EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

Claudia Zepeda

2012

Índice general

Introducción

En el Análisis Funcional el problema de la representación de los funcionales lineales continuos sobre un espacio dado, juega un papel esencial. El presente trabajo desarrolla el impactante resultado, expuesto por Frigys Riesz, que estable que cualquier funcional lineal continuo positivo sobre el espacio de funciones continuas definido en cierto espacio topológico, puede representarse de forma única por una medida regular de Borel sobre una σ-algebra del espacio topológico, tal resultado es conocido como *el Teorema de Representación de Riesz*. Se estudia el teorema para el caso de los funcionales lineales en $\mathcal{C}[a,b]$, utilizando la integral de Riemann-Stieltjes; y luego, se estudia en un contexto más general, en espacios de Hausdorff localmente compactos. Se introduce, en cada caso, la teoría preliminar necesaria para llevar a cabo la demostración del teorema de Riesz. Finalmente, se exhiben dos aplicaciones en las que se aprecia, el gran potencial e importancia de este resultado. También se sugieren otras aplicaciones, que no fueron desarrolladas en el presente trabajo, pero que podrían ser de interés para futuros trabajos.

Hablaremos un poco de la evolución histórica del *Teorema de Representación de Riesz.* Entre los pioneros más destacados ([10], pag. 121-124), se encuentra Hadamard(1903) quien ataca el problema de representar los funcionales lineales continuos sobre el espacio $\mathcal{C}[a.b]$, considerando una función fija $\Phi_n = nF(n(t-x))$, en donde el problema que se presentaba con tal representación, es que la función F era demasiado arbitraria. Luego Fréchet(1904) mejora el resultado de Hadamard, e investiga el problema en otros espacios de funciones. Tan pronto comenzó el estudio de Hilbert, Fréchet y Riesz, demuentan, de forma independiente que los funcionales lineales continuos sobre espacio de Hilbert $\ell^2_{\mathbb{R}}$ (con la topología fuerte) podría ser escrito únicamente como $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para toda $x \in \ell^2$.

Finalmente, F. Riesz(1909), fue capaz de dar una mejor forma al teorema de Hadamard, mediante la eliminación de la arbitrariedad de (Φ_n); su idea era utilizar la integral de Stieltjes, como Hilbert hizo en su trabajo sobre teoría espectral:

F. Riesz, demostró que cualquier funcional lineal continuo $U : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ se podía escribir como

$$U(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

donde α es una función de variación acotada en [a,b]. Imponiendo condiciones adicionales sobre α, debe ser continua por la izquierda y tal que $\alpha(a) = 0$, las cuales garantizan la unicidad de ésta.

En esencia, la idea de F. Riesz descrita brevemente, es lo que abordaremos en el capítulo I del presente trabajo.

Existen versiones más generales del Teorema de Representación de Riesz, que no fueron desarrolladas en este trabajo, por el nivel de complejidad de su estudio y por el corto tiempo disponible para efectuar el trabajo. Sin embargo, este puede ser útil, como referencia básica, en el estudio futuro del Teorema en versiones más generales. No pretendo, originalidad y cualquier falla que resultare de manera inconsciente, ruégole sea señalada para incorporarla al trabajo, tal gesto será agradecido.

Capítulo 1

Integral de Riemann-Stieltjes

En este capítulo estableceremos que la integral de Riemann Stieltjes define un funcional lineal en $\mathcal{C}[a,b]$ y desarrollaremos el impactante teorema de Riesz, el cual garantiza la existencia de aplicaciones lineales únicas en $\mathcal{C}[a,b]$ que son integrales de Riemann Stieltjes .

Generalizaremos el concepto de integral de Riemann, adoptando como escala de medida de los subintervalos de una partición, cualquier *función creciente* $\alpha(x)$, pero antes daremos algunas definiciones relacionadas con conjuntos dirigidos, redes y su convergencia.

1.1. Definiciones preliminares

Consideremos un par $(D, \succeq)$ donde D es un conjunto no vacío ordenado parcialmente por $\succeq$. Si se satisface, también, la condición de que para todo $\alpha, \beta \in D$ hay un punto γ en D, tal que $\gamma \succeq \alpha$ y $\gamma \succeq \beta$, entonces decimos que el conjunto D es dirigido.

