre Q_n que es constante en cada conjunto de una buena partición de Q_n y $d(F|_{Q_n},H_n) \leq 3a/2 + 2b$. Por la Proposición 1.5.2 (ii), la función H dada por $H(x) = H_n(x)$ cuando $x \in Q_n$, es constante en cada conjunto de una buena partición de X. Por lo tanto, por la Proposición 4.1.4, $H \in B_1(X, C(K))$ y $\|F - H\|_\infty \leq 3a/2 + 2b$. Esto termina la prueba. Por lo tanto, a partir de ahora suponemos que $F(X)$ es acotada en $\ell_\infty(K)$.

Para cada $x \in X$, por el Teorema 1.1.9, existe $g_x \in C(K)$ con $\|F(x) - g_x\|_\infty < a/2$. Definamos la aplicación $G : X \to C(K)$ como $G(x) = g_x$. Entonces para cada $(x, k) \in X \times K$,

$$|F(x)(k) - G(x)(k)| \leq a/2. \tag{4.10}$$

Como X es métrico, es en particular paracompacto, y por lo tanto, por el Lema 1.2.17 y el Teorema 1.2.18 tenemos que todo cubrimiento abierto (y en particular una base de la topología) admite un refinamiento σ-discreto abierto. En particular tenemos que existe una base σ-discreta $\mathscr{U}$ para la topología de X, es decir, $\mathscr{U} = \bigcup\{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde cada $\mathscr{U}_n$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos de X. Para cada $U \in \mathscr{U}$, elijamos $x_U \in U$. Para cada n definamos la función $G_n : \bigcup \mathscr{U}_n \to C(K)$ como $G_n(x) = G(x_U)$ para $x \in U \in \mathscr{U}_n$. El dominio de G_n es $\bigcup \mathscr{U}_n$.

Fijemos ahora $x \in X$. Para cada $p \in \mathbb{N}$, existe un $n_p \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_p \subset B(x, 1/p)$ para algún $U_p \in \mathscr{U}_{n_p}$. Para cada $k \in K$, se tiene que $\operatorname{osc} \pi_k \circ F < b'$, y por lo tanto, existe $p_k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(\pi_k \circ F(B(x, 1/p_k))) < b'$. Si $p > p_k$, como $U_p \subset B(x, 1/p)$,

$$\operatorname{diam}\Big((\pi_k \circ F)(U_p)\Big) \leq \operatorname{diam}\Big((\pi_k \circ F)\big(B(x, 1/p)\big)\Big) \leq \operatorname{diam}\Big((\pi_k \circ F)\big(B(x, 1/p_k)\big)\Big) < b'. \tag{4.11}$$

Además como $x, x_{U_p} \in U_p$, por (4.10) y (4.11) tenemos que

$$\begin{aligned} |G_{n_p}(x)(k) - F(x)(k)| &= |G(x_{U_p})(k) - F(x)(k)| \leq \\ &\leq |G(x_{U_p})(k) - F(x_{U_p})(k)| + |F(x_{U_p})(k) - F(x)(k)| < a/2 + b'. \end{aligned}$$

Esto muestra que para cada $k \in K, |G_{n_p}(x)(k) - F(x)(k)| < a/2 + b'$ eventualmente para p. Como $\operatorname{osc}(G_{n_p}(x) - F(x)) = \operatorname{osc} F(x) < a$, $d(G_{n_p}(x) - F(x), C(K)) < a/2$. Aplicando ahora el Teorema 2.7.1 obtenemos que existe una combinación convexa con coeficientes racionales H de $\{G_{n_p} : p \in \mathbb{N}\}$ tal que $\|H(x) - F(x)\|_\infty < 3a/2 + b$. Sea $\{H_m : m \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de las combinaciones convexas con coeficientes racionales de $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, como hemos visto antes, para cada $x \in X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|H_m(x) - F(x)\|_\infty \leq 3a/2 + b$. Para $m \in \mathbb{N}$, sea

$$A_m := \{x \in X : H_m(x) \text{ está definido y } \|H_m(x) - F(x)\|_\infty \leq 3a/2 + b\}.$$

Entonces $\bigcup\{A_m : m \in \mathbb{N}\} = X$. Por construcción, existe $\mathscr{V}_m$ una familia discreta de abiertos no vacíos tales que $\bigcup \mathscr{V}_m = \operatorname{dom}(H_m)$ y tal que H_m es constante en V para cada $V \in \mathscr{V}_m$. Denotemos $h_m^V \in C(K)$ el valor constante de H_m en V. Entonces

$$A_m = \bigcup \big\{V \cap \{x : \|F(x) - h_m^V\|_\infty \leq 3a/2 + b\} : V \in \mathscr{V}_m\big\}.$$

Pongamos

$$B_m := \bigcup \big\{V \cap \overline{\{x : \|F(x) - h_m^V\|_\infty \leq 3a/2 + b\}} : V \in \mathscr{V}_m\big\}.$$

Como $\mathscr{V}_m$ es una familia discreta de abiertos en X, B_m es la intersección de un abierto y un cerrado en X por el Lema 1.2.2. De aquí obtenemos que B_m es a la vez un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ y $\mathscr{F}_\sigma$ ya que X es métrico.

Finalmente, definamos $L : X \to \ell_\infty(K)$ como

$$L(x) := H_m(x) \qquad \text{si } x \in C_m = B_m \setminus \bigcup_{k<m} B_k.$$

Claramente tenemos que cada C_m es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$. Por lo tanto, $\{C_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición por la Proposición 1.5.2 (iii). Obsérvese que relativo a C_m, C_m es la unión de una familia discreta $\{V \cap C_m : V \in \mathscr{V}_m\}$ de conjuntos abiertos (y por lo tanto F_σ) y H_m toma valores en $C(K)$ y es constante en cada $V \cap C_m$. Así que por la Proposición 1.5.2 (ii), L toma valores en $C(K)$ y es constante en cada conjunto de una buena partición de X. Por lo tanto, por la Proposición 4.1.4, $L \in B_1(X, C(K))$.

Sólo nos queda probar que $\|L - F\|_\infty \leq 3a/2 + 2b$. Para ello, sólo tenemos que probar que si

$$x_0 \in \overline{\{x : \|F(x) - h_m^V\|_\infty \leq 3a/2 + b\}}, \tag{4.12}$$

entonces $\|F(x_0) - h_m^V\|_\infty \leq 3a/2 + 2b$.

Fijemos $k \in K$. Como $\operatorname{osc}(\pi_k \circ F) < b$, tenemos que existe un entorno abierto U_0 de x_0 tal que $\operatorname{diam}(\pi_k \circ F(U_0)) < b$. Por (4.12), existe $x \in U_0$ tal que $\|F(x) - h_m^V\|_\infty \leq 3a/2 + b$ así que

$$\begin{aligned} |F(x_0)(k) - h_m^V(k)| &\leq |F(x_0)(k) - F(x)(k)| + |F(x)(k) + h_m^V(k)| \\ &\leq b + 3a/2 + b = 3a/2 + 2b. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $k \in K$, $\|F(x_0) - h_m^V\|_\infty \leq 3a/2 + 2b$. □

En particular, si E es un espacio de Banach y $K = (B_{E^*}, w^*)$, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3.3 ([ACN]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y $F : X \to E^{**}$ una función, entonces*

$$d(F, B_1(X,E)) \leq (3/2) \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(F(x)) + 2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}(x^* \circ F),$$

donde estamos considerando $F(x)$ como una función en (B_{E^*}, w^*).

Demostración. En la prueba del Teorema 4.3.2, si $K = (B_{E^*}, w^*)$, por la Proposición 3.1.3 podemos elegir $g_x \in E$, y así, si seguimos la prueba llegamos a que

$$d(F, B_1(X,E)) \leq (3/2) \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(F(x)) + 2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}(x^* \circ F).$$

□

Corolario 4.3.4 ([ACN]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y $F : X \to E$ una función, entonces*

$$d(F, B_1(X,E)) \leq 2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}(x^* \circ F).$$

Obsérvese que el Teorema 4.3.2 y sus Corolarios 4.3.3 y 4.3.4 son extensiones del Teorema 4.3.1. Veamos ahora algunas consecuencias del Teorema 4.3.2. En el siguiente corolario vamos a utilizar que las funciones de la primera clase de Baire sobre un espacio de Baire X y con imagen en un espacio métrico separable son continuas en un subconjunto G_δ denso de X. Introduzcamos primero alguna notación que usaremos de aquí en adelante. Si tenemos una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, denotemos por $f_x : Y \to \mathbb{R}$ y $f^y : X \to \mathbb{R}$ a las funciones dadas por

$$f_x(y) = f(x,y) = f^y(x)$$

para cada $(x,y) \in X \times Y$. A la función f, también asociamos la función $F : X \to \mathbb{R}^Y$ dada por $F(x) = f_x$ para cada $x \in X$. Cuando hablamos de oscilación de F, está calculada con respecto a la métrica uniforme sobre $\mathbb{R}^Y$.

Corolario 4.3.5. *Sea X un espacio métrico completo, K un espacio compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función. Entonces existe un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ denso $D \subset X$ tal que para cada $x \in D$*

$$\operatorname{osc}(F,x) \leq 3 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 4 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k)$$

donde $F : X \to \mathbb{R}^K$ es la función definida por $F(x) = f_x$.

Demostración. Sea $a = (3/2)\sup_{x\in X} \operatorname{osc}(f_x) + 2\sup_{k\in K} \operatorname{osc}(f^k)$ y supongamos que $a < +\infty$. Por el Teorema 4.3.2, $d(F, B_1(X, C(K))) \leq a$. Fijemos $\varepsilon > 0$, entonces existe $G \in B_1(X, C(K))$ tal que $\|F - G\|_\infty < a + \varepsilon/4$. Como X es un espacio de Baire, existe un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ denso $D_\varepsilon \subset X$ tal que G es continua en x para todo $x \in D_\varepsilon$. Fijemos ahora $x \in D_\varepsilon$. Entonces podemos encontrar un entorno U de x tal que $\operatorname{diam} G(U) < \varepsilon/2$, y por lo tanto si $y, z \in U$,

$$\begin{aligned}
&\|F(y) - F(z)\|_\infty \leq \\
&\qquad \leq \|F(y) - G(y)\|_\infty + \|G(y) - G(z)\|_\infty + \|G(z) - F(z)\|_\infty < \\
&\qquad < a + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + a + \frac{\varepsilon}{4} = 2a + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así que $\operatorname{osc}(F,x) \leq 2a + \varepsilon$. Sea ahora $D = \bigcap\{D_{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces D sigue siendo un subconjunto G_δ denso de X, y para cada $x \in D$, $\operatorname{osc}(F,x) \leq 2a$. □

Viendo el corolario anterior parece natural plantearse que podríamos decir de la oscilación de la función f en cada punto $(x,k) \in D \times K$. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.3.6. *Sea X un espacio topológico, K un espacio compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función. Entonces para cada $x \in X$,*

$$\operatorname{osc}(F,x) \leq \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f,(x,k)) \leq 2\operatorname{osc}(F,x) + \operatorname{osc}(f_x).$$

Demostración. Probemos la primera desigualdad. Supongamos que $a = \sup_{k\in K} \operatorname{osc}(f,(x,k))$ es finito y fijemos $\varepsilon > a$. Entonces para cada $k \in K$, existe un entorno abierto U_k de x y V_k de k tal que

$\operatorname{diam} f(U_k \times V_k) < \varepsilon$. Como $\{V_k : k \in K\}$ es un cubrimiento abierto del espacio compacto K, existen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que la familia $\{V_{k_i} : 1 \leq i \leq n\}$ cubre K. Pongamos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{k_i}$. Entonces U es un entorno abierto de x. Elijamos $x', x'' \in U$ y $k \in K$. Entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $k \in V_{k_i}$. Como $(x', k), (x'', k) \in U_{k_i} \times V_{k_i}$ y $\operatorname{diam} f(U_{k_i} \times V_{k_i}) < \varepsilon$ entonces

$$|f(x', k) - f(x'', k)| < \varepsilon$$

y como podemos hacer esto para todo $k \in K$ entonces

$$d(F(x'), F(x'')) \leq \varepsilon$$

así que $\operatorname{osc}(F, x) \leq \varepsilon$. Podemos hacer esto para todo $\varepsilon > a$ así que la primera desigualdad queda probada.

Para la segunda desigualdad, supongamos que tanto $\operatorname{osc}(F, x)$ como $\operatorname{osc}(f_x)$ son finitas y elijamos $\varepsilon > \operatorname{osc}(F, x)$ y $\delta > \operatorname{osc}(f_x)$. Tenemos que probar que $\operatorname{osc}(f, (x, k)) \leq 2\varepsilon + \delta$ para $k \in K$ fijo. Como $\operatorname{osc}(F, x) < \varepsilon$ existe un entorno U de x tal que $d(f_x, f_y) < \varepsilon$ para cada $y \in U$. Por otro lado, como $\operatorname{osc}(f_x) < \delta$, existe un entorno V de k tal que $\operatorname{diam} f_x(V) < \delta$. Entonces, para $(x', k'), (x'', k'') \in U \times V$

$$\begin{aligned} |f(x', k') - f(x'', k'')| &\leq |f(x', k') - f(x, k')| + |f(x, k') - f(x, k'')| + |f(x, k'') - f(x'', k'')| \\ &< \varepsilon + \delta + \varepsilon = 2\varepsilon + \delta \end{aligned}$$

y por lo tanto $\operatorname{osc}(f, (x, k)) \leq 2\varepsilon + \delta$. □

El lema anterior es una extensión del siguiente resultado básico.

Corolario 4.3.7. *Sea X un espacio topológico, K un espacio compacto y $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Sea $F : X \to C(K)$ la función definida como $F(x) = f_x$. Si $x \in X$ entonces $F : X \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es continua en x si, y sólo si, f es continua en cada punto de $\{x\} \times K$.*

Corolario 4.3.8 ([ACN])**.** *Sea X un espacio métrico completo, sea K un espacio compacto y sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función. Entonces existe un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ denso $D \subset X$ tal que para cada $(y, k) \in D \times K$*

$$\operatorname{osc}(f, (y, k)) \leq 7 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 8 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

Demostración. Aplicar el Corolario 4.3.5 y el Lema 4.3.6. □

Obsérvese que en la Sección 4.4, se obtendrá el Corolario 4.3.8 en un caso más general y con mejores constantes. El Corolario 4.3.8 es una versión cuantitativa del teorema clásico de Namioka sobre continuidad separada:

Corolario 4.3.9 (Namioka,[Nam74])**.** *Sea X un espacio métrico completo, K un espacio compacto y sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una función separadamente continua. Entonces existe un conjunto $\mathscr{G}_\delta$ denso $D \subset X$ tal que f es continua en cada $(x, k) \in D \times K$.*

4.4 Juegos y oscilaciones separadas en aplicaciones de dos variables

El Corolario 4.3.9 es una respuesta a una pregunta más general del tipo: ¿para qué espacios de Baire X y espacios compactos K, se cumple la afirmación $N(X,K)$?

> $N(X,K)$: *Si $f : X \times K \to \mathbb{R}$ es separadamente continua, es decir f_x y f^k son continuas para cada $(x,k) \in X \times K$, entonces para algún conjunto G_δ denso D de X, la función f es continua (en la topología producto $X \times K$) en cada punto $(x,k) \in D \times K$.*

Definición 4.4.1. *Se dice que un espacio de Baire X tiene la propiedad $\mathscr{N}$ si $N(X,K)$ se cumple para todo espacio compacto K, y similarmente, se dice que un espacio compacto K tiene la propiedad $\mathscr{N}^*$ si $N(X,K)$ se cumple para todo espacio de Baire X.*

El Corolario 4.3.9 nos dice que los espacios métricos completos tienen la propiedad $\mathscr{N}$, y el Corolario 4.3.8 es una versión cuantitativa de $\mathscr{N}$. Como comentamos más adelante, ejemplos de espacios con la propiedad $\mathscr{N}$ son los espacios numerablemente Čech-completos [Nam74] y ejemplos de espacios con la propiedad $\mathscr{N}^*$ son los compactos de Valdivia [DG93]. En esta sección vamos a estudiar versiones cuantitativas de las propiedades $\mathscr{N}$ y $\mathscr{N}^*$ para clases de espacios más grandes con la propiedad $\mathscr{N}$ o $\mathscr{N}^*$. Estos espacios están definidos en términos de juegos topológicos así que empezamos la sección definiendo estos juegos.

Los juegos que vamos a considerar son juegos infinitos para dos jugadores, α y β, y los movimientos de los jugadores se van alternando. El *tablero* es un espacio topológico X. El juego de Banach-Mazur $\mathscr{G}(X)$ en X se juega así: primero β elige un conjunto abierto no vacío U_0 en X (la jugada 0 de β). Entonces α elige un subconjunto abierto no vacío V_0 de U_0 (la jugada 0 de α). Inductivamente, la jugada n de β es un subconjunto abierto no vacío $U_n \subset V_{n-1}$ seguido de la jugada n de α que es un subconjunto abierto no vacío $V_n \subset U_n$. El jugador α gana el juego si $\bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. En caso contrario β gana.

Una estrategia s para α en el juego $\mathscr{G}(X)$ es una regla que determina las jugadas de α en cada turno dependiendo del desarrollo del juego en cada momento. En otras palabras, la jugada n de α V_n estará dado por $V_n = s(U_0,U_1,\dots,U_n)$, donde $U_{i+1} \subset s(U_0,U_1,\dots,U_i)$ para $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Se dice que la estrategia s es ganadora si α gana siempre que use la estrategia s. Intercambiando papeles se define de forma similar una estrategia para β.

Definición 4.4.2. *Se dice que un espacio topológico X es un espacio α-favorable si α tiene una estrategia ganadora en el juego $\mathscr{G}(X)$. Se dice que el espacio es β-desfavorable si β no tiene una estrategia ganadora.*

Proposición 4.4.3 ([Oxt57])**.** *Un espacio topológico X es β-desfavorable si, y sólo si, X es un espacio de Baire.*

Demostración. Veamos primero que si X no es un espacio de Baire, entonces β tiene una estrategia ganadora. Sea U_0 un conjunto abierto y sea $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos en X tales que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap U_0 = \emptyset.$$

El primer movimiento de β será U_0. Si la respuesta de α es un abierto $V_0 \subset U_0$ se tiene que $V_0 \cap G_1 \neq \emptyset$. Por lo tanto β puede jugar ahora $U_1 = V_0 \cap G_1 \subset V_0$. Continuamos por recurrencia. Si α juega V_n se tendrá que $V_n \cap G_{n+1} \neq \emptyset$ y entonces podemos tomar la jugada $n+1$ de β como $U_{n+1} = V_n \cap G_{n+1} \subset V_n$. Claramente tenemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap U_0 = \emptyset$$

así que la estrategia definida es una estrategia ganadora para β.

Sea X un espacio de Baire y razonando por contradicción supongamos que β tiene una estrategia ganadora t. Vamos a construir un conjunto S definiendo los elementos que lo forma por inducción. Consideremos primero que $\emptyset \in S$. Supongamos que $(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}) \in S$. Entonces

$$(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, t(V_0, \ldots, V_{n-1})) \in S.$$

Supongamos ahora que $p = (U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$. Por el Lema de Zorn podemos tomar $\mathscr{V}_p$ una familia maximal de conjuntos abiertos $V_n \subset U_n$ tales que

$$\{t(V_0, \ldots, V_{n-1}, V_n) : V_n \in \mathscr{V}_p\}$$

es una familia disjunta. Entonces $(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n, V_n) \in S$ para todo $V_n \in \mathscr{V}_p$. Con esto queda construido el conjunto S. Por la maximilidad de la familia $\mathscr{V}_p$ tenemos que

$$\mathscr{U}_p = \{U_{n+1} : (U_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1}) \in S\}$$

es una familia disjunta de conjuntos tales que $\cup \mathscr{U}_p$ es denso en U_n. Sea ahora

$$W_n = \bigcup \{U_n : \text{ existe } (U_0, \ldots, V_{n-1}, U_n) \in S\}.$$

W_n es un conjunto abierto y denso en U_0. Supongamos que $\cap_n W_n \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \cap_n W_n$. Como $x \in W_1$, existen V_0, U_1 tales que

$$(U_0, V_0, U_1) \in S$$

y $x \in U_1$. Supongamos que tenemos que

$$(U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S$$

y $x \in U_n$. Utilizando que $x \in W_{n+1}$ podremos encontrar U_{n+1}, V_{n+1} tales que

$$(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_{n+1}, U_{n+1}) \in S$$

y $x \in U_{n+1}$. Por inducción hemos encontrado una sucesión $U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n$ tal que

$$x \in \bigcap U_n \neq \emptyset$$

y

$$U_n = t(V_0, \ldots, V_{n-1})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ pero esto es imposible por ser t una estrategia ganadora. Por lo tanto $\cap_n W_n = \emptyset$ por lo que podemos deducir que U_0 no es un espacio de Baire. Por otro lado, U_0 es un subconjunto abierto de un espacio de Baire y por lo tanto es un espacio de Baire con lo que llegamos a una contradicción. $\square$

Consideremos ahora el juego $\mathscr{G}_\sigma(X)$, que es una variación debida a Christensen [Chr81], del juego de Banach-Mazur. Igual que antes los jugadores α y β juegan de forma alternativa empezando β. Las jugadas para β son las mismas, es decir, en la jugada n el jugador β elige un conjunto abierto no vacío $U_n \subset V_{n-1}$. La jugada n de α consiste en un par (V_n, x_n) donde V_n es un subconjunto abierto no vacío de U_n y $x_n \in X$. El jugador α gana el juego $\mathscr{G}_\sigma(X)$ si $\bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ contiene un punto de aglomeración de la sucesión $(x_n)_n$, en caso contrario gana β. Una estrategia en el juego $\mathscr{G}_\sigma(X)$ está definida de forma análoga que en el juego $\mathscr{G}(X)$.

Definición 4.4.4. *Se dice que un espacio topológico X es σ-β-desfavorable si β no tiene una estrategia ganadora en el juego $\mathscr{G}_\sigma(X)$.*

Observación 4.4.5. *Obsérvese que de la Proposición 4.4.3 se obtiene de forma inmediata que los espacios σ-β-desfavorables son espacios de Baire.*

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios σ-β-desfavorables. Los espacios de Baire separables son espacios σ-β-desfavorables (Saint-Raymond [SR83]). Se dice que un espacio completamente regular X es numerablemente Čech-completo (o fuertemente numerablemente completo) si existe una sucesión $\{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubrimientos abiertos de X tales que $\bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ cada vez que $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ sea una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X tales que F_n está contenido en algún miembro de $\mathscr{U}_n$ para cada n. Christensen [Chr81] demostró que los espacios numerablemente Čech-completos son σ-β-desfavorables. En particular, los espacios Čech-completos son σ-β-desfavorable. Por lo tanto, los espacios localmente compactos y los espacios métricos completos son σ-β-desfavorables.

Generalizando un resultado de Christensen, Saint-Raymond [SR83] demostró que los espacios σ-β-desfavorables tienen la propiedad $\mathscr{N}$. Más tarde, Bouziad [Bou90] dio una prueba más elegante y corta. Usando las ideas de Bouziad, en el siguiente teorema damos una versión cuantitativa del resultado de Saint-Raymond.

Teorema 4.4.6 ([ACN]). *Sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación, donde X es un espacio σ-β-desfavorable y K es un espacio compacto. Entonces existe un conjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k) \in D \times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 6 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 8 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

Demostración. Sea $b = \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k)$, $c = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x)$ y sea $r = 6c + 8b$. Supongamos que r es finito, ya que en caso contrario el resultado sería cierto de forma trivial. Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n := \{x \in X : \operatorname{osc}(f,(x,k)) < r + 1/n \ \text{ para cada } k \in K\}.$$

Como la oscilación es una aplicación superiormente semicontinua y K es compacto, se tiene que A_n es un conjunto abierto.

Veamos ahora que cada conjunto A_n es denso en X por contradicción. Supongamos que para algún $p \in \mathbb{N}$, $\overline{A_p} \neq X$. Vamos a definir una estrategia s para el jugador β en el juego $\mathscr{G}_\sigma(X)$. Sea primero $U_0 := s(\emptyset) = X \setminus \overline{A_p}$. Inductivamente supongamos que $(V_0, a_0), (V_1, a_1), \ldots, (V_{n-1}, a_{n-1})$ han sido jugados por α. Debemos definir ahora la respuesta de β

$$U_n := s((V_0, a_0), (V_1, a_1), \ldots, (V_{n-1}, a_{n-1})).$$

Primero elijamos $x_n \in V_{n-1}$. Como $x_n \notin A_p$, existe $k_n \in K$ tal que

$$\operatorname{osc}(f, (x_n, k_n)) \geq r + 1/p. \tag{4.13}$$

Elijamos un conjunto abierto O_n de X tal que $x_n \in O_n \subset V_{n-1}$ y

$$\operatorname{diam} f(O_n, k_n) < b + 1/n. \tag{4.14}$$

Para cada $x \in X$, como $\operatorname{osc} f_x \leq c$, la Observación 1.1.10 nos permite elegir $g_x \in C(K)$ tal que $d(f_x, g_x) \leq c/2$. Definamos ahora la aplicación $g : X \times K \to \mathbb{R}$ por $g(x,k) = g_x(k)$. Claramente

$$|f(x,k) - g(x,k)| \leq c/2 \quad \text{para} \quad (x,k) \in X \times K. \tag{4.15}$$

Tomemos ahora

$$W_n := \{k \in K : |g(a_i, k_n) - g(a_i, k)| < 1/n \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{4.16}$$

Como g_{a_i} es una función continua para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, W_n es un entorno abierto de k_n en K. Por (4.13), existe un punto $(x_n', k_n') \in O_n \times W_n$ tal que

$$|f(x_n, k_n) - f(x_n', k_n')| > r/2 + 1/(3p). \tag{4.17}$$

En caso contrario $\operatorname{osc}(f, (x_n, k_n)) \leq r + 2/(3p)$. Elijamos un conjunto abierto U_n en X tal que $x_n' \in U_n \subset O_n$ y

$$\operatorname{diam} f(U_n, k_n') < b + 1/n. \tag{4.18}$$

Este U_n es la jugada n de β. Como el espacio X es σ-β-desfavorable, la estrategia s para β no es una estrategia ganadora. Por lo tanto existe una jugada ganadora para α contra la estrategia s de β. Sea $(V_0, a_0), (V_1, a_1), \ldots, (V_n, a_n), \ldots$ una jugada de este tipo para α. Entonces la sucesión $(a_n)_n$ tiene un punto de aglomeración $a \in \bigcap_{n=0}^\infty U_n$. Sea (k_∞, k_∞') un punto de aglomeración de la sucesión $(k_n, k_n')_n$.

Como $k_n' \in W_n$ por (4.16) tenemos que

$$|g(a_i, k_n) - g(a_i, k_n')| < 1/n \ \text{ para } \ 0 \leq i < n$$

y entonces, como g_{a_i} es una aplicación continua

$$g(a_i,k_\infty) = g(a_i,k'_\infty) \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Por (4.17)

$$\begin{aligned} r/2+1/(3p) &< |f(x_n,k_n) - f(x'_n,k'_n)| \\ &\leq |f(x_n,k_n) - f(a,k_n)| + |f(a,k_n) - f(a,k'_n)| + |f(a,k'_n) - f(x'_n,k'_n)|. \end{aligned}$$

Como $x_n, a \in O_n$ y $x'_n, a \in U_n$, por (4.14) y (4.18) el primer y tercer término del último miembro de la última desigualdad son menores que $b+1/n$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} r/2+1/(3p) &< |f(a,k_n) - f(a,k'_n)| + 2b + 2/n \\ &\overset{(4.15)}{\leq} |g(a,k_n) - g(a,k'_n)| + c + 2b + 2/n \end{aligned}$$

para cada n. Como g_a es continua, tenemos que

$$r/2+1/(3p) \leq c + 2b + |g(a,k_\infty) - g(a,k'_\infty)|. \tag{4.20}$$

Por nuestra definición de b, existe un entorno abierto G de a en X tal que

$$\operatorname{diam} f(G,k_\infty) < b + 1/(6p) \text{ y } \operatorname{diam} f(G,k'_\infty) < b + 1/(6p). \tag{4.21}$$

Como a es un punto de aglomeración de la sucesión $(a_n)_n$, $a_i \in G$ para algún i. Por lo tanto usando (4.19) y (4.15) se tiene que

$$\begin{aligned} |g(a,k_\infty) - g(a,k'_\infty)| &\overset{(4.19)}{\leq} |g(a,k_\infty) - g(a_i,k_\infty)| + |g(a_i,k'_\infty) - g(a,k'_\infty)| \\ &\overset{(4.15)}{\leq} |f(a,k_\infty) - f(a_i,k_\infty)| + |f(a_i,k'_\infty) - f(a,k'_\infty)| + 2c \\ &\overset{(4.21)}{<} 2c + 2b + 1/(3p). \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdad con (4.20), tenemos que

$$r/2 + 1/(3p) < 3c + 4b + 1/(3p),$$

de donde concluimos que $r < 6c + 8b$, contradiciendo la definición de r. Esto demuestra que A_n es denso para cada n. Sea $D = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como comentamos en la observación 4.4.5, los espacios σ-β-desfavorables son espacios de Baire, y por lo tanto, D es subconjunto G_δ denso X. Por la definición de A_n, está claro que D tiene la propiedad que buscábamos. □

Corolario 4.4.7 ([ACN])**.** *Sean X y K como en el teorema anterior y sea $F : X \to C(K)$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $x \in D$,*

$$\operatorname{osc}(F,x) \leq 8 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(\pi_k \circ F),$$

donde la aplicación $\pi_k : C(K) \to \mathbb{R}$ está dada por $h \rightsquigarrow h(k)$.

Demostración. Aplicando el Teorema 4.4.6 a la aplicación $f : X \times K \to \mathbb{R}$ que está definida por $f(x,k) = F(x)(k)$ obtenemos un subconjunto G_δ denso D de X tal que

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 8 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(\pi_k \circ F)$$

para todo $(y,k) \in D \times K$. La conclusión se consigue aplicando el Lema 4.3.6. □

Corolario 4.4.8 ([ACN])**.** *Sea X un espacio normal σ-β-desfavorable, sea K un espacio compacto y sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k) \in D \times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 6 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 7 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

Demostración. Sea $c = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x)$ y $b = \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k)$. Asumamos que b es finito, ya que en otro caso el resultado es cierto. Por la Observación 1.1.10, para cada $k \in K$, existe $g^k \in C(X)$ tal que $d(f^k, g^k) \leq b/2$. Definamos ahora la aplicación $g : X \times K \to \mathbb{R}$ como $g(x,k) = g^k(x)$. Claramente $|f(x,k) - g(x,k)| \leq b/2$ para $(x,k) \in X \times K$. Esto hace que las oscilaciones de f, f_x, f^k y g, g_x, g^k difieran como mucho b respectivamente. Aplicando el Teorema 4.4.6 a la aplicación g obtenemos que existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(x,k) \in D \times K$,

$$\operatorname{osc}(g,(x,y)) \leq 6 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(g_x) + 8 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(g^k) \leq 6(c+b) + 8 \cdot 0.$$

De aquí se tiene que para dicho (x,k),

$$\operatorname{osc}(f,(x,k)) \leq \operatorname{osc}(g,(x,k)) + b \leq 6(c+b) + b = 6c + 7b.$$

□

Observemos que las hipótesis del corolario previo y el Teorema 4.4.6 son muy similares. La única diferencia es que en el corolario se añade la normalidad de X. Esta hipótesis extra tiene el efecto de mejorar la conclusión ligeramente. Como hemos comentado anteriormente, los espacios métricos completos cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.8. Así que este resultado es una generalización de nuestro Corolario 4.3.8 con mejores estimaciones.

Vamos a introducir ahora otro juego. Sea Y un espacio topológico y sea L un subconjunto denso de $Y \times Y$. El juego $\mathscr{G}(\Delta, L, Y)$ se define como sigue. Primero el jugador α elige un entorno abierto W_0 de la diagonal Δ en $Y \times Y$ y el jugador β elige un punto $(a_0, b_0) \in W_0 \cap L$. En la jugada n, α elige un entorno abierto W_n de Δ y β elige un punto $(a_n, b_n) \in W_n \cap L$. El jugador α gana si para cada entorno W de Δ, $(a_n, b_n) \in W$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$. En el caso $L = Y \times Y$, este juego fue definido y usado por Bouziad [Bou90]. Este juego es una variación del juego definido previamente por Gruenhage [Gru84].

Definición 4.4.9. *Sea Y un espacio topológico y L un subconjunto denso de $Y \times Y$. Se dice que Y es $\mathscr{G}(\Delta, L)$-α-favorable si α tiene una estrategia ganadora en el juego $\mathscr{G}(\Delta, L, Y)$.*

Bouziad [Bou90] probó que los espacios compactos $\mathscr{G}(\Delta,L)$-α-favorables tienen la propiedad $\mathscr{N}^*$. A continuación damos una versión cuantitativa de este hecho.

Teorema 4.4.10 ([ACN]). *Sea X un espacio de Baire y sea K un espacio compacto $\mathscr{G}(\Delta,L)$-α-favorable para algún conjunto denso L de $K\times K$. Supongamos que $f : X\times K\to\mathbb{R}$ es una aplicación tal que $f_x\in C(K)$ para cada $x\in X$. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(x,k)\in D\times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(x,k))\leq 6\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(f^k).$$

Prueba del Teorema. Empezamos aislando la siguiente parte técnica de la prueba como lema para futuros comentarios y uso.

Lema 4.4.11 ([ACN]). *Bajo las hipótesis del Teorema 4.4.10, si tomamos $b=\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(f^k)$ y para algún $r>0$ y $p\in\mathbb{N}$,*

$$A=\{x\in X:\operatorname{osc}(f,(x,k))<r+\frac{1}{p}\quad \textit{para cada}\quad k\in K\}$$

es no denso, entonces existe una sucesión $(k_n,k'_n)_n$ en L y $a\in X$ tales que para cada entorno abierto W de Δ, $(k_n,k'_n)\in W$ para infinitos $n\in\mathbb{N}$ y

$$r/2+1/(3p)<3b+3/n+|f(a,k_n)-f(a,k'_n)|\quad \textit{para todo}\quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Prueba del Lema. Como la oscilación es una aplicación superiormente semicontinua y K es compacto se tiene que A es abierto. Supongamos que $\overline{A}\neq X$. Supongamos ahora que α y β juegan a los juegos $\mathscr{G}(X)$ y $\mathscr{G}(\Delta,L,K)$ simultáneamente. Sea s la estrategia ganadora para α en $\mathscr{G}(\Delta,L,K)$, vamos a definir una estrategia t para β en $\mathscr{G}(X)$ paso a paso.

Sea $U_0=t(\emptyset):=X\setminus\overline{A}$ y sea $(k_0,k'_0)\in W_0\cap L$ la jugada 0 de β en el juego $\mathscr{G}(\Delta,L,K)$, donde $W_0=s(\emptyset)$. Supongamos que estamos en la jugada $(n-1)$. Los movimientos de β en el juego $\mathscr{G}(\Delta,L,K)$ son $(k_0,k'_0),(k_1,k'_1),\dots,(k_{n-1},k'_{n-1})$. En el juego $\mathscr{G}(X)$, α ha jugado $V_0,V_1,\dots,V_{n-1}$. Debemos definir la jugada n de β que será de la forma $U_n=t(V_0,V_1,\dots,V_{n-1})$. Primero elijamos $x_n\in V_{n-1}$. Como $x_n\notin A$, existe $y_n\in K$ tal que

$$\operatorname{osc}(f,(x_n,y_n))\geq r+1/p. \tag{4.23}$$

Por definición de b, existe un conjunto abierto O_n en X tal que $x_n\in O_n\subset V_{n-1}$ y

$$\operatorname{diam} f(O_n,y_n)<b+1/n. \tag{4.24}$$

El conjunto $W_n:=s((k_0,k'_0),(k_1,k'_1),\dots,(k_{n-1},k'_{n-1}))$ es un entorno abierto de Δ. Definamos

$$G_n:=\{y\in K:(y_n,y)\in W_n\}. \tag{4.25}$$

Entonces G_n es un entorno abierto de y_n en K. Por (4.23), existe $(x'_n,y'_n)\in O_n\times G_n$ tal que

$$|f(x_n,y_n)-f(x'_n,y'_n)|>r/2+1/(3p). \tag{4.26}$$

Como $x_n, x'_n \in O_n$, tenemos por (4.24) que

$$|f(x_n,y_n) - f(x'_n,y_n)| < b + 1/n. \tag{4.27}$$

Como $y'_n \in G_n$, por (4.25) $(y_n,y'_n) \in W_n$. Como $W_n \cap L$ es denso en W_n y f es continua en la segunda variable cuando fijamos la primera variable, (4.26) y (4.27) siguen valiendo cuando reemplazamos (y_n,y'_n) por cierto $(k_n,k'_n) \in W_n \cap L$. Por lo tanto tenemos que

$$|f(x_n,k_n) - f(x'_n,k'_n)| > r/2 + 1/(3p) \tag{4.28}$$

y

$$|f(x_n,k_n) - f(x'_n,k_n)| < b + 1/n. \tag{4.29}$$

Tomemos entonces (k_n,k'_n) el movimiento n de β en el juego $\mathscr{G}(\Delta,L,K)$.