Definición 1.1.1. *Una **red** en el conjunto de los números reales, es un par $(S, \succeq)$ tal que $S : (D, \succeq) \to \mathbb{R}$ es una función cuyo dominio contiene a D, y $\succeq$ dirige a su dominio. Una red se llama a veces sucesión generalizada o sucesión de Moore-Smith.*

Las redes generalizan las sucesiones y como ellas tienen un sentido de convergencia que definiremos a continuación.

Definición 1.1.2. *Sea $u_\alpha = S(\alpha)$, para $\alpha \in D$, una red en $\mathbb{R}$, decimos que u_α tiene límite l, si a todo número positivo ε corresponde un índice α_0 tal que para todo índice $\alpha \succeq \alpha_0$ se cumpla $|u_\alpha - l| < \varepsilon$.*

En el cápítulo III, donde se pondrá de manifiesto algunas aplicaciones del teorema de representación de Riesz, se generalizará la definición de convergencia de redes en un espacio topológico.

La condición de convergencia de una red es análoga al criterio de convergencia de Cauchy.

Teorema 1.1.3. *Condición necesaria y suficiente para la existencia del límite de una red* $\{u_\alpha\}$ *es que a todo número positivo* ε *corresponda un índice* α_0 *tal que para todo par de índices* $\alpha' \succeq \alpha_0$, $\alpha'' \succeq \alpha_0$ *se cumpla* $|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| < \varepsilon$.

La demostracion puede verse en [2]

Definición 1.1.4. *La red* $\{u_\alpha\}$ *de números reales, se llama creciente* ***(decreciente)*** *si la condición* $\alpha' \succeq \alpha''$ *implica*

$$u_{\alpha'} \geq u_{\alpha''}, \quad (u_{\alpha'} \leq u_{\alpha''}).$$

Teorema 1.1.5. *Todo red creciente* $\{u_\alpha\}$ *tiene límite finito o infinito coincidente con el extremo superior de los números* u_α.

La demostracion es sencilla, los detalles pueden verse en [2]

1.2. Integral Generalizada de Riemann-Stieltjes

Desde la perspectiva de la Geometría Analítica, en muchos contextos, es ventajoso introducir sistemas de abscisas distintos del cartesiano. En el caso que nos ocupa, tomaremos como abscisa cualquier *función creciente* $\alpha(x)$, y pondremos de manifiesto como se modifica el concepto de la integral de Riemann al adoptar estas abscisas generales.

Dividiendo el intervalo $[a, b]$ por puntos intermedios $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, los incrementos de abscisas son $\delta_r = \alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1}) \geq 0$ y construyendo las sumas

$$s = \Sigma m_r \delta_r \quad ; \quad S = \Sigma M_r \delta_r,$$

donde $s \leq S$ para cualquier partición π, m_r y M_r representan el extremo inferior y superior, respectivamente, de la función en el subintervalo $[\alpha(x_r), \alpha(x_{r-1})]$.

Si las clases s y S **son contiguas**, el número frontera se llama integral de $f(x)$, según Stieltjes, con respecto a la métrica $\alpha(x)$, denotada por:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \tag{1.2.1}$$

Observación: $d\alpha(x)$ denota incremento y no diferencial, pues la función $\alpha(x)$ puede no ser diferenciable ni siquiera continua y, por tanto, esta notación es más general que la de Leibniz.

Como la suma s crece al subdividir o refinar la partición, mientras que la suma S decrece, unas y otras llegan a diferir del número frontera menos de ε desde una partición en adelante, y lo mismo toda suma intermedia, resulta,

$$(1.2.2) \qquad \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{\pi} \Sigma \eta_r \delta_r, \quad \text{con} \quad m_r \leq \eta_r \leq M_r$$

donde el límite se toma según el conjunto dirigido de las particiones π, pudiendo tomarse en particular $\eta_r = f(\xi_r)$, tal que $x_{r-1} \leq \xi_r \leq x_r$. Esta integral suele llamarse **integral generalizada de Riemann-Stieltjes**.

Si las clases s y S **no son contiguas**, resultan como extremos la *integral inferior* y *la superior*.