Finalmente, existe un conjunto abierto U_n en X tal que $x'_n \in U_n \subset O_n$ y

$$\operatorname{diam} f(U_n,k_n) < b + 1/n \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam} f(U_n,k'_n) < b + 1/n. \tag{4.30}$$

Definamos entonces $t(V_0,V_1,\ldots,V_{n-1}) := U_n$. Esto completa la definición de t. Como X es un espacio de Baire, t no es una estrategia ganadora para β, Proposición 4.4.3. Tomemos entonces $V_0,V_1,\ldots,V_n,\ldots$ una jugada ganadora para α contra la estrategia t de β. En tal caso tenemos que existe un elemento

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n.$$

Por (4.28),

$$\begin{aligned} r/2 + 1/(3p) < |f(x_n,k_n) - f(x'_n,k'_n)| &\le |f(x_n,k_n) - f(x'_n,k_n)| \\ &+ |f(x'_n,k_n) - f(a,k_n)| + |f(a,k_n) - f(a,k'_n)| + |f(a,k'_n) - f(x'_n,k'_n)|. \end{aligned}$$

Usando (4.29) y (4.30) dos veces, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$r/2 + 1/(3p) < 3b + 3/n + |f(a,k_n) - f(a,k'_n)|.$$

Como s es una estrategia ganadora para el juego $\mathscr{G}(\Delta,L,K)$, $(k_n,k'_n) \in W$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Continuación de la prueba del Teorema 4.4.10: Sea $b = \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k)$ y $r = 6b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n := \{x \in X : \operatorname{osc}(f,(x,k)) < r + 1/n \text{ para cada } k \in K\}.$$

Vamos a mostrar por contradicción que A_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para algún p, $\overline{A_p} \neq X$. Entonces, por el Lema 4.4.11, existe una sucesión $(k_n,k'_n)_n$ en L y $a \in X$ tal que para cada entorno W de Δ, $(k_n,k'_n) \in W$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ y

$$r/2 + 1/(3p) < 3b + 3/n + |f(a,k_n) - f(a,k'_n)| \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sea

$$W := \{(k,k') \in K \times K : |f(a,k) - f(a,k')| < 1/(6p)\}.$$

El conjunto W es abierto así que podemos tomar $n > 18p$ con $(k_n, k_n') \in W$. Entonces

$$r/2 + 1/(3p) < 3b + 1/(6p) + 1/(6p) = 3b + 1/(3p)$$

lo que implica que $r < 6b$ contradiciendo la definición de r. Esto prueba que A_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es un espacio de Baire, $D := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ cumple las condiciones del teorema. □

Observación 4.4.12. *En el Lema 4.4.11, si $L = K \times K$, entonces la prueba es más simple, la condición $f_x \in C(K)$ para cada $x \in X$ no es necesaria y la desigualdad* (4.22) *puede mejorarse. Efectivamente, bajo las hipótesis $L = K \times K$, la sucesión (y_n, y_n') puede tomarse igual que (k_n, k_n'). Haciendo esto, la desigualdad* (4.22) *se puede reemplazar por*

$$r/2 + 1/(3p) < 2b + 2/n + |f(a,k_n) - f(a,k_n')|.$$

El siguiente corolario se prueba usando el Teorema 4.4.10 de la misma forma que el Corolario 4.4.7 se obtiene del Teorema 4.4.6.

Corolario 4.4.13 ([ACN])**.** *Sea X un espacio de Baire, sea K un espacio compacto $\mathscr{G}(\Delta, L)$-α-favorable para algún subconjunto denso L de $K \times K$, y sea $F : X \to C(K)$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $x \in D$, $\operatorname{osc}(F,x) \le 6 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(\pi_k \circ F)$.*

Corolario 4.4.14 ([ACN])**.** *Sea X un espacio de Baire, sea K un espacio compacto $\mathscr{G}(\Delta, L)$-α-favorable para algún subconjunto denso L de $K \times K$, y sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k) \in D \times K$ se tiene que*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \le 7 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 6 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

Demostración. Sea $c = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x)$ y $b = \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k)$. De nuevo suponemos que c y b son finitos ya que en caso contrario el resultado es inmediato. Por la Observación 1.1.10, para cada $x \in X$, existe $g_x \in C(K)$ tal que $d(f_x, g_x) \le c/2$. Definamos entonces $g : X \times K \to \mathbb{R}$ como $g(x,k) = g_x(k)$. Entonces $|f(x,y) - g(x,k)| \le c/2$ para cada $(x,k) \in X \times K$. Al igual que en la prueba del Corolario 4.4.8, las oscilaciones de f, f_x, f^k y g, g_x, g^k difieren respectivamente como mucho c. Por el Teorema 4.4.10, existe un subconjunto $\mathscr{G}_\delta$ denso D de X tal que

$$osc(g,(x,k)) \le 6 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(g^k) \le 6(b+c)$$

para cada $(x,k) \in D \times K$. Por lo tanto, para cada $(x,k) \in D \times K$,

$$\operatorname{osc}(f,(x,k)) \le \operatorname{osc}(g,(x,k)) + c \le 6(b+c) + c = 7c + 6b.$$

□

En los siguientes dos resultados consideramos el caso $L = K \times K$. En particular, dichos resultados serán validos cuando K sea un compacto de Corson, véase Corolario 4.4.19. Observemos que las desigualdades obtenidas en estos resultados son mejores que en el caso más general.

Teorema 4.4.15 ([ACN]). *Sea K en espacio compacto $\mathscr{G}(\Delta, K \times K)$-$\alpha$-favorable, sea X un espacio de Baire y sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k) \in D \times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 2 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x) + 4 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k).$$

Demostración. Sea $c = \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(f_x)$, $b = \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(f^k)$ y $r = 2c + 4b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \{x \in X : \operatorname{osc}(f,(x,k)) < r + 1/n \ \text{ para cada } k \in K\}.$$

Veamos por contradicción que A_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para algún p, $\overline{A_p} \neq X$. Entonces, por la Observación 4.4.12 existe una sucesión $(k_n, k_n')_n$ en $K \times K$ y $a \in X$ tales que para cada entorno W de Δ, $(k_n, k_n') \in W$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ y

$$r/2 + 1/(3p) < 2b + 2/n + |f(a,k_n) - f(a,k_n')| \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.31}$$

Para cada $x \in X$, $\operatorname{osc}(f_x) \leq c$ así que por la Observación 1.1.10 existe $g_x \in C(X)$ tal que

$$\|f_x - g_x\|_\infty \leq c/2.$$

Definamos ahora la aplicación $g : X \times K \to \mathbb{R}$ como $g(x,k) = g_x(k)$. Claramente

$$|f(x,k) - g(x,k)| \leq c/2 \quad \text{para} \quad (x,k) \in X \times K.$$

En particular,

$$|f(a,k_n) - f(a,k_n')| \leq c + |g(a,k_n) - g(a,k_n')|. \tag{4.32}$$

Definamos

$$W := \{(k,k') \in K \times K : |g(a,k) - g(a,k')| < 1/(6p)\}.$$

W es abierto así que podemos tomar $n > 12p$ con $(k_n, k_n') \in W$. Entonces por (4.31) y (4.32)

$$r/2 + 1/(3p) < 2b + 1/(6p) + c + |g(a,k_n) - g(a,k_n')| < c + 2b + 1/(3p)$$

lo que implica que $r < 2c + 4b$ contradiciendo la definición de r. Esto prueba que A_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es un espacio de Baire, $D := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ cumple las condiciones del teorema. □

El siguiente corolario se obtiene del previo de la misma forma que el Corolario 4.4.8 se obtiene del Teorema 4.4.6

Corolario 4.4.16 ([ACN]). *Sea K un espacio compacto $\mathscr{G}(\Delta, K\times K)$-$\alpha$-favorable, sea X un espacio normal de Baire y sea $f : X\times K \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces existe un subconjunto G_δ denso D de X tal que para cada $(y,k)\in D\times K$,*

$$\operatorname{osc}(f,(y,k)) \leq 2\sup_{x\in X}\operatorname{osc}(f_x) + 3\sup_{k\in K}\operatorname{osc}(f^k).$$

Sea Γ un conjunto arbitrario. Denotemos

$$\Sigma(\Gamma) := \{x\in[0,1]^\Gamma : \{\gamma\in\Gamma : x(\gamma)\neq 0\} \text{ es numerable}\}.$$

Definición 4.4.17. *Se dice que un espacio compacto K es un compacto de Corson si es homeomorfo a un subconjunto compacto de $\Sigma(\Gamma)$ con la topología inducida por la topología producto de $[0,1]^\Gamma$. Se dice que K es un compacto de Valdivia si es homeomorfo a un subconjunto K' de $[0,1]^\Gamma$ tal que $K'\cap\Sigma(\Gamma)$ es denso en K'.*

Bouziad [Bou90] probó que los compactos de Corson K son $\mathscr{G}(\Delta, K\times K)$-$\alpha$-favorables. Modificando un poco su prueba, se puede demostrar que cada compacto de Valdivia es un espacio $\mathscr{G}(\Delta, L)$-α-favorable para cierto conjunto denso L de $K\times K$.

Lema 4.4.18. *Sea K un espacio compacto y sea L un subconjunto denso de $K\times K$. Supongamos que existe un cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de $K\times K\setminus\Delta$ tal que*

(i) la clausura de cada elemento de $\mathscr{U}$ es disjunto de Δ,

(ii) cada punto de L está contenido en a lo sumo una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$.

Entonces K es $\mathscr{G}(\Delta, L)$-α-favorable.

Demostración. Para cada $(x,y)\in L$, sea $\{U_n(x,y) : n\in\mathbb{N}\}$ una enumeración de todos los elementos de $\mathscr{U}$ que contengan (x,y). Permitimos infinitas repeticiones. Para $(x,y)\in\Delta\cap L$ tomemos $U_n(x,y)=\emptyset$. Una estrategia s para α en el juego $\mathscr{G}(\Delta, L, K)$ se define como sigue: Sea $s(\emptyset)=K\times K$ y en la jugada n, suponiendo que las jugadas de β han sido $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_{n-1},y_{n-1})$ en L, tomamos

$$t((x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_{n-1},y_{n-1})) = (K\times K)\setminus\cup\{\overline{U_i(x_j,y_j)} : 0\leq i,j\leq n-1\}.$$

Veamos que t es una estrategia ganadora. Fijemos (x,y) un punto de aglomeración de la sucesión $(x_n,y_n)_n$. Supongamos que $(x,y)\notin\Delta$. Entonces $(x,y)\in U$ para algún $U\in\mathscr{U}$. Tenemos entonces que $(x_k,y_k)\in U$ par algún k y por lo tanto, para algún p, $U=U_p(x_k,y_k)$. Entonces para todo $n>\text{máx}(k,p)$, $(x_n,y_n)\notin U$. Esto contradice que (x,y) sea un punto de aglomeración de $(x_n,y_n)_n$. Así que $(x,y)\in\Delta$. Por lo tanto si W es un entorno de Δ, entonces $(x_n,y_n)\in W$ para infinitos $n\in\mathbb{N}$. □

Corolario 4.4.19. *Cada espacio compacto de Valdivia K es $\mathscr{G}(\Delta, D\times D)$-$\alpha$-favorable para algún subconjunto denso D de K. Si además K es un compacto de Corson, entonces K es un espacio $\mathscr{G}(\Delta, K\times K)$-$\alpha$-favorable.*

Demostración. Supongamos que $K \subset [0,1]^{\Gamma}$ y que el conjunto $D = K \cap \Sigma(\Gamma)$ es denso en K (tomamos $D = K$ si es un compacto de Corson). Para cada $(\gamma, n) \in (\Gamma, \mathbb{N})$, sea

$$U_{(\gamma,n)} = \{(x,y) \in K \times K : |x(\gamma) - y(\gamma)| > 1/n\}.$$

Se ve de forma inmediata que $\mathscr{U} = \{U_{(\gamma,n)} : (\gamma, n) \in (\Gamma, \mathbb{N})\}$ cumple las condiciones (i) y (ii) del Lema 4.4.18 para $L = D \times D$. Esto concluye la prueba del corolario. □

4.5 Versión cuantitativa del teorema de Rudin sobre continuidad separada

El resultado principal de la Sección 4.3 es el Teorema 4.3.2: es posible dar una demostración de este resultado utilizando el siguiente teorema que es una versión cuantitativa del teorema de Rudin, Corolario 4.5.3. En esta sección presentamos dicha versión cuantitativa del teorema de Rudin y mostramos también cómo se puede obtener la versión cuantitativa del teorema de Srivatsa, Teorema 4.5.4, a través de dicho resultado: obsérvese que la constantes obtenidas son peores.

Teorema 4.5.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, Y un espacio topológico, E un espacio normado $f : X \times Y \to E$ una función tal que*

(i) $\operatorname{osc}(f^y) < \delta$ *para todo* $y \in Y$.
(ii) $\operatorname{osc}(f_x) < \varepsilon$ *para todo* $x \in D$ *con* $D \subset X$ *denso.*

Entonces existe una sucesión de funciones $f_n : X \times Y \to E$ tales que

(i) $\operatorname{osc}(f_n) < \varepsilon$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Para todo $(x,y) \in X \times Y$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\|f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$ (es decir $\|f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$ eventualmente en n).

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $\{h^n_\alpha : \alpha \in A_n\}$ una partición de la unidad localmente finita subordinada a un cubrimiento abierto de X formado por conjuntos abiertos de diámetro menor que $1/n$. Esto podemos hacerlo gracias al Teorema 1.2.11 ya que los espacios métricos son paracompactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in A_n$ elijamos $x^n_\alpha \in D$ tal que $h^n_\alpha(x^n_\alpha) > 0$ y definamos

$$f_n(x,y) := \sum_{\alpha \in A_n} h^n_\alpha(x) f_{x^n_\alpha}(y). \tag{4.33}$$

Fijemos $(x,y) \in X \times Y$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe un entorno U_x de x en X tal que $h^n_\alpha|_{U_x} = 0$ para cada $\alpha \in A_\alpha \backslash B$, con $B \subset A_\alpha$ no vacío y finito. Pongamos $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Para $1 \leq k \leq m$, como $\operatorname{osc}(f_{x^n_{\alpha_k}}) < \varepsilon$, existe un entorno V^k_y de y en Y tal que $\operatorname{diam}(f_{x^n_{\alpha_k}}(V^k_y)) < \varepsilon$. Pongamos

$$V_y = \cap_{k=1}^m V^k_y.$$

Como $h^n_{\alpha_k}$ es continua

$$\lim_{x' \to x} h^n_{\alpha_k}(x') \operatorname{diam}(f_{x^n_{\alpha_k}}(V_y)) = h^n_{\alpha_k}(x) \operatorname{diam}(f_{x^n_{\alpha_k}}(V_y)) < h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon_k$$

para $\operatorname{diam}(f_{x^n_{\alpha_k}}(V_y)) < \varepsilon_k < \varepsilon$, así que eligiendo un entorno más pequeño U_x de x podemos suponer que si $x' \in U_x$ entonces

$$h^n_{\alpha_k}(x')\operatorname{diam}(f_{x^n_{\alpha_k}}(V_y)) < h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon_k < h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon. \tag{4.34}$$

Además, también podemos suponer que dado $\varepsilon_k < \varepsilon'_k < \varepsilon$, se tiene que

$$\operatorname{diam}(h^n_{\alpha_k}(U_x)) < \frac{\varepsilon'_k - \varepsilon_k}{\text{máx}\{\sup_{y'' \in V_y} \| f_{x^n_{\alpha_k}}(y'')\|, 1\}} h^n_{\alpha_k}(x). \tag{4.35}$$

Entonces, para $(x', y') \in U_x \times V_y$ y $(x'', y'') \in U_x \times V_y$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|h^n_{\alpha_k}(x') f_{x^n_{\alpha_k}}(y') - h^n_{\alpha_k}(x'') f_{x^n_{\alpha_k}}(y'')\| \leq \\
&\qquad \leq \|h^n_{\alpha_k}(x') f_{x^n_{\alpha_k}}(y') - h^n_{\alpha_k}(x') f_{x^n_{\alpha_k}}(y'')\| + \|h^n_{\alpha_k}(x') f_{x^n_{\alpha_k}}(y'') - h^n_{\alpha_k}(x'') f_{x^n_{\alpha_k}}(y'')\| \\
&\qquad \leq h^n_{\alpha_k}(x')\operatorname{diam}(f_{x^n_{\alpha_k}}(V_y)) + \| f_{x^n_{\alpha_k}}(y'')\|\operatorname{diam}(h^n_{\alpha_k}(U_x)) \\
&\qquad \overset{(4.34)}{<} h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon_k + \| f_{x^n_{\alpha_k}}(y'')\|\operatorname{diam}(h^n_{\alpha_k}(U_x)) \overset{(4.35)}{<} h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon'_k
\end{aligned}$$

así que

$$\operatorname{diam}((h^n_{\alpha_k} f_{x^n_{\alpha_k}})(U_x \times V_y)) < h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon \text{ para todo } 1 \leq k \leq m.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(f_n(U_x \times V_x)) &\leq \sum_{k=1}^{m} \operatorname{diam}((h^n_{\alpha_k} f_{x^n_{\alpha_k}})(U_x \times V_y)) < \\
&< \sum_{k=1}^{m} h^n_{\alpha_k}(x)\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto que $\operatorname{osc}(f_n) < \varepsilon$.

Ahora vamos a probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\| f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$. Como $\operatorname{osc}(f^y) < \delta$ existe n_0 tal que si $z \in X$ y $d(x,z) < 1/n_0$ entonces $\| f(z,y) - f(x,y)\| < \delta$. Si $n > n_0$ y $\alpha \in A_n$ es un índice tal que $h^n_\alpha(x) > 0$, entonces $d(x^n_\alpha, x) < 1/n_0$. Así que tenemos que $\| f(x^n_\alpha, y) - f(x,y)\| < \delta$ y por lo tanto, por (4.33) tenemos que $\| f_n(x,y) - f(x,y)\| < \delta$. □

Observación 4.5.2. *Obsérvese que la sucesión $(f_n)_n$ construida en la prueba además cumple que $(f_n)^y$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in Y$. Si la función f es acotada, la sucesión construida es además uniformemente acotada.*

Corolario 4.5.3 (Rudin,[Rud81])**.** *Sea (X,d) un espacio métrico, Y un espacio topológico, E un espacio normado y $f : X \times Y \to E$ una función tal que*

(i) f^y es continua para cada $y \in Y$,

(ii) existe $D \subset X$ denso tal que f_x es continua para cada $x \in D$.

Entonces f es una función de la primera clase de Baire.

Vamos a ver ahora que como corolario del Teorema 4.5.1, tal como comentamos al principio de esta sección se puede obtener una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa similar a la que obtuvimos en el Teorema 4.3.2 aunque con peores constantes.

Teorema 4.5.4. *Sea X un espacio métrico, K un espacio compacto y $F : X \to \mathbb{R}^K$ una función. Entonces*

$$d(F, B_1(X, \mathbb{R}^K)) \leq 2 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(\pi_k \circ F) + \frac{5}{2} \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(F(x))$$

donde $\pi_k : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ está definida por $h \rightsquigarrow h(k)$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sup_X \operatorname{osc}(F(x))$ es finito. Tenemos entonces que $F(X) \subset \ell_\infty(K)$, así que por la Observación 4.1.7,

$$d(F, B_1(X, \mathbb{R}^K)) = \frac{1}{2}\, \sigma\text{-frag}_c(F).$$

Por lo tanto es suficiente probar que

$$\sigma\text{-frag}_c(F) \leq 4 \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(\pi_k \circ F) + 5 \sup_{x \in X} \operatorname{osc}(F(x)).$$

Para ello supongamos primero que F es acotada, es decir

$$\sup\{F(x)(k) : (x,k) \in X \times K\} < +\infty$$

y pongamos

$$\begin{array}{rcl} f : X \times K & \to & \mathbb{R} \\ (x,k) & \rightsquigarrow & F(x)(k). \end{array}$$

Elijamos $\delta > \delta' > \sup_{k \in K} \operatorname{osc}(\pi_k \circ F)$ y $\varepsilon > \sup_{x \in X} \{\operatorname{osc}(F(x))\}$. Por el Teorema 4.5.1, existe una sucesión de funciones $f_n : X \times K \to \mathbb{R}$ tal que para todo $(x,k) \in X \times K$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\|f_n(x,k) - f(x,k)\| < \delta'$ y $\operatorname{osc}(f_n) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F es acotada, por la Observación 4.5.2, podemos suponer que la sucesión $(f_n)_n$ es uniformemente acotada. Sea ahora $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de las combinaciones convexas con coeficientes racionales de las funciones $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, $\operatorname{osc}(g_n) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces, como $X \times K$ es normal (véase [Eng77, Thm. 5.1.5 y Thm. 5.1.36]), por el Teorema 1.1.9 existe $h_n : X \times K \to \mathbb{R}$ continua tal que $d(g_n, h_n) < \varepsilon/2$. Por el Corolario 4.3.7, las funciones inducidas

$$\begin{array}{rcl} H_n : X & \to & \mathbb{R}^K \\ x & \rightsquigarrow & (h_n)_x \end{array}$$

son continuas para la norma $\|\cdot\|_\infty$ para $n \in \mathbb{N}$.

Como $\operatorname{osc}(f^k) < \delta'$, por el Teorema 1.1.9 existe $g^k \in C(X)$ tal que $d(f^k, g^k) < \delta'/2$ para todo $k \in K$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} g : X \times K & \to & \mathbb{R} \\ (x,k) & \rightsquigarrow & g^k(x). \end{array}$$

Entonces, $|f(x,k)-g(x,k)|<\delta'/2$ para todo $(x,k)\in X\times K$. Las funciones inducidas

$$\begin{aligned} G: X &\rightarrow \mathbb{R}^K \\ x &\rightsquigarrow g_x \end{aligned}$$

son continuas cuando dotamos a $\mathbb{R}^K$ de la topología producto ya que g es continua en la primera variable. Definamos

$$X_n=\{x\in X: d(G(x),H_n(x))\leq \frac{3}{2}\delta+\frac{5}{2}\varepsilon\}$$

para $n\in\mathbb{N}$.

AFIRMACIÓN.- X_n es un cubrimiento cerrado de X.

Los conjuntos X_n son cerrados ya que las funciones G y H_n son continuas para la topología producto en $\mathbb{R}^K$ así que para probar la AFIRMACIÓN tenemos que probar que para cada $x\in X$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\in X_n$. Fijemos $x\in X$. Las funciones $(f_n)_x: K\rightarrow\mathbb{R}$ son uniformemente acotadas y cumplen que para cada $k\in K$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0$ entonces $|(f_n)_x(k)-f_x(k)|<\delta'$. Por otro lado, $\operatorname{osc}(f_x)<\varepsilon$ y $\operatorname{osc}((f_n)_x)<\varepsilon$ así que por el Teorema 1.1.9 $d(f_x-(f_n)_x,C(K))<\varepsilon$. Aplicando ahora el Teorema 2.7.1 obtenemos que existe una combinación convexa b de $(f_n)_x$ tal que $d(b,f_x)<\delta+2\varepsilon$. Claramente se puede tomar dicha combinación convexa b con coeficientes racionales y por lo tanto existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $b=(g_n)_x$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} d(G(x),H_n(x)) &\leq d(G(x),f_x)+d(f_x,(g_n)_x)+d((g_n)_x,H_n(x))< \\ &< \frac{\delta}{2}+\delta+2\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{3}{2}\delta+\frac{5}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

así que $x\in X_n$ con lo que la AFIRMACIÓN queda probada.
Vamos a ver ahora que $F|_{X_n}$ está $(4\delta+5\varepsilon)$-fragmentada. Fijemos $\xi>0$. Si $\emptyset\neq C\subset X_n$, como H_n es continua, existe un conjunto $V\subset X$ abierto tal que $C\cap V\neq\emptyset$ y $\operatorname{diam}(H_n(C\cap V))\leq\xi$. Si $x\in X_n$ entonces $d(G(x),H_n(x))\leq 3\delta/2+5\varepsilon/2$ pero como $d(G(x),F(x))<\delta/2$ entonces $d(F(x),H_n(x))<2\delta+5\varepsilon/2$ así que

$$\begin{aligned} &d(F(y),F(z))\leq \\ &\quad\leq d(F(y),H_n(y))+d(H_n(y),H_n(z))+d(H_n(z),F(z))<4\delta+5\varepsilon+\xi \end{aligned}$$

para todo $y,z\in V\cap C$. Entonces $\operatorname{diam}(F(V\cap C))\leq 4\delta+5\varepsilon+\xi$. Como esto se puede hacer para todo $\xi>0$ obtenemos que $F|_{X_n}$ está $(4\delta+5\varepsilon)$-fragmentada con lo que terminamos la prueba en el caso F acotada.

Supongamos ahora que F no es acotada. Podemos construir de nuevo $g: X\times K\rightarrow\mathbb{R}$, tal que g^k es continua para todo $k\in K$ y $d(f(x,k),g(x,k))<\delta'/2$ para todo $(x,k)\in X\times K$. Entonces, las funciones parciales $G: X\rightarrow\mathbb{R}^K$ son continuas para la topología producto por lo que tenemos que $Y_n=\{x\in X:\|G(x)\|_\infty\leq n\}$ es cerrado para $n\in\mathbb{N}$. Como $d(f(x,k),g(x,k))<\delta'/2$ para todo $(x,k)\in X\times K$, entonces F es acotada en Y_n para todo $n\in\mathbb{N}$ pero hemos probado que en tal caso $F|_{Y_n}$ está $(4\delta+5\varepsilon)$-σ-fragmentada por conjuntos cerrados. Por lo tanto basta comprobar que la familia de conjuntos $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ cubre X. Si $x \in X$, $d(F(x), G(x)) \leq \delta/2$. Por otro lado $d(F(x), C(K)) < \varepsilon/2$ y como las funciones continuas sobre compactos son acotadas, entonces $G(x)$ es acotada en K por lo que tenemos que $\|G(x)\|_\infty \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 5

Multifunciones y distancias a otros espacios

En la Sección 4.3 hemos demostrado una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa para aplicaciones univaluadas. Pero de hecho, el teorema de Srivatsa es más general: todas las multifunciones de un espacio métrico X en un espacio de Banach E w-superiormente semicontinuas tienen un selector de la primera clase de Baire [Sri93].

El primer objetivo de este capítulo es extender el Corolario 4.3.3 obtenido en la Sección 4.3 al contexto de las multifunciones y por lo tanto obtener una versión cuantitativa del teorema de Srivatsa. Para ello, en la Sección 5.1 introducimos la noción de d-τ-semioscilación para multifunciones $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ donde τ es una topología en Y y d es una métrica en Y. Esta noción tiene las siguientes propiedades cuando la topología asociada a d es más fuerte que τ:

(i) *Si F es una multifunción τ-superiormente semicontinua entonces su d-τ-semioscilación es igual a 0.*

(ii) *Si τ es una topología vectorial en un espacio normado y $F(x)$ es τ-compacto para $x \in X$, entonces F es τ-superiormente semicontinua si, y sólo si, su d-τ-semioscilación vale 0, véase la Proposición 5.1.4.*

(iii) *Si F es univaluada, entonces F es τ-continua si, y sólo si, la d-τ-semioscilación es 0.*

(iv) *Si F es univaluada y τ es la topología inducida por la métrica, entonces la d-τ-semioscilación coincide con la noción usual de semioscilación* $\operatorname{osc}^*(F,x)$.

(v) *Si F es univaluada y (Y,τ) es el espacio bidual de un espacio de Banach con la topología w^* o un espacio de funciones sobre un espacio compacto con la topología τ_p, la d-τ-semioscilación coincide con el supremo de las "oscilaciones puntuales", véase Proposición 5.1.7 y Proposición 5.1.8.*

Por último, la Sección 5.3 la dedicamos al estudio de espacios de funciones medibles $M(\mu,E)$ donde E es un espacio de Banach y (Ω,Σ,μ) es un espacio de probabilidad. El primer objetivo en esta sección es obtener una fórmula para medir distancias a espacios de funciones medibles mediante un índice de medibilidad, Proposición 5.3.3. El resto de la sección está dedicada al estudio de una versión cuantitativa de la propiedad de Bourgain. La propiedad de Bourgain ha sido usada como una herramienta potente en el estudio de la integración de funciones con valores en un espacio de Banach, véase [RS85], [GGMS87], [CMV97] y [CR05] entre otros

5.1 Semioscilación en multifunciones

Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico y $f : X \to Z$ una función. La semioscilación de f en $x \in X$ se puede expresar como el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que existe un entorno U_ε de x tal que $f(U_\varepsilon)$ está contenido en $B(f(x),\varepsilon)$ (la bola de centro $f(x)$ y radio ε). Este hecho nos sirve de inspiración para dar la siguiente definición.

Definición 5.1.1. *Sean X e (Y,τ) espacios topológicos, d una métrica en Y y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Decimos que F tiene d-τ-semioscilación (τ-semioscilación si se sobrentiende quien es d) menor que ε en $x \in X$ si para cada subconjunto τ-abierto $V \subset Y$ tal que*

$$\{z \in Y : d(z,F(x)) \leq \varepsilon\} \subset V,$$

existe un entorno U de x en X tal que $F(U) \subset V$. Denotamos entonces

$$d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = \operatorname{ínf}\{\varepsilon > 0 : F \text{ tiene } \tau\text{-semioscilación en } x \text{ menor que } \varepsilon\}.$$

La d-τ-semioscilación de F se define como

$$d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F) = \sup_{x\in X} \operatorname{osc}^*_\tau(F,x).$$

Denotemos simplemente $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F,x)$ y $\operatorname{osc}^*_\tau(F) = d\text{-}\operatorname{osc}^*_\tau(F)$ cuando se sobrentienda d.

Observación 5.1.2. *Si $(Y,\|\cdot\|)$ es un espacio normado y τ es una topología sobre Y, entonces $\|\cdot\|$-$\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) \leq a$ si, y sólo si, para cada $a' > a$ y para cada subconjunto τ-abierto $V \subset Y$ tal que $F(x) + a'B_{(Y,\|\cdot\|)} \subset V$, existe un entorno U de x tal que $F(U) \subset V$. Esto es inmediato ya que si $b < b'$ entonces*

$$\{z \in Y : d(z,F(x)) \leq b\} \subset F(x) + b'B_{(Y,\|\cdot\|)} \subset \{z \in Y : d(z,F(x)) \leq b'\}.$$

Observemos que si F es una función univaluada (es decir, que los valores que toma son puntos y no conjuntos) y τ_d (la topología asociada a d) es más fuerte que τ, entonces F es τ-continua en x si, y sólo si, $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) = 0$. Si $\tau = \tau_d$ tenemos además que $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x)$ coincide con la noción usual de semioscilación vista en la Sección 1.1.

Cuando F sea una multifunción τ-superiormente semicontinua, tenemos que $\operatorname{osc}^*_\tau(F) = 0$. Con el siguiente ejemplo vamos a ver que la implicación contraria no es cierta en general. La Proposición 5.1.4 nos proporciona casos donde dicha implicación es cierta.

Ejemplo 5.1.3 ([Ang])**.** *Tomemos $X = (C(K),\|\cdot\|_\infty)$ donde K es un espacio compacto y $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo. Sea $(Y,\tau) = (\mathbb{R}^K,\tau_p)$ y definamos $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ como*

$$F(f) := \{f + n : n \in \mathbb{N}\}$$

donde $(f+n)(x) = f(x)+n$. *Esta función no es* τ*-superiormente semicontinua y sin embargo* $\mathrm{osc}^*_\tau(F)=0$.

Por un lado $\mathrm{osc}^*_\tau(F)=0$ ya que

$$F(B(f,\varepsilon)) = F(f)+\varepsilon B_E.$$

Por otro lado, tomemos $f\in C(K)$, $k\in K$ y definamos

$$V := \bigcup_{\mathbb{N}} \{g\in C(K) : g(k)\in (f(k)+n-1/n, f(k)+n+1/n)\}.$$

Es claro que $F(f)\subset V$, V es τ-abierto pero para cada $\varepsilon>0$, $F(B(x,\varepsilon))$ no está contenido en V así que F no es τ-superiormente semicontinua. □

Proposición 5.1.4 ([Ang])**.** *Sea* X *un espacio topológico,* $(Y,\|\cdot\|)$ *un espacio normado,* τ *una topología vectorial sobre* Y *más débil que la topología de la norma y* $F : X\to\mathscr{P}(Y)$ *una multifunción. Si* $\mathrm{osc}^*_\tau(F)=0$ *y* $F(x)$ *es* τ*-compacto para* $x\in X$*, entonces* F *es* τ*-superiormente semicontinua.*

Demostración. Tomemos $x\in X$ y sea $V\subset Y$ un conjunto τ-abierto tal que $F(x)\subset V$. Tenemos que encontrar un entorno $U\subset X$ de x tal que $F(U)\subset V$. Como $F(x)$ es τ-compacto, existe un τ-entorno W de 0 tal que $F(x)+W\subset V$ (véase por ejemplo [KN76, 5.2 (iv)]). Como la topología de la norma es más fuerte que τ, existe $\varepsilon>0$ tal que $\varepsilon B_E\subset W$ y por lo tanto

$$F(x)+\varepsilon B_E\subset V.$$

Por lo tanto, como $\mathrm{osc}^*_\tau(F)=0$, existe un entorno U de x tal que $F(U)\subset V$. □

El siguiente lema se va a usar en la prueba del Lema 5.1.6. Recordemos que si S es un subconjunto de un espacio de Banach E, el polar de S se define como

$$S^\circ = \{f\in E^* : |f(s)|\le 1 \text{ para cada } s\in S\}.$$

Lema 5.1.5 ([Ang])**.** *Sea* G *un espacio normado de dimensión finita y* $0<a<b$*. Entonces existe un conjunto finito* $S\subset B_G$ *tal que*

$$aS^\circ\subset bB_{G^*}.$$

Demostración. Fijemos $\varepsilon>0$ tal que $a/(1-\varepsilon)<b$. Como B_G es un conjunto compacto, existe un conjunto finito $S\subset B_G$ tal que

$$B_G\subset\bigcup_{s\in S} B(s,\varepsilon). \tag{5.1}$$

Sea $z\in aS^\circ$. Entonces $|z(s)|\le a$ para cada $s\in S$. Vamos a probar que $\|z\|<b$. Tomemos $x\in B_G$ tal que $\|z\|=z(x)$. Por (5.1), existe $s\in S$ tal que $\|x-s\|\le\varepsilon$. Entonces

$$\|z\| = z(x)\le |z(s)|+|z(x-s)|\le a+\varepsilon\|z\|$$

así que

$$\|z\|\le\frac{a}{1-\varepsilon}<b.$$

□

Lema 5.1.6 ([Ang]). *Sea E un espacio de Banach y B_{E^*} lo bola del espacio dual E^*. Si $0 < b' < b$ y bB_{E^*} está contenido en un conjunto w^*-abierto V, entonces existe un subconjunto finito S de B_E tal que*

$$b'S^\circ \subset V.$$

Demostración. Sea $V \subset E^*$ un subconjunto w^*-abierto tal que $b \cdot B_{E^*} \subset V$. Podemos ver E^* como un subespacio de $\mathbb{R}^{B_E}$. Entonces, para cada $z \in b \cdot B_{E^*}$ existe un w^*-entorno abierto de z

$$V_z = E^* \bigcap \prod_{y \in B_E} A_y^z \subset V$$

con cada A_y^z abierto en $\mathbb{R}$ y $A_y^z = \mathbb{R}$ para $y \in B_E \setminus T_z$ donde T_z es un subconjunto finito de B_E. Como $b \cdot B_{E^*}$ es w^*-compacto, existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in b \cdot B_{E^*}$ tales que

$$b \cdot B_{E^*} \subset V' := \cup_{i=1}^n V_{z_i} \subset V.$$

Pongamos $T = \cup_{i=1}^n T_{z_i}$. Si $y \in B_E \setminus T$ y $1 \leq i \leq n$, $A_y^{z_i} = \mathbb{R}$ así que

$$V_{z_i} = \left(\prod_{y \in T} A_y^{z_i} \times \prod_{y \in B_E \setminus T} \mathbb{R} \right) \bigcap E^*.$$

Por lo tanto

$$b \cdot B_{E^*} \subset V' = \left(\left(\bigcup_{i=1}^n \prod_{y \in T} A_y^{z_i} \right) \times \prod_{y \in B_E \setminus T} \mathbb{R} \right) \bigcap E^* \subset V. \tag{5.2}$$

Definamos $G = \operatorname{span} T$ y $W = \{ y^* \in E^* : |y^*(y)| \leq b \text{ para } y \in B_G \}$. Si $z \in W$, por el teorema de Hahn-Banach, existe $z' \in b \cdot B_{E^*}$ tal que $z'|_G = z|_G$. Por (5.2), $z' \in V'$ y por lo tanto

$$(z(y))_{y \in T} = (z'(y))_{y \in T} \in \bigcup_{i=1}^n \prod_{y \in T} A_y^{z_i}.$$

Así que $z \in V' \subset V$. Como esto es cierto para todo $z \in W$, tenemos que $W \subset V$. Por el Lema 5.1.5, existe un conjunto finito $S \subset B_G$ tal que si

$$y^* \in E^* \quad \text{y} \quad |y^*(y)| \leq b'$$

para cada $y \in S$, entonces $y^* \in W$. Por lo tanto

$$b'S^\circ \subset W \subset V.$$

$\square$

Proposición 5.1.7 ([Ang]). *Sea X un espacio topológico, E un espacio de Banach, E^{**} el bidual de E y $f : X \to E^{**}$ una función. Entonces, para cada $x \in X$*

$$\operatorname{osc}^*_{w^*}(f, x) = \sup_{y^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}^*(y^* \circ f, x) \tag{5.3}$$

donde w^* denota la topología débil estrella en E^{**}.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x)=0$.

Vamos a probar primero que $\operatorname{osc}^*_{w^*}(f,x) \geq \sup \operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x)$. Claramente podemos suponer que $\operatorname{osc}^*_{w^*}(f,x) < b$ con b finito. Tenemos que probar que

$$\operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x) \leq b$$

para cada $y^* \in B_{E^*}$. Por la Observación 5.1.2, si V es un conjunto w^*-abierto tal que $b \cdot B_{E^{**}} \subset V$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$. Fijemos $\varepsilon > 0$, $y^* \in B_{E^*}$ y pongamos ahora

$$W = \{y^{**} \in E^{**} : |y^{**}(y^*)| < b+\varepsilon\}.$$

W es abierto y $b \cdot B_{E^{**}} \subset W$ así que existe un entorno U' de x tal que $f(U') \subset W$. Esto implica que $y^* \circ f(U') \subset (-b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ por lo que $\operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x) \leq b+\varepsilon$ y como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x) \leq b$.

Veamos ahora la desigualdad opuesta. Si $\sup_{y^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x) = +\infty$ la igualdad (5.3) será trivialmente cierta. Supongamos entonces que $\sup_{y^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x) < b' < b \in \mathbb{R}$. Sea $V \subset E^{**}$ un conjunto w^*-abierto tal que $b \cdot B_{E^{**}} \subset V$. Por el Lema 5.1.6, existe un subconjunto finito S de B_{E^*} tal que

$$b' S^\circ \subset V.$$

Por otro lado, como

$$\sup_{y^* \in B_{E^*}} \operatorname{osc}^*(y^* \circ f,x) < b',$$

para cada $y^* \in S$ existe U_{y^*} un entorno de x en X tal que

$$y^* \circ f(U_{y^*}) \subset (-b', b')$$

y entonces,

$$f\Big(\bigcap_{y^* \in S} U_{y^*}\Big) \subset b' S^\circ \subset V.$$

Con esto hemos probado que $\operatorname{osc}^*_{w^*}(f) \leq b$ con lo que concluimos la demostración. □

La siguiente proposición se prueba con argumentos similares a los usados en la Proposición 5.1.7. En este caso la versión del Lema 5.1.6 que necesitaríamos tendría una prueba más sencilla. Además, en vez de usar dicho lema, podemos usar un resultado conocido de Wallace que dice que si K_i es un espacio compacto de un espacio topológico X_i para $i \in I$ y W es un subconjunto abierto en el espacio producto $\prod_i X_i$ que contiene a $\prod_i K_i$, entonces existen conjuntos abiertos $U_i \subset X_i$ para $i \in I$ tales que $U_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus F$ para algún subconjunto finito F de I y

$$\prod_{i \in I} K_i \subset \prod_{i \in I} U_i \subset W,$$

véase [Eng77, pag. 186].

Proposición 5.1.8 ([Ang])**.** *Sea X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to \mathbb{R}^Y$ una función. Denotemos como es usual la topología producto en $\mathbb{R}^Y$ como τ_p. Entonces, para todo $x \in X$,*

$$\operatorname{osc}^*_{\tau_p}(f,x) = \sup_{y\in Y} \operatorname{osc}^*(\pi_y \circ f, x) \tag{5.4}$$

donde la aplicación $\pi_y : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}$ está definida por $h \rightsquigarrow h(y)$.

Es bien conocido que si X cumple el primer axioma de numerabilidad e Y un espacio topológico, una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es superiormente semicontinua si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n)_n$ que converge hacia algún $x \in X$, si $z_n \in F(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap F(x) \neq \emptyset.$$

La siguiente proposición nos da una caracterización similar para la τ-semioscilación.

Proposición 5.1.9 ([Ang])**.** *Sea X un espacio que cumple el primer axioma de numerabilidad, $x \in X$, (Y,τ) un espacio topológico, d una métrica en Y y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción. Dado $a \geq 0$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) para cada $a' > a$ y para cada sucesión $(x_n)_n$ convergente a $x \in X$, si $z_n \in F(x_n)$ entonces

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \{z \in Y : d(z,F(x)) \leq a'\} \neq \emptyset,$$

(ii) $\operatorname{osc}^*_{\tau}(F,x) \leq a$.

Demostración. (ii)$\Rightarrow$(i) Supongamos que $\operatorname{osc}^*_{\tau}(F) \leq a < a'$. Fijemos una sucesión $(x_n)_n \subset X$ convergente a x. Supongamos que para cada n existe $z_n \in F(x_n)$ tal que

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \{z \in Y : d(z,F(x)) \leq a'\} = \emptyset.$$

Entonces

$$\{z \in Y : d(z,F(x)) \leq a'\} \subset Y \setminus \overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau}.$$

Como $\operatorname{osc}^*_{\tau}(F) < a'$ existe un entorno U de x tal que

$$F(U) \subset Y \setminus \overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau}.$$

Por otro lado, como $(x_n)_n \to x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ y entonces

$$z_n \in F(U) \subset Y \setminus \overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau},$$

lo que es una contradicción.

(i)$\Rightarrow$(ii) Fijemos $a' > a$ y supongamos que para cada sucesión $(x_n)_n$ convergente a $x \in X$ y $z_n \in F(x_n)$,

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \{z \in Y : d(z,F(x)) \leq a'\} \neq \emptyset. \tag{5.5}$$

Supongamos que existe un conjunto τ-abierto $V \subset Y$ tal que

$$\{z \in Y : d(z,F(x)) \leq a'\} \subset V$$

y $F(U) \nsubseteq V$ para cada entorno U de x. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos de x. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n \in U_n$ y $z_n \in F(x_n)$ tales que $z_n \notin V$. Como V es un conjunto τ-abierto obtenemos que

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \{z \in Y : d(z,F(x)) \leq a'\} \subset \overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap V = \emptyset$$

pero esto es imposible por (5.5). Así que $\operatorname{osc}^*_\tau(F,x) \leq a'$. Poder hacer esto para cada $a' > a$, implica que (ii) se satisface. □

Al igual que en la Observación 5.1.2, si Y es un espacio vectorial topológico y d es la métrica asociada a una norma $\|\cdot\|$ podemos cambiar la afirmación (i) en la Proposición 5.1.9 por

(i) para cada sucesión $(x_n)_n$ convergente a $x \in X$, $z_n \in F(x_n)$ y $a' > a$

$$\overline{\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap (F(x) + a' B_{(Y,\|\cdot\|)}) \neq \emptyset.$$

Para terminar esta sección, observemos que si X es un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico, τ_1, τ_2 dos topologías en Y tales que τ_2 es más fuerte que τ_1 y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción, entonces

$$\operatorname{osc}^*_{\tau_1}(F) \leq \operatorname{osc}^*_{\tau_2}(F). \tag{5.6}$$

5.2 Selectores y distancia a $B_1(X,E)$

El siguiente lema se va a usar en el Teorema 5.2.2. Obsérvese que es parecido al Teorema 2.7.1. De hecho para probar el Teorema 2.7.1, en vez de usar el Lema de Pták podríamos haber seguido las ideas de la prueba de este lema combinadas con el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Lema 5.2.1 ([Ang]). *Sea E un espacio de Banach, E^{**} su espacio bidual, A un subconjunto de E^{**} e $y \in E^{**}$. Pongamos $d = \sup\{d(z-y,E), z \in A\}$ y $a = d(y,\overline{A}^{w^*})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $z \in \operatorname{conv}(A)$ con*

$$\|y - z\| < 2d + a + \varepsilon.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y = 0$ y $d,a < +\infty$. Fijemos $\varepsilon > 0$, como $d(y,\overline{A}^{w^*}) = a$, entonces

$$y = 0 \in \overline{A}^{w^*} + (a + \frac{\varepsilon}{4}) B_{E^{**}}. \tag{5.7}$$

Por definición de d, existe una función $h : A \to E$ tal que $\|z - h(z)\| < d + \varepsilon/4$ para cada $z \in A$. Entonces

$$\overline{A}^{w^*} \subset \overline{h(A) + (d + \frac{\varepsilon}{4}) B_{E^{**}}}^{w^*} = \overline{h(A)}^{w^*} + (d + \frac{\varepsilon}{4}) B_{E^{**}}$$

Así por (5.7) se tiene que

$$0 \in \overline{h(A)}^{w^*} + (d+a+\frac{\varepsilon}{2})B_{E^{**}} = \overline{h(A)+(d+a+\frac{\varepsilon}{2})B_E}^{w^*}.$$

Como $0 \in E$ y $h(A)+(d+a+\varepsilon/2)B_E \subset E$, entonces

$$0 \in \overline{h(A)+(d+a+\frac{\varepsilon}{2})B_E}^{w} \subset \overline{\mathrm{conv}(h(A))+(d+a+\frac{\varepsilon}{2})B_E}^{w}.$$

Por el teorema de Hahn-Banach,

$$0 \in \overline{\mathrm{conv}(h(A))+(d+a+\frac{\varepsilon}{2})B_E}^{w} = \overline{\mathrm{conv}(h(A))+(d+a+\frac{\varepsilon}{2})B_E}^{\|\cdot\|}.$$

Por lo tanto existe $h \in \mathrm{conv}(h(A))$ tal que $\|h\| < d+a+3\varepsilon/4$. Si suponemos que $h = \sum_{i=1}^m \lambda_i h(z_i)$ con cada $z_i \in A$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, entonces

$$z = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i \in \mathrm{conv}(A)$$

y claramente $\|z-h\| < d+\varepsilon/4$. En consecuencia

$$\|y-z\| = \|z\| \leq \|h\| + \|h-z\| < d+a+\frac{3\varepsilon}{4}+d+\frac{\varepsilon}{4} = 2d+a+\varepsilon,$$

con lo que concluye la prueba. □

Recordemos que un selector de una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$. Denotamos

$$\mathrm{Sel}(F) = \{f : X \to Y : f \text{ es un selector de } F\}.$$

Recordemos que para $A \subset X$ denotamos

$$F(A) = \bigcup_{a \in A} F(a).$$

Gracias a la Proposición 5.1.7 tenemos que el siguiente teorema es una extensión del Corolario 4.3.3.

Teorema 5.2.2 ([Ang])**.** *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y E^{**} su espacio bidual. Si $F : X \to \mathscr{P}(E^{**})$ es una multifunción entonces*

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq \frac{3}{2}\sup\{\mathrm{osc}(z) : z \in F(X)\} + 2\,\mathrm{osc}^*_{w^*}(F)$$

donde se está considerando $z \in F(X) \subset E^{**}$ como una función definida en (B_{E^*}, w^*).

Demostración. Está claro que podemos suponer que $\sup\{\operatorname{osc}(z) : z \in F(X)\}$ y $\operatorname{osc}^*_{w^*}(F)$ son finitos. Pongamos $a > a' > \operatorname{osc}^*_{w^*}(F)$ y $d > \sup\{\operatorname{osc}(z) : z \in F(X)\}$. Como X es un espacio métrico, existe una base de la topología σ-discreta $\mathscr{U} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n$ con cada $\mathscr{U}_n$ discreto. Para cada $U \in \mathscr{U}$ fijemos $x_U \in U$ y $z_U \in F(x_U)$. Para $n \in \mathbb{N}$, definamos la función $f_n : \cup\,\mathscr{U}_n \to E^{**}$ como

$$f_n(x) = z_U \quad \text{si } x \in U \in \mathscr{U}_n.$$

Pongamos $M_x := \{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \text{ está definida}\}$ para $x \in X$. Por construcción, existe una sucesión $(x_m)_m$ convergente a x y $z_m \in F(x_m)$ para $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$(z_m)_m \subset \{f_n(x) : n \in M_x\}.$$

Entonces, por la Proposición 5.1.9

$$\overline{\{f_n(x) : n \in M_x\}}^{w^*} \cap \Big(F(x) + a' B_{E^{**}}\Big) \neq \emptyset. \tag{5.8}$$

Por el Teorema 1.1.9 combinado con la Proposición 3.1.3, $d(z,E) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(z)$ para todo $z \in E^{**}$. Así que para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $y_U \in E$ tal que $\|y_U - z_U\| < d/2$. Pongamos

$$j_n(x) = y_U \quad \text{si } x \in U \in \mathscr{U}_n \text{ y } n \in M_x.$$

Tenemos que $\|j_n(x) - f_n(x)\| < d/2$ para todo $x \in X$ y $n \in M_x$ así que

$$\begin{aligned}\overline{\{f_n(x) : n \in M_x\}}^{w^*} &\subset \overline{\{j_n(x) : n \in M_x\} + \frac{d}{2} B_{E^{**}}}^{w^*} \\ &= \overline{\{j_n(x) : n \in M_x\}}^{w^*} + \frac{d}{2} B_{E^{**}}.\end{aligned}$$

Por (5.8) tenemos que

$$\left(\overline{\{j_n(x) : n \in M_x\}}^{w^*} + \frac{d}{2} B_{E^{**}}\right) \cap \Big(F(x) + a' B_{E^{**}}\Big) \neq \emptyset$$

y entonces

$$\overline{\{j_n(x) : n \in M_x\}}^{w^*} \cap \left(F(x) + (\frac{d}{2} + a') B_{E^{**}}\right) \neq \emptyset.$$

Por otro lado para todo $n \in M_x$ y $z \in F(x)$, $\operatorname{osc}(j_n(x) - z) \le d$ así que combinando el Teorema 1.1.9 con la Proposición 3.1.3

$$d(j_n(x) - z, E) \le d/2.$$

Ahora el Lema 5.2.1 nos permite asegurar la existencia de algún $k \in \operatorname{conv}\{j_n(x) : n \in M_x\}$ tal que

$$k \in F(x) + \left(\frac{3d}{2} + a\right) B_{E^{**}}.$$

Evidentemente podemos tomar k como una combinación convexa con coeficientes racionales. Sea $\{g_m : m \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de las combinaciones convexas finitas con coeficientes racionales de $(j_n)_n$. Por lo que hemos probado ahora, para cada $x \in X$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g_m(x)$ está definida y

$$g_m(x) \in F(x) + \left(\frac{3d}{2} + a\right) B_{E^{**}}.$$

Definamos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$A_m := \{x \in X : g_m(x) \text{ está definida y } g_m(x) \in F(x) + (3d/2 + a)B_{E^{**}}\}.$$

Entonces $\cup_{m\in\mathbb{N}} A_m = X$. Por construcción, existe $\mathscr{V}_m$ una familia discreta de conjuntos abiertos tal que $\cup\mathscr{V}_m = \operatorname{dom}(g_m)$ y tal que g_m es constante en V para todo $V \in \mathscr{V}_m$. Como X es un espacio métrico, los conjuntos abiertos son conjuntos $\mathscr{F}_\sigma$ y por lo tanto como las familias discretas son discretamente σ-descomponibles tenemos que g_m es constante en los conjuntos de una buena partición de $\operatorname{dom}(g_m)$. Denotemos g_m^V el valor constante de g_m en V. Entonces

$$A_m = \bigcup_{V\in\mathscr{V}_m} \Big(V \cap \{x \in X : g_m^V \in F(x) + (3d/2 + a)B_{E^{**}}\}\Big).$$

Si definimos ahora

$$B_m := \bigcup_{V\in\mathscr{V}_m} \Big(V \cap \overline{\{x \in X : g_m^V \in F(x) + (3d/2 + a)B_{E^{**}}\}}\Big),$$

como la familia $\mathscr{V}_m$ es discreta, por el Lema 1.2.2 tenemos que B_m es la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado. Por lo tanto B_m es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ y $\mathscr{G}_\delta$. Como $A_m \subset B_m$, entonces $\cup_{m\in\mathbb{N}} B_m = X$. Definamos $h : X \to E$ como

$$h(x) = g_m(x) \quad \text{if } x \in C_m = B_m \setminus \cup_{k<m} B_k.$$

Dado que cada B_m es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ y $\mathscr{G}_\delta$, tenemos que cada C_m es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ así que por la Proposición 1.5.2 (iii), la familia $\{C_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición. Como g_m es constante en los conjuntos de una buena partición de $\operatorname{dom}(g_m) \supset C_m$, por la Proposición 1.5.2 (ii) tenemos que h es constante en los conjuntos de una buena partición de X. Por la Proposición 4.1.4, $h \in B_1(X, E)$.

Vamos a probar ahora que $d(h, \operatorname{Sel} F) \leq 3d/2 + 2a$. Para ello, es suficiente con probar que $h(x) \in F(x) + (3d/2 + 2a)B_{E^{**}}$. Por la definición de h y B_m sólo tenemos que probar que si

$$x' \in \overline{\{x \in X : g_m^V \in F(x) + (3d/2 + a)B_{E^{**}}\}}, \tag{5.9}$$

entonces

$$g_m^V \in F(x') + (3d/2 + 2a)B_{E^{**}}.$$

Para ello razonemos por contradicción. Supongamos que lo anterior es falso. Entonces,

$$F(x') + aB_{E^{**}} \subset E^{**} \setminus B(g_m^V, 3d/2 + a).$$

Como $a > \operatorname{osc}^*_{w^*}(F)$ y $B(g_m^V, 3d/2+a)$ es w^*-cerrado, existe un entorno W de x' tal que

$$F(W) \subset E^{**} \setminus B(g_m^V, 3d/2+a). \tag{5.10}$$

Por otro lado, por (5.9), existe $x \in W$ tal que

$$g_m^V \in F(x) + (3d/2+a)B_{E^{**}} \subset F(W) + (3d/2+a)B_{E^{**}}.$$

Por lo tanto $F(W) \cap B(g_m^V, 3d/2+a) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción con (5.10), y así termina la prueba. □

Corolario 5.2.3 ([Ang]). *Sea X un espacio métrico y E un espacio de Banach. Si $F: X \to \mathscr{P}(E)$ es una multifunción entonces*

$$d(\operatorname{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\operatorname{osc}^*_w(F).$$

Demostración. Es fácil comprobar que si consideramos la topología w^* en el espacio bidual entonces $\operatorname{osc}^*_{w^*}(F) \leq \operatorname{osc}^*_w(F)$ así que por el Teorema 5.2.2

$$d(\operatorname{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\operatorname{osc}^*_{w^*}(F) \leq 2\operatorname{osc}^*_w(F).$$

□

En el siguiente teorema, $\tau = \sigma(E,B)$ es la topología de convergencia puntual sobre B donde $B \subset B_{E^*}$ es una frontera (es decir, para cada $x \in E$ existe $b \in B$ tal que $x(b) = \|x\|$) tal que los conjuntos acotados $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos. Esto ocurre por ejemplo para B el conjunto de los puntos extremales de la bola dual (véase [BT80]), para cualquier frontera B cuando $E = C(K)$ para algún conjunto compacto K (véase [CG98]) o para cualquier frontera cuando (B_{E^*}, w^*) es angélico (véase [CV95]).

Observemos que τ es más débil w, por lo tanto, por (5.6)

$$\operatorname{osc}^*_\tau(F) \leq \operatorname{osc}^*_w(F)$$

así que el siguiente resultado es más fuerte que el Corolario 5.2.3. Para la prueba usamos ideas de [JOPV93]

Teorema 5.2.4 ([Ang]). *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y $\tau = \sigma(E,B)$ donde $B \subset B_{E^*}$ es una frontera tal que los conjuntos acotados $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos. Si $F: X \to \mathscr{P}(E)$ es una multifunción entonces*

$$d(\operatorname{Sel}(F), B_1(X,E)) \leq 2\operatorname{osc}^*_\tau(F).$$

Demostración. Podemos suponer que $\operatorname{osc}^*_\tau(F) < a' < a$ con a finito.

Caso (I): Supongamos que existe $M > 0$ tal que $F(x) \cap MB_E \neq \emptyset$ para $x \in X$. Como X es un espacio métrico, existe una base de la topología σ-discreta $\mathscr{U} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ con cada $\mathscr{U}_n$ discreto.

Para cada $U \in \mathscr{U}$ fijemos $x_U \in U$ y $z_U \in F(x_U) \cap MB_E$. Definamos la aplicación $f_n : \cup \mathscr{U}_n \to E$ como

$$f_n(x) := z_U \quad \text{si } x \in U \in \mathscr{U}_n.$$

Si $M_x := \{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \text{ está definido}\}$, por construcción, existe una sucesión $(x_m)_m$ convergente a x y $z_m \in F(x_m)$ para $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(z_m)_m \subset \{f_n(x) : n \in M_x\}.$$

Entonces, por la Proposición 5.1.9, para cada subsucesión $(z_{m_k})_k$ de $(z_m)_m$

$$\overline{\{z_{m_k} : k \in \mathbb{N}\}}^{\tau} \cap \Big(F(x) + a'B_E\Big) \neq \emptyset. \tag{5.11}$$

Supongamos que

$$\overline{\{f_n(x) : n \in M_x\}}^{w} \cap (F(x) + a'B_E) = \emptyset. \tag{5.12}$$

Entonces $\{z_{m_k} : k \in \mathbb{N}\} \cap (F(x) + a'B_E) = \emptyset$ para cada sucesión $(z_{m_k})_k$ de $(z_m)_m$. Por (5.11) cada subsucesión $(z_{m_k})_k$ tiene un punto de τ-aglomeración en $F(x) + a'B_E$. Por lo tanto $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto relativamente τ-numerablemente compacto y acotado así que por hipótesis es débilmente relativamente compacto. Tenemos entonces que

$$\overline{\{z_m : m \in \mathbb{N}\}}^{\tau} = \overline{\{z_m : m \in \mathbb{N}\}}^{w} \subset \overline{\{f_n(x) : n \in M_x\}}^{w},$$

lo que es imposible por (5.11) y (5.12). Hemos probado que

$$\overline{\{f_n(x) : n \in M_x\}}^{w} \cap (F(x) + a'B_E) \neq \emptyset.$$

Por el Lema 5.2.1, existe $k \in \operatorname{conv}\{f_n(x) : n \in M_x\}$ tal que

$$k \in F(x) + aB_E.$$

Ahora podemos proceder como en la demostración del Teorema 5.2.2 para probar que existe una función $h : X \to E$ que es constante en los conjuntos de una buena partición de X tal que $d(h, \operatorname{Sel}(F)) \leq 2a$ y por lo tanto, por la Proposición 4.1.4 termina la demostración en este caso.

Caso (II): El caso general. Definamos

$$T_n = \overline{\{x \in X : F(x) \cap nB_E \neq \emptyset\}}.$$

Tomemos $x' \in T_n$. Afirmamos que

$$F(x') \cap (n+a)B_E \neq \emptyset.$$

Por contradicción supongamos que esto es falso. Entonces $F(x') + aB_E \subset E \backslash nB_E$. Por tanto existe un entorno U de x' tal que $F(U) \subset E \backslash nB_E$. Como $x' \in T_n$, existe $x \in U$ tal que $F(x) \cap nB_E \neq \emptyset$, lo que es una contradicción, con lo que deducimos que $F(x') \cap (n+a)B_E \neq \emptyset$. La sucesión $H_1 = T_1$, $H_n = T_n \backslash T_{n-1}$ para $n \geq 2$ es una buena partición de X por la Proposición 1.5.2 (iii). Por el *Caso (I)* para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función $h_n : T_n \to E$ que es constante en los conjuntos de una buena partición de H_n y $d(h, \mathrm{Sel}(F|_{H_n})) \le 2a$. Ahora podemos definir $h : X \to E$ como

$$h(x) = h_n(x) \quad \text{si} \quad x \in H_n.$$

Por la Proposición 1.5.2 (iii), h es constante en los conjuntos de una buena partición de X y claramente $d(h, \mathrm{Sel}(F)) \le 2a$. □

El Teorema 5.2.2 y el Corolario 5.2.3 nos dice que si $F : X \to \mathscr{P}(E)$ es una multifunción de un espacio métrico a un espacio de Banach tal que $\mathrm{osc}^*_w(F) = 0$ u $\mathrm{osc}^*_{w^*}(F) = 0$ entonces

$$d(\mathrm{Sel}(F), B_1(X,E)) = 0;$$

sin embargo no sabemos si F tiene un selector de la primera clase de Baire. Como ya hemos comentado, Srivatsa demuestra en [Sri93] que si F es w-superiormente semicontinua entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire. En el Teorema 5.2.6 probamos que si F sólo cumple que $\mathrm{osc}^*_w(F) = 0$ pero añadimos que F tome valores cerrados entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire. Para ello necesitamos el lema siguiente.

Lema 5.2.5 ([Ang])**.** *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y E^{**} su espacio bidual. Sea $F : X \to \mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(E^{**})$ una multifunción tal que $\mathrm{osc}^*_{w^*}(F) = 0$, sea $h : X \to E$ una función que es constante en los conjuntos de una buena partición de X y sea $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B(h(x), \varepsilon) \cap F(x) \neq \emptyset$$

para $x \in X$. Si $\delta > 0$, entonces existe una función $h' : X \to E$ que es constante en los conjuntos de una buena partición tal que

(i) $\|h(x) - h'(x)\| \le \varepsilon$ *para todo $x \in X$, y*
(ii) $B(h'(x), \delta) \cap F(x) \neq \emptyset$.

Demostración. Por hipótesis, existe una buena partición $\{X_i : i \in I\}$ tal que $h|_{X_i}$ es constante para cada $i \in I$. Por la Proposición 1.5.2 (ii) es suficiente con construir h' en cada X_i de forma independiente así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que h toma el valor constante c en todo el espacio X.

Como X es un espacio métrico, hay una base de la topología σ-discreta $\mathscr{U} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ con cada $\mathscr{U}_n$ discreto. Para cada $U \in \mathscr{U}$ fijemos

$$x_U \in U \text{ y } z_U \in F(x_U) \cap B(c, \varepsilon).$$

Como $\mathscr{U}_n$ es una familia discreta, podemos definir la función $f_n : \cup \mathscr{U}_n \to E^{**}$ como

$$f_n(x) := z_U \quad \text{si } x \in U \in \mathscr{U}_n.$$

Pongamos $M_x = \{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \text{ está definida}\}$ para $x \in X$. Por construcción, existe una sucesión $(x_m)_m$ convergente a x y $z_m \in f(x_m)$ para $m \in \mathbb{N}$ tales que la sucesión $(z_m)_m \subset \{f_n(x) : n \in M_x\}$. Entonces por la Proposición 5.1.9

$$\overline{\{f_n(x) : n \in M_x\}}^{w^*} \cap (F(x) + \frac{\delta}{3} B_{E^{**}}) \neq \emptyset.$$

Por el Lema 5.2.1, existe $k \in \operatorname{conv}\{f_n(x)\}_n$, una combinación convexa con coeficientes racionales, tal que

$$k \in F(x) + \frac{2\delta}{3} B_{E^{**}}.$$

Sea $\{g_m : m \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de la combinaciones convexas finitas con coeficientes racionales de $(f_n)_n$. Por lo que acabamos de ver, para cada $x \in X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g_m(x)$ está definida y $g_m(x) \in F(x) + \frac{2\delta}{3} B_{E^{**}}$. Definamos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$A_m = \{x \in X : g_m(x) \text{ está definida y } g_m(x) \in F(x) + \frac{2\delta}{3} B_{E^{**}}\}.$$

Entonces $\cup_{m \in \mathbb{N}} A_m = X$. Sea $\mathscr{V}_m$ una familia discreta de conjuntos abiertos tales que g_m es constante en V para todo $V \in \mathscr{V}_m$ y tal que $\cup \mathscr{V}_m = \operatorname{dom}(g_m)$. Como X es un espacio métrico, los conjuntos abiertos son conjuntos $\mathscr{F}_\sigma$ así que g_m es constante en los conjuntos de una buena partición. Denotemos por g_m^V el valor constante de g_m en V. Entonces

$$A_m = \bigcup_{V \in \mathscr{V}_m} \left(V \cap \{x \in X : g_m^V \in F(x) + \frac{2\delta}{3} B_{E^{**}}\} \right).$$

Si definimos ahora

$$B_m = \bigcup_{V \in \mathscr{V}_m} \left(V \cap \overline{\left\{ x \in X : g_m^V \in F(x) + \frac{2\delta}{3} B_{E^{**}} \right\}} \right),$$

como la familia $\mathscr{V}_m$ es discreta tenemos que B_m es la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado y por lo tanto B_m es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ y $\mathscr{G}_\delta$. Además, como $A_m \subset B_m$, entonces $\cup_{m \in \mathbb{N}} B_m = X$. Definamos $h' : X \to E$ como

$$h'(x) := g_m(x) \quad \text{si } x \in C_m = B_m \setminus \cup_{k<m} B_k.$$

Cada C_m es un conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ así que por la Proposición 1.5.2 (iii), $\{C_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición. Cada g_m es constante en los conjuntos de una buena partición de C_m así que por la Proposición 1.5.2 (ii), h' es constante en los conjuntos de una buena partición. Por construcción está claro que $\|h'(x) - h(x)\| \leq \varepsilon$. Tenemos que probar ahora que $h'(x) \in F(x) + \delta B_{E^{**}}$. Por definición de h' y B_m sólo tenemos que probar que si

$$x' \in \overline{\left\{ x \in X : g_m^V \in F(x) + \frac{2\delta}{3} B_{E^{**}} \right\}}, \tag{5.13}$$

entonces

$$g_m^V \in F(x') + \delta B_{E^{**}}.$$

Supongamos que esto es falso. Entonces

$$F(x') + \frac{\delta}{3} B_{E^{**}} \subset E^{**} \setminus B(g_m^V, \frac{2\delta}{3})$$

pero como $\operatorname{osc}^*_{w^*}(F)=0$ y $B(g_m^V,\frac{2\delta}{3})$ es w^*-cerrado, existe un entorno W de x' tal que

$$F(W)\subset E^{**}\backslash B(g_m^V,\frac{2\delta}{3}). \tag{5.14}$$

Por otro lado, por (5.13), existe $x\in W$ tal que

$$g_m^V\in F(x)+\frac{2\delta}{3}B_{E^{**}}\subset F(W)+\frac{2\delta}{3}B_{E^{**}}$$

así que $F(W)\cap B(g_m^V,\frac{2\delta}{3})\neq\emptyset$, una contradicción con (5.14). □

Teorema 5.2.6 ([Ang])**.** *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y E^{**} su espacio bidual. Sea $F:X\to\mathscr{P}(E)\subset\mathscr{P}(E^{**})$ una multifunción con $\operatorname{osc}^*_{w^*}(F)=0$. Si $F(x)$ es cerrado para todo $x\in X$, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire.*

Demostración. Por el Teorema 5.2.2 existe una aplicación h_1 de la primera clase de Baire tal que

$$B(h_1(x),1)\cap F(x)\neq\emptyset$$

para todo $x\in X$. Si seguimos la demostración del Teorema 5.2.2 vemos que podemos suponer que h_1 es constante en los conjuntos de una buena partición de X. Aplicando ahora el Lema 5.2.5 podemos construir por inducción una sucesión $(h_n)_n$ de aplicaciones de la primera clase de Baire que satisface

(i) $\|h_n(x)-h_{n+1}(x)\|\leq 1/2^n$ para todo $x\in X$ y
(ii) $B(h_n(x),1/2^n)\cap F(x)\neq\emptyset$.

Definamos $f:X\to E$ como $f(x)=\lim_n h_n(x)$. Como $F(x)$ es cerrado para cada x, tendremos por (ii) que $f(x)\in F(x)$. Por (i) f es el límite uniforme de $(h_n)_n$ y por lo tanto, por la Proposición 4.0.1, f es de la primera clase de Baire. □

Corolario 5.2.7. *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y E^{**} su espacio bidual. Sea $F:X\to\mathscr{P}(E)$ una multifunción con $\operatorname{osc}^*_w(F)=0$. Si $F(x)$ es cerrado para todo $x\in X$, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire.*

El siguiente corolario se obtiene adaptando las pruebas del Lema 5.2.5 y el Teorema 5.2.6 de la misma forma que se prueba el Teorema 5.2.4 adaptando la prueba del Teorema 5.2.2.

Corolario 5.2.8. *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach y $\tau=\sigma(E,B)$ donde $B\subset B_{E^*}$ es una frontera tal que los conjuntos acotados $\sigma(X,B)$-relativamente numerablemente compactos son w-relativamente compactos. Sea $F:X\to\mathscr{P}(E)$ una multifunción con $\operatorname{osc}^*_\tau(F)=0$. Si $F(x)$ es cerrado para todo $x\in X$, entonces F tiene un selector de la primera clase de Baire.*

5.3 Distancia a espacios de funciones medibles

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de probabilidad completo y sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Denotemos por $M(\mu,E)$ al espacio de funciones medibles de Ω en E (o simplemente $M(\mu)$ si $E=\mathbb{R}$). El primer objetivo de esta sección es obtener una fórmula que nos permita medir distancias a espacios de funciones medibles. Denotemos

$$\Sigma^+=\{B\in\Sigma:\mu(B)>0\}$$

y para $A\in\Sigma$

$$\Sigma_A^+=\{B\in\Sigma^+:B\subset A\}.$$

La siguiente proposición en la que se caracteriza la medibilidad de una función nos sirve para motivación de lo que sigue.

Proposición 5.3.1. *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de probabilidad completo, $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f\in E^\Omega$. Son equivalentes*

(i) f es medible,

(ii) para cada $\varepsilon>0$ y para cada $A\in\Sigma^+$ existe $B\in\Sigma_A^+$ tal que $\operatorname{diam} f(B)\leq\varepsilon$.

Demostración. Sale directamente de la Proposición 5.3.3. □

Basándonos en la proposición anterior introducimos la siguiente definición.

Definición 5.3.2. *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de probabilidad completo, $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f\in E^\Omega$. Definimos el índice de medibilidad de f como*

$$\operatorname{meas}(f):=\operatorname{ínf}\{\varepsilon>0:\ \textit{para todo } A\in\Sigma^+ \textit{ existe } B\in\Sigma_A^+ \textit{ tal que } \operatorname{diam} f(B)\leq\varepsilon\},$$

donde por definición $\operatorname{ínf}\emptyset=+\infty$.

Obsérvese que en estos términos, la Proposición 5.3.1 nos dice que f es medible si, y sólo si, $\operatorname{meas}(f)=0$. De hecho $\operatorname{meas}(f)$ nos va a servir para estudiar la distancia $d(f,M(\mu,E))$.

Proposición 5.3.3 ([ACR]). *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de probabilidad completo, $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f\in E^\Omega$. Entonces*

$$\frac{1}{2}\operatorname{meas}(f)\leq d(f,M(\mu,E))\leq\operatorname{meas}(f).$$

Además si $E=\mathbb{R}$ se tiene que

$$d(f,M(\mu))=\frac{1}{2}\operatorname{meas}(f).$$

Demostración. Para ver la primera desigualdad podemos suponer que $d(f,M(\mu,E))$ es finita. Tenemos que ver que cada vez que $\varepsilon>d(f,M(\mu,E))$ se tiene que $\operatorname{meas}(f)\leq 2\varepsilon$. Tomemos $g\in M(\mu,E)$ tal que $d(f,g)\leq\varepsilon$. Fijemos $A\in\Sigma^+$ y $\eta>0$. Como g es medible, existe una sucesión

$g_n : \Omega \to X$ de funciones simples tal que $\lim_n g_n = g$ μ-para casi todo punto. Por el teorema de Egorov, ([Din67, Theorem 1, p. 94]), existe $E \in \Sigma$ con $\mu(\Omega \setminus E) < \mu(A)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\|g_n(\omega) - g(\omega)\| \leq \eta$ para cada $\omega \in E$. Entonces $E \cap A \in \Sigma^+$. Como g_n es una función simple, existe $B \in \Sigma^+$ contenido en $E \cap A$ tal que $g_n|_B$ es constante. Por lo tanto $\operatorname{diam}(g(B)) \leq 2\eta$ así que $\operatorname{diam}(f(B)) \leq 2\varepsilon + 2\eta$. Esto prueba que $\operatorname{meas}(f) \leq 2\varepsilon + 2\eta$. Como $\varepsilon > d(f, M(\mu, X))$ y $\eta > 0$ eran arbitrarios, obtenemos que $\operatorname{meas}(f) \leq 2 \cdot d(f, M(\mu, X))$.

Veamos ahora la segunda desigualdad. Podemos suponer que $\operatorname{meas}(f) < +\infty$ ya que en caso contrario el resultado sería inmediato. Basta con ver que si $\operatorname{meas}(f) < \varepsilon$, existe $g \in M(\mu, X)$ con $d(f, g) \leq \varepsilon$.

AFIRMACIÓN.-Existe una sucesión $(B_n)_n$ de elementos de $\Sigma^+ \cup \{\emptyset\}$ tal que

$$\mu(\Omega \setminus \bigcup_n B_n) = 0 \textit{ y } \operatorname{diam} f(B_n) \leq \varepsilon \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\operatorname{meas}(f) < \varepsilon$, existe $D \in \Sigma^+$ tal que $\operatorname{diam} f(D) \leq \varepsilon$. Tenemos por lo tanto que el conjunto

$$\mathscr{F} := \left\{ \{A_i : i \in F\} : A_i \in \Sigma^+, \operatorname{diam} f(A_i) \leq \varepsilon \text{ para } i \in F \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \right\}$$

es no vacío. Dotemos a $\mathscr{F}$ del orden dado por la inclusión, es decir, $C \preceq D$ por definición si $C \subset D$. Estamos en las condiciones del lema de Zorn por lo que $(\mathscr{F}, \preceq)$ tiene un elemento maximal. Obsérvese que si $\{A_i : i \in F\} \in \mathscr{F}$ entonces F es necesariamente numerable ya que

$$\sum_{i \in F} \mu(A_i) \leq \mu(\Omega) < +\infty.$$

Sea $\{B_n : n \in F\}$ con $F \subset \mathbb{N}$ maximal y tomemos $B_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N} \setminus F$. Veamos que $(B_n)_n$ es la sucesión deseada. En caso contrario, tenemos que

$$\mu(\Omega \setminus \bigcup_n B_n) > 0.$$

Usando que $\operatorname{meas}(f) < \varepsilon$ obtenemos que existe $B \subset \Omega \setminus \cup_n B_n$ tal que $\operatorname{diam} f(B) \leq \varepsilon$. Pero en tal caso tenemos que

$$\{B_n : n \in F\} \cup \{B\} \in \mathscr{F}$$

lo que contradice que $\{B_n : n \in F\}$ sea un elemento maximal de $\mathscr{F}$ y con esto termina la prueba de la AFIRMACIÓN.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $B_n \neq \emptyset$ tomemos $x_n \in f(B_n)$. Definamos $g \in M(\mu, X)$ como $g(t) = x_n$ si $t \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $g(t) = f(t)$ en caso contrario. Claramente tenemos que $d(f, g) \leq \varepsilon$ con lo que termina la prueba de la segunda desigualdad.

Por último, en el caso $E = \mathbb{R}$, para demostrar que

$$d(f, M(\mu, E)) \leq \frac{1}{2} \operatorname{meas}(f)$$

basta con repetir el argumento anterior con una pequeña diferencia. En esta ocasión x_n se definirá como el punto medio de $\operatorname{conv} f(B_n)$. Así se obtendría que la función g obtenida cumple que $d(f, g) \leq \varepsilon/2$ lo que concluye la prueba en este caso. $\square$

Observación 5.3.4. *De forma análoga a como pasaba en la Observación 4.1.7, si E tiene la propiedad de que para todo conjunto acotado $H \subset E$ existe $x \in E$ tal que*

$$H \subset B(x, \operatorname{diam}(H)/2).$$

entonces podemos afirmar que

$$d(f, M(\mu, E)) = \frac{1}{2} \operatorname{meas}(f).$$

El siguiente ejemplo nos muestra que la desigualdad $d(f, M(\mu, E)) \leq \operatorname{meas}(f)$ obtenida en la Proposición 5.3.3 es óptima.

Ejemplo 5.3.5. *Sea μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y sea $\{e_t : t \in [0,1]\}$ la base canónica de $E = c_0([0,1])$. Entonces la función $f : [0,1] \to E$ dada por $f(t) = e_t$ cumple que*

$$d(f, M(\mu, E)) = \operatorname{meas}(f) = 1.$$

Veamos que esto es así. Se tiene que $\operatorname{meas}(f) = 1$ ya que de hecho es inmediato que $\operatorname{diam} f(B) = 1$ para todo $B \in \Sigma^+$. Tomemos ahora $g \in M(\mu, X)$. En tal caso existe $A \in \Sigma$ con $\mu([0,1] \backslash A) = 0$ tal que $g(A) \subset c_0([0,1])$ es separable. Así que podemos encontrar un conjunto numerable $C \subset [0,1]$ tal que $g(t')(t) = 0$ para cada $t \in [0,1] \backslash C$ y cada $t' \in A$. Tomemos $t_0 \in A \backslash C$. Entonces

$$d(f, g) \geq \| f(t_0) - g(t_0) \| \geq (f(t_0) - g(t_0))(t_0) = 1$$

de donde se deduce que $d(f, M(\mu, X)) \geq 1$. Por lo tanto

$$1 \leq d(f, M(\mu, x)) \leq \operatorname{meas}(f) = 1$$

con lo que hemos probado lo que queríamos. $\square$

Dedicamos el resto de esta sección al estudio de una versión cuantitativa de la propiedad de Bourgain. La propiedad de Bourgain se ha utilizado como una herramienta muy potente en el estudio de la integración de funciones con valores en un espacio de Banach, véase [RS85], [GGMS87], [CMV97] y [CR05]. Por ejemplo si $f : \Omega \to E$ es una función acotada, la propiedad de Bourgain del conjunto

$$\{x^* \circ f : x^* \in B_{E^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$$

caracteriza la integrabilidad Birkhoff de f.

Definición 5.3.6. *Sea $H \subset \mathbb{R}^\Omega$, se define*

$$\mathscr{B}(H) = \operatorname{ínf}\{\varepsilon > 0 : \textit{ para todo } A \in \Sigma^+ \textit{ existen } B_1, \ldots, B_n \in \Sigma_A^+ \\ \textit{tales que } \sup_{h \in H} \min_{1 \leq 1 \leq n} \operatorname{diam} f(B_i) \leq \varepsilon\},$$

donde consideramos que $\operatorname{ínf} \emptyset = +\infty$.

Se dice que H tiene la propiedad de Bourgain cuando $\mathscr{B}(H)=0$.

Proposición 5.3.7 ([ACR]). *Sea $H \subset E^{\Omega}$. Entonces*

(i) $\mathscr{B}(G) \leq \mathscr{B}(H)$ *para todo* $G \subset H$.
(ii) $\operatorname{meas}(h) \leq \mathscr{B}(H)$ *para cada* $h \in H$.
(iii) $\mathscr{B}(H) = \mathscr{B}(\overline{H}^{E^{\Omega}})$.

Demostración. (i) y (ii) son inmediatos. Veamos que también se da (iii). Por (i) tenemos que $\mathscr{B}(H) \leq \mathscr{B}(\overline{H}^{E^{\Omega}})$. Veamos por tanto la desigualdad opuesta. Para ello supongamos que $\mathscr{B}(H)$ es finito y sea $\varepsilon > \varepsilon' > \mathscr{B}(H)$. Fijemos $A \in \Sigma^{+}$. Existen $B_1, \ldots, B_n \in \Sigma_A^{+}$ tales que

$$\sup_{h \in H} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam}(h(B_i)) \leq \varepsilon'.$$

Fijemos $g \in \overline{H}^{E^{\Omega}}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, elijamos $t_i, t_i' \in B_i$. Existe $h \in H$ tal que

$$\|h(t_i) - g(t_i)\| \leq \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} \geq \|h(t_i') - g(t_i')\| \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Para algún $1 \leq j \leq n$ tenemos que $\|h(t_j) - h(t_j')\| \leq \varepsilon'$ así que

$$\|g(t_j) - g(t_j')\| \leq \|g(t_j) - h(t_j)\| + \|h(t_j) - h(t_j')\| + \|h(t_j') - g(t_j')\| \leq \varepsilon.$$

Como los puntos $t_i, t_i' \in B_i$ se eligieron arbitrariamente, tenemos que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam} g(B_i) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto $\mathscr{B}(\overline{H}^{E^{\Omega}}) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ es arbitrario, con esto concluimos la prueba. □

Bourgain probó que si $\mathscr{B}(H)=0$ y $f \in \overline{H}^{\tau_p}$ entonces existe una sucesión $(f_n)_n$ en H que converge a f en μ-casi todo punto (véase [RS85]). La siguiente proposición es una versión cuantitativa de dicho resultado:

Proposición 5.3.8 ([ACR]). *Sea $H \subset E^{\Omega}$ y $g \in \overline{H}^{E^{\Omega}}$. Entonces existe una sucesión $(h_n)_n$ en H tal que*

$$\limsup_{n \to \infty} \|h_n(x) - g(x)\| \leq 2 \cdot \mathscr{B}(H)$$

para μ-casi todo punto $x \in \Omega$.

Demostración. Supongamos que $\mathscr{B}(H)$ es finito ya que en caso contrario el resultado sería trivialmente cierto. Como $g \in \overline{H}^{E^{\Omega}}$, existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ de H tal que $g \in \overline{U}^{E^{\Omega}}$ para cada $U \in \mathscr{U}$. Dado $A \in \Sigma^{+}$ y $n \in \mathbb{N}$, tomemos

$$\mathscr{H}(A,n) := \{h \in H : \operatorname{diam} h(A) \leq \mathscr{B}(H) + 1/n\}.$$

Además consideremos que $\mathscr{H}(\emptyset,n)=H$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Fijemos $n\in\mathbb{N}$. Por definición de $\mathscr{B}(H)$, para cada $A\in\Sigma^+$ existe un conjunto finito $\mathscr{F}\subset\Sigma_A^+$ tal que $H=\bigcup_{B\in\mathscr{F}}\mathscr{H}(B,n)$ y, teniendo en cuenta que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro de H, podemos encontrar $B\in\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{H}(B,n)\in\mathscr{U}$. Usando el Lema de Zorn de forma similar a como hicimos en la Proposición 5.3.3, podemos encontrar una familia numerable $\{A_{n,m}\}$ de elementos disjuntos de $\Sigma^+\cup\{\emptyset\}$ con $\mu(\Omega\setminus\bigcup_m A_{n,m})=0$ tales que $\mathscr{H}(A_{n,m},n)\in\mathscr{U}$ para cada m. Fijemos $t_{n,m}\in A_{n,m}$ cuando $A_{n,m}\neq\emptyset$ y definamos $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$ como $f_n(t):=g(t_{n,m})$ si $t\in A_{n,m}$ y $f_n(t):=g(t)$ si $t\notin\bigcup_m A_{n,m}$.

Observemos que $B:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_m A_{n,m}$ cumple que $\mu(\Omega\setminus B)=0$. Afirmamos que

$$\|f_n(t)-g(t)\|\leq\mathscr{B}(H)+\frac{1}{n}\quad\text{para todo } t\in B \text{ y todo } n\in\mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Efectivamente, tomemos $m\in\mathbb{N}$ tal que $t\in A_{n,m}$. Fijemos $\eta>0$. Como $g\in\overline{\mathscr{H}(A_{n,m},n)}^{E^\Omega}$, podemos encontrar $g_n\in\mathscr{H}(A_{n,m},n)$ tal que $\|g_n(t)-g(t)\|\leq\eta$ y $\|g_n(t_{n,m})-g(t_{n,m})\|\leq\eta$. De aquí tenemos que

$$\begin{aligned}\|f_n(t)-g(t)\|=\|g(t_{n,m})-g(t)\|&\leq\|g(t_{n,m})-g_n(t_{n,m})\|+\|g_n(t_{n,m})-g_n(t)\|+\|g_n(t)-g(t)\|\\&\leq\mathscr{B}(H)+\frac{1}{n}+2\eta.\end{aligned}$$

Como $\eta>0$ era arbitrario, se tiene la desigualdad (5.15).

Dado $n\in\mathbb{N}$, el conjunto $\bigcap_{k=1}^n\bigcap_{m=1}^n\mathscr{H}(A_{k,m},k)$ pertenece a $\mathscr{U}$ y por lo tanto contiene una función h_n tal que $\|h_n(t_{k,m})-g(t_{k,m})\|\leq 1/n$ para cada $1\leq k\leq n$ y cada $1\leq m\leq n$. Veamos que

$$\limsup_{n\to\infty}\|h_n(t)-g(t)\|\leq 2\cdot\mathscr{B}(H)\quad\text{para todo } t\in B.$$

Fijemos $k\in\mathbb{N}$. Entonces por (5.15) tenemos que $\|f_k(t)-g(t)\|\leq\mathscr{B}(H)+1/k$. Tomemos $m\in\mathbb{N}$ tal que $t\in A_{k,m}$. Entonces para cada $n\geq\max\{k,m\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|h_n(t)-g(t)\|&\leq\|h_n(t)-h_n(t_{k,m})\|+\|h_n(t_{k,m})-g(t_{k,m})\|+\|f_k(t)-g(t)\|\\&\leq 2\cdot\mathscr{B}(H)+\frac{2}{k}+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\limsup_{n\to\infty}\|h_n(t)-g(t)\|\leq 2\cdot\mathscr{B}(H)+2/k$. Como $k\in\mathbb{N}$ es arbitrario, concluimos que $\limsup_{n\to\infty}\|h_n(t)-g(t)\|\leq 2\cdot\mathscr{B}(H)$. Con esto termina la prueba □

Si H es uniformemente acotado, se tiene que $\mathscr{B}(\mathrm{aconv}(H))=0$ cuando $\mathscr{B}(H)=0$. Por otro lado, esto no es cierto en general para conjuntos no acotados. Para terminar esta sección vamos a ver una versión cuantitativa de dicho resultado, véanse Proposición 5.3.12 y Proposición 5.3.14. Para ello necesitamos unos resultados previos:

Lema 5.3.9 ([ACR]). *Sea $H\subset E^\Omega$. Entonces $\mathscr{B}(H)$ es el ínfimo de todos los $\varepsilon>0$ que cumplen*

(P_ε) para cada $\delta > 0$ existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que

$$\sup_{h\in H}\mu\Big(\bigcup\{A\in\Gamma:\ \operatorname{diam} h(A)>\varepsilon\}\Big)\leq\delta.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ que cumpla (P_ε) y tomemos $B \in \Sigma^+$. Existe una partición Γ de Ω en Σ tal que

$$\sup_{h\in H}\mu\Big(\bigcup\{A\in\Gamma:\ \operatorname{diam} h(A)>\varepsilon\}\Big)\leq\frac{\mu(B)}{2}.$$

De aquí se deduce que para cada $h \in H$ podemos encontrar $A \in \Gamma$ con $\mu(A\cap B) > 0$ tal que $\operatorname{diam} h(A\cap B) \leq \varepsilon$. Por lo tanto $\mathscr{B}(H) \leq \varepsilon$.

Recíprocamente, fijemos $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ y veamos que se cumple (P_ε). Fijemos $\delta > 0$ y consideremos la familia uniformemente integrable

$$K := \Big\{g\in M(\mu,\mathbb{R}):\ 0\leq g\leq 1\ \mu\text{-para casi todo punto},\ \int_\Omega g\,d\mu\geq\delta\Big\}.$$

Por el teorema de Dunford, Teorema 3.5.1, su imagen canónica $K^\sim$ en $L_1(\mu)$ es un conjunto relativamente w-compacto en $L_1(\mu)$. Es fácil ver que $K^\sim$ es $\|\cdot\|_1$-cerrado y convexo, y por lo tanto es w-cerrado de donde deducimos que es w-compacto.

Fijemos $g\in K$. Como $A^g := \{t\in\Omega : g(t) > 0\}\in\Sigma^+$, existen $A_1^g,\ldots,A_{n(g)}^g\in\Sigma_{A^g}^+$ tales que

$$\sup_{h\in H}\min_{1\leq i\leq n(g)}\operatorname{diam} h(A_i^g)\leq\varepsilon. \tag{5.16}$$

Definamos

$$V(g) := \bigcap_{i=1}^{n(g)}\Big\{f\in\mathscr{L}_1(\mu):\ \int_{A_i^g} f\,d\mu>0\Big\}.$$

$V(g)^\sim$ es un w-entorno de la clase $\hat{g}$ de $g\in L_1(\mu)$.

Como $K^\sim$ es w-compacto, existen $g_1,\ldots,g_k\in K$ tales que $K\subset\bigcup_{j=1}^k V(g_j)$. Sea Γ la partición finita de Ω formada por todos los átomos del álgebra generada por la colección

$$\{A_i^{g_j} : 1\leq j\leq k, 1\leq i\leq n(g_j)\}.$$

Fijemos $h\in H$ y definamos

$$C=\bigcup\{A\in\Gamma:\ \operatorname{diam} h(A)>\varepsilon\}.$$

Afirmamos que $\chi_C\notin K$. Supongamos lo contrario. Entonces $\chi_C\in V(g_j)$ para algún $1\leq j\leq k$, es decir, para cada $1\leq i\leq n(g_j)$ tenemos que $\mu(C\cap A_i^{g_j})>0$ así que existe $A_i\in\Gamma$ tal que $A_i\subset A_i^{g_j}$ y $\operatorname{diam} h(A_i)>\varepsilon$. Por lo tanto $\operatorname{diam} h(A_i^{g_j})>\varepsilon$ para cada $1\leq i\leq n(g_j)$, contradiciendo (5.16). Esto muestra que $\chi_C\notin K$, es decir, $\mu(C)<\delta$ con lo que terminamos la prueba. □

Definición 5.3.10. *Sea $H \subset E^{\Omega}$ uniformemente acotado. Definimos*

$$\operatorname{sosc}(H) := \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ para todo } B \in \Sigma^{+} \text{ existe una partición finita } \Gamma \text{ de } B \text{ en } \Sigma \\ \text{tal que } \sup_{h \in H} \sum_{A \in \Gamma} \mu(A) \operatorname{diam} h(A) \leq \mu(B)\varepsilon\}.$$

Proposición 5.3.11 ([ACR])**.** *Sea $H \subset E^{\Omega}$ be uniformemente acotado. Entonces*

$$\operatorname{sosc}(H) = \mathscr{B}(H).$$

Demostración. Pongamos $M := \sup\{\|h(t)\| : t \in \Omega, h \in H\}$. Fijemos $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ y $B \in \Sigma^{+}$. Tomemos $\varepsilon > \varepsilon' > \mathscr{B}(H)$ y elijamos $\eta > 0$ suficientemente pequeño para que

$$2M\eta + \mu(B)\varepsilon' \leq \mu(B)\varepsilon.$$

Por el Lema 5.3.9, existe una partición finita Γ de Ω en Σ tal que

$$\sup_{h \in H} \mu\left(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{diam} h(A) > \varepsilon'\}\right) \leq \eta.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{A \in \Gamma} \mu(B \cap A) \operatorname{diam} h(B \cap A) = \\
&\qquad = \sum_{\substack{A \in \Gamma \\ \operatorname{diam} h(B \cap A) > \varepsilon'}} \mu(B \cap A) \operatorname{diam} h(B \cap A) + \sum_{\substack{A \in \Gamma \\ \operatorname{diam} h(B \cap A) \leq \varepsilon'}} \mu(B \cap A) \operatorname{diam} h(B \cap A) \\
&\qquad \leq 2M\eta + \mu(B)\varepsilon' \leq \mu(B)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ y $B \in \Sigma^{+}$ es arbitrario, $\operatorname{sosc}(H) \leq \mathscr{B}(H)$.

Veamos ahora la desigualdad opuesta. Para ello fijemos $\varepsilon > \operatorname{sosc}(H)$ y $B \in \Sigma^{+}$. Tomemos una partición finita Γ de B en Σ tal que

$$\sup_{h \in H} \sum_{A \in \Gamma} \mu(A) \operatorname{diam} h(A) \leq \mu(B)\varepsilon.$$

La desigualdad anterior nos asegura que, para cada $h \in H$, existe $A \in \Gamma$ con $\mu(A) > 0$ tal que $\operatorname{diam} h(A) \leq \varepsilon$. De aquí se tiene que $\mathscr{B}(H) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > \operatorname{sosc}(H)$ es arbitrario, concluimos que $\operatorname{sosc}(H) = \mathscr{B}(H)$ con lo que completamos la prueba. □

Proposición 5.3.12 ([ACR])**.** *Sea $H \subset E^{\Omega}$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\mathscr{B}(H) = \mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)).$$

Demostración. Por la Proposición 5.3.7 (i), tenemos que $\mathscr{B}(H) \leq \mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H))$. Para probar la otra desigualdad, fijemos $\varepsilon > \operatorname{sosc}(H)$. Dado $B \in \Sigma^{+}$, existe una partición finita $\{B_1, \ldots, B_p\}$ de B en Σ tal que

$$\sup_{h \in H} \sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \operatorname{diam} h(B_j) \leq \mu(B)\varepsilon.$$

Tomemos $g \in \operatorname{aconv}(H)$ y escribamos $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$ para algún $h_1, \ldots, h_n \in H$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$. Dado $\eta > 0$, para cada $1 \leq j \leq p$ podemos elegir $t_j, t_j' \in B_j$ tales que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \operatorname{diam} g(B_j) - \eta &\leq \sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \, \|g(t_j) - g(t_j')\| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|h_i(t_j) - h_i(t_j')\| \Big) \leq \sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \, \Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \operatorname{diam} h_i(B_j) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \Big(\sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \operatorname{diam} h_i(B_j) \Big) \leq \mu(B)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\sum_{j=1}^{p} \mu(B_j) \operatorname{diam} g(B_j) \leq \mu(B)\varepsilon$. Este argumento muestra que $\operatorname{sosc}(\operatorname{aconv}(H)) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > \operatorname{sosc}(H)$ es arbitrario, $\operatorname{sosc}(\operatorname{aconv}(H)) \leq \operatorname{sosc}(H)$. La prueba termina por la Proposición 5.3.11. □

Lema 5.3.13 ([ACR]). *Sea $H \subset E^{\Omega}$ y $A \in \Sigma$. Definamos $G := \{h\chi_A : h \in H\} \subset E^{\Omega}$. Entonces*

$$\mathscr{B}(G) \leq \mathscr{B}(H).$$

Demostración. Si $\mathscr{B}(H) = +\infty$ el resultado es inmediato. Supongamos que $\mathscr{B}(H) < +\infty$ y fijemos $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$. Tomemos algún $B \in \Sigma^+$. Entonces o $B \cap A \in \Sigma^+$ o $B \setminus A \in \Sigma^+$. En el segundo caso, tenemos que $\operatorname{diam} g(B \setminus A) = 0$ para cada $g \in G$. En el primer caso, podemos elegir

$$B_1, \ldots, B_n \in \Sigma^+_{B \cap A}$$

tales que $\sup_{h \in H} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam} h(B_i) \leq \varepsilon$. Entonces

$$\sup_{g \in G} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam} g(B_i) \leq +\varepsilon.$$

De aquí sigue que $\mathscr{B}(G) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ era arbitrario, esto termina la prueba. □

Proposición 5.3.14 ([ACR]). *Sea $H \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ puntualmente acotado. Si $\mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)) < +\infty$, entonces*

$$\mathscr{B}(H) = \mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)).$$

Demostración. Empezamos probando la siguiente afirmación:

> *AFIRMACIÓN.- Existe un cubrimiento numerable de conjuntos disjuntos $(A_n)_n$ de Ω en Σ tal que la familia de restricciones $H|_{A_n} \subset \mathbb{R}^{A_n}$ está uniformemente acotada cuando $\mu(A_n) > 0$.*

Efectivamente, fijemos $A \in \Sigma^+$ y tomemos $k > \mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)) = \mathscr{B}(\overline{\operatorname{aconv}(H)}^{\mathbb{R}^{\Omega}})$ (por 5.3.7 (iii)). Sea $G := \overline{\operatorname{aconv}(H)}^{\mathbb{R}^{\Omega}}$. Entonces existen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma^+_A$ tales que

$$\sup_{g \in G} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam} g(A_i) \leq k.$$

Definamos $f : \Omega \to \ell_\infty(G)$ como $f(\omega)(g) := g(\omega)$ (estamos usando que G es puntualmente acotado). Por el teorema de Hahn-Banach, $\{x^*(f) : x^* \in B_E\} = G$. La desigualdad previa se traduce entonces en

$$\sup_{\varphi \in B_{\ell_\infty(H)^*}} \min_{1\le i\le n} \operatorname{diam} \varphi(f(A_i)) \le k.$$

Por [CR05, Lemma 3.3] tenemos que existe $1 \le j \le n$ tal que $f(A_j)$ es acotado, es decir, $H|_{A_j}$ es uniformemente acotado. De nuevo, utilizando el Lema de Zorn como hicimos en la prueba de la Proposición 5.3.3 nos permite probar la AFIRMACIÓN.

Fijemos $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ y $B \in \Sigma^+$. Entonces $\mu(B \cap A_n) > 0$ para algún n. Consideremos la familia uniformemente acotada $H_n := \{h\chi_{A_n} : h \in H\} \subset \mathbb{R}^\Omega$. Por la Proposición 5.3.12 y el Lema 5.3.13, tenemos que $\mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H_n)) \le \mathscr{B}(H)$. Existen $B_1, \dots, B_p \in \Sigma^+_{B\cap A_n}$ tales que

$$\sup_{g\in \operatorname{aconv}(H)} \min_{1\le i\le p} \operatorname{diam} g(B_i) = \sup_{g\in \operatorname{aconv}(H_n)} \min_{1\le i\le p} \operatorname{diam} g(B_i) \le \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > \mathscr{B}(H)$ y $B \in \Sigma^+$ son arbitrarios, concluimos que $\mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)) \le \mathscr{B}(H)$. Por otro lado, por la Proposición 5.3.7 (i) tenemos que $\mathscr{B}(\operatorname{aconv}(H)) \ge \mathscr{B}(H)$ y con ello termina la prueba. $\square$

Bibliografía

[ACa] C. Angosto and B. Cascales, *Measures of weak noncompactness in banach spaces*, To appear in Topology Appl.

[ACb] ______, *The quantitative difference between countable compactness and compactness*, Submitted.

[ACN] C. Angosto, B. Cascales, and I. Namioka, *Distances to spaces of Baire one functions*, Submitted.

[ACR] C. Angosto, B. Cascales, and J. Rodriguez, *Distances to spaces of measurable functions*.

[Ang] C. Angosto, *Distances from selectors to spaces of baire one functions*, To appear in Topology Appl.

[AP84] J. Appell and E. De Pascale, *Su alcuni parametri connessi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili*, Boll. Un. Mat. Ital. **B 3** (1984), 497–515.

[Are52] Richard Arens, *Extension of functions on fully normal spaces*, Pacific J. Math. **2** (1952), 11–22. MR MR0049543 (14,191h)

[Ark92] A. V. Arkhangelʹskiĭ, *Topological function spaces*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 78, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992, Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. MR 92i:54022

[Ast80] Kari Astala, *On measures of noncompactness and ideal variations in Banach spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes (1980), no. 29, 42. MR MR575533 (83a:46027)

[AT90] K. Astala and H. O. Tylli, *Seminorms related to weak compactness and to Tauberian operators*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107** (1990), no. 2, 367–375. MR MR1027789 (91b:47016)

[BFT78] J. Bourgain, D. H. Fremlin, and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), no. 4, 845–886. MR 80b:54017

[BL00] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR 2001b:46001

[Bla92] F.S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in a banach space*, Colloq. Math. **65** (1992), 333–343.

[BM95] Józef Banaś and Antonio Martinón, *Measures of weak noncompactness in Banach sequence spaces*, Portugal. Math. **52** (1995), no. 2, 131–138. MR MR1342976 (96i:46010)

[Bou90] A. Bouziad, *Une classe d'espaces co-Namioka*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), no. 11, 779–782. MR MR1054296 (91e:54066)

[BT80] J. Bourgain and M. Talagrand, *Compacité extrémale*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), no. 1, 68–70. MR 81h:46011

[CG98] B. Cascales and G. Godefroy, *Angelicity and the boundary problem*, Mathematika **45** (1998), no. 1, 105–112. MR 99f:46019

[Cho69] G. Choquet, *Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory*, Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. MR 40 #3253

[Chr81] J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), no. 3, 455–461. MR MR612739 (82h:54012)

[CMR06] B. Cascales, W. Marciszewski, and M. Raja, *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), no. 13, 2303–2319. MR MR2238732

[CMV97] B. Cascales, G. Manjabacas, and G. Vera, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), no. 190, 161–167. MR 99c:46009

[CR05] B. Cascales and J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 259–279. MR MR2115456 (2006i:28006)

[CV95] B. Cascales and G. Vera, *Norming sets and compactness*, Rocky Mountain J. Math. **25** (1995), no. 3, 919–925. MR 96i:46011

[DG93] Robert Deville and Gilles Godefroy, *Some applications of projective resolutions of identity*, Proc. London Math. Soc. (3) **67** (1993), no. 1, 183–199. MR MR1218125 (94f:46018)

[Die84] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 85i:46020

[Din67] N. Dinculeanu, *Vector measures*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 95, Pergamon Press, Oxford, 1967. MR 34 #6011b

[DJ77] J. Diestel and J. J. Uhl Jr, *Vector measures*, Mathematical Surveys, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis. MR 56 #12216

[DS49] Jean Dieudonné and Laurent Schwartz, *La dualité dans les espaces F et (LF)*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **1** (1949), 61–101 (1950). MR MR0038553 (12,417d)

[Ebe47] W. F. Eberlein, *Weak compactness in Banach spaces. I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **33** (1947), 51–53. MR MR0021239 (9,42a)

[Eng77] R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. MR 58 #18316b

[Fan06] Ming Fan, *Lions-Schechter's methods of complex interpolation and some quantitative estimates*, J. Approx. Theory **140** (2006), no. 1, 46–60. MR MR2226676 (2007c:46021)

[FHH$^+$01] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 8, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 2002f:46001

[FHMZ05] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *A quantitative version of Krein's theorem*, Rev. Mat. Iberoamericana **21** (2005), no. 1, 237–248. MR MR2155020 (2006b:46011)

[Flo80] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001

[GGMS87] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **70** (1987), no. 378, iv+116. MR 89h:46024

[GHS04] A. S. Granero, P. Hájek, and V. Montesinos Santalucía, *Convexity and w^*-compactness in Banach spaces*, Math. Ann. **328** (2004), no. 4, 625–631. MR MR2047643 (2005c:46020)

[Gra06] Antonio S. Granero, *An extension of the Krein-Šmulian theorem*, Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 1, 93–110. MR MR2267314

[Gro52] A. Grothendieck, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math. **74** (1952), 168–186. MR 13,857e

[Gru84] G. Gruenhage, *Covering properties on $X^2\setminus\Delta$, W-sets, and compact subsets of Σ-products*, Topology Appl. **17** (1984), no. 3, 287–304. MR MR752278 (86e:54029)

[GS06] A. S. Granero and M. Sánchez, *Convexity, compactness and distances*, to appear in Methods in Banach spaces, Ed. Jesús M.F. Castillo and William R. Jonhson, Proceed. of the 3th Conference in Cáceres, Lecture Notes Series of the London Math. Soc., 2006.

[GS07a] ______, *The class of universally Krein-šmulian Banach spaces*, to appear in J. London Math. Soc., 2007.

[GS07b] ______, *Distances to convex sets*, to appear in Studia. Math., 2007.

[HJT85] R. W. Hansell, J. E. Jayne, and M. Talagrand, *First class selector for weakly upper semi-continuous multivalued maps in banach spaces*, J. Reine Angew. Math **361** (1985), 201–220.

[Jam74] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974. MR 57 #3828

[JOPV93] J. E. Jayne, J. Orihuela, A. J. Pallarés, and G. Vera, *σ-fragmentability of multivalued maps and selection theorems*, J. Funct. Anal. **117** (1993), no. 2, 243–273. MR 94m:46023

[Jun80] Heikki J. K. Junnila, *Three covering properties*, Surveys in general topology, Academic Press, New York, 1980, pp. 195–245. MR MR564103 (81e:54019)

[KN76] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 36, Springer-Verlag, New York, 1976, With the collaboration of W. F. Donoghue, Jr., Kenneth R. Lucas, B. J. Pettis, Ebbe Thue Poulsen, G. Baley Price, Wendy Robertson, W. R. Scott, and Kennan T. Smith, Second corrected printing. MR 52 #14890

[Köt69] G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750

[KP01] A. Kryczka and S. Prus, *Measure of weak noncompactness under complex interpolation*, Studia Math. **147** (2001), no. 1, 89–102. MR MR1853479 (2002h:46122)

[KPS00] A. Kryczka, S. Prus, and M. Szczepanik, *Measure of weak noncompactness and real interpolation of operators*, Bull. Austral. Math. Soc. **62** (2000), no. 3, 389–401. MR MR1799942 (2001i:46116)

[Kry04] Andrzej Kryczka, *Quantitative approach to weak noncompactness in the polygon interpolation method*, Bull. Austral. Math. Soc. **69** (2004), no. 1, 49–62. MR MR2040049 (2005a:46152)

[LT96] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. 1: Sequence spaces. 2. Function spaces. Repr. of the 1977 a. 1979 ed.*, Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. xx, 432 p. DM 59.00; öS 430.70; sFr 57.00 , 1996.

[Nam74] I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math. **51** (1974), 515–531. MR 51 #6693

[Ori87] J. Orihuela, *Pointwise compactness in spaces of continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 1, 143–152. MR 88f:46058

[Oxt57] John C. Oxtoby, *The Banach-Mazur game and Banach category theorem*, Contributions to the theory of games, vol. 3, Annals of Mathematics Studies, no. 39, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, pp. 159–163. MR MR0093741 (20 #264)

[Pol80] R. Pol, *On a question of H. H. Corson and some related problems*, Fund. Math. **109** (1980), no. 2, 143–154. MR 82a:46022

[Ptá63] Vlastimil Pták, *A combinatorial lemma on the existence of convex means and its application to weak compactness*, 437–450. MR MR0161128 (28 #4337)

[Ros74] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413. MR 50 #10773

[RS85] L. H. Riddle and E. Saab, *On functions that are universally Pettis integrable*, Illinois J. Math. **29** (1985), no. 3, 509–531. MR 86i:28012

[Rud57] Walter Rudin, *Continuous functions on compact spaces without perfect subsets*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 39–42. MR MR0085475 (19,46b)

[Rud81] W. Rudin, *Lebesgue's first theorem*, Mathematical analysis and applications, Part B, Adv. in Math. Suppl. Stud., vol. 7, Academic Press, New York, 1981, pp. 741–747. MR 82k:28006

[Sán07] M. Sánchez, *Compacidad, convexidad y distancias en espacios de Banach duales: extensiones del teorema de Krein-šmulian*, Ph.D. thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2007.

[Šmu40] V. Šmulian, *Über lineare topologische Räume*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. **7 (49)** (1940), 425–448. MR MR0002703 (2,102e)

[SR83] J. Saint-Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 3, 499–504. MR MR684646 (83m:54060)

[Sri93] V. V. Srivatsa, *Baire class* 1 *selectors for upper semicontinuous set-valued maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 2, 609–624. MR 93h:54013

[Tal79] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 407–438. MR 81a:46021

[TBL97] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides, and G. López, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 99, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. MR MR1483889 (99e:47070)

[Tod97] S. Todorčević, *Topics in topology*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1652, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR 98g:54002

[vD78] D. van Dulst, *Reflexive and superreflexive Banach spaces*, Mathematical Centre Tracts, vol. 102, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978. MR MR513590 (80d:46019)

o

Índice terminológico