La integral de Stieltjes es ejemplo de la fecundidad de los llamados límites dirigidos o generales. Así, por ejemplo, como las sumas inferiores s forman un conjunto creciente y las sumas superiores S un conjunto decreciente, ambos dirigidos según las particiones ordenadas por el criterio de subdivisión, convergen a su extremo superior y a su extremo inferior, respectivamente, de acuerdo al Teorema 1.1.5; además estos extremos coinciden en el límite, cuyo valor es precisamente la integral de Stieltjes (1.2.2). Esto es:

Sea α_0 el índice correspondiente a $\varepsilon/2$, entonces para cualquier par de índices $\alpha' \succeq \alpha_0$, $\alpha'' \succeq \alpha_0$ será

$$|s_{\alpha'} - s_{\alpha''}| \leq |s_{\alpha'} - l| + |l - s_{\alpha''}| < \varepsilon$$

luego,

$$0 \leq \sup_{\alpha \succeq \alpha_0} s_\alpha - \inf_{\alpha \succeq \alpha_0} s_\alpha \leq \varepsilon$$

de aquí se deduce la igualdad

$$\inf(\sup_{\alpha \succeq \alpha_0} s_\alpha) = \sup(\inf_{\alpha \succeq \alpha_0} s_\alpha) = l$$

donde l es el límite que verifica la Definición 1.1.1, además si l es el extremo superior de las sumas inferiores s, respecto de todo número $l - \varepsilon < l$ existe algún índice α_0 tal que

$$l \geq s_{\alpha_0} > l - \varepsilon$$

y para $\alpha \succeq \alpha_0$, por monotonía, será también

$$l \geq s_\alpha > l - \varepsilon$$

cumpliéndose la Definición 1.1.1, siguiendo un razonamiento similar para las sumas superiores S y tomando l como extremo inferior se induce que $l = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$.

Nota: La existencia de la integral implica la convergencia, hacia un mismo límite, es decir con error menor que ε, desde una partición en adelante, pero caben tipos especiales de partición, con norma arbitrariamente pequeña, que no dan sumas convergentes hacia el valor de la integral. Por ejemplo:

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

entonces

i. En particiones π que no contienen el origen como punto de división, $s_\pi = 0$ y $S_\pi = 1$, por pequeña que sea la norma.

ii. Eligiendo el origen como punto de división en las particiones, $s_\pi = 0$ y $S_\pi = 0$, luego existe la integral y vale 0.

1.2.1. Relación con la integral de Riemann.

La integral generalizada de Riemann-Stieltjes coincide con la clásica integral de Riemann, cuando $\alpha(x)$ tiene derivada integrable.

En efecto, si $\alpha'(x) = g(x)$

$$\text{(1.2.3)} \qquad \alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1}) = g(\xi_r)\Delta x$$

y las sumas $\sum f(\xi_r)\left[\alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})\right] = \sum f(\xi_r)g(\xi_r)\Delta x$ comprendidas entre s y S, llegan a diferir de $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ menos de ε, desde una partición π', es decir,

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x) - \sum f(\xi_r)[\alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})]\right| = \left|\int_a^b f(x)d\alpha(x) - \sum f(\xi_r)g(\xi_r)\Delta x\right| < \varepsilon.$$

Por otro lado, desde una partición π posterior a π', se tiene

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum f(\xi_r)[\alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})]\right| = \left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum f(\xi_r)g(\xi_r)\Delta x\right| < \varepsilon$$

donde asumimos que ambas funciones $f(x)$ y $\alpha(x)$ son integrables, luego

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x) - \int_a^b f(x)g(x)dx\right| < 2\varepsilon$$

dado ε arbitrariamente pequeño, obtenemos

$$\text{(1.2.4)} \qquad \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

En general, aunque $\alpha(x)$ no sea derivable, si es integral indefinida de una función $g(x)$ (continua o discontinua), es decir,

$$\alpha(x) = \int_a^x g(x)dx.$$

la relación (1.2.3) subsiste, sustituyendo $\alpha(\xi_r)$ por un valor μ_r, tal que $m_r < \mu_r < M_r$, y multiplicando por $f(\xi_r)$ se obtiene una suma intermedia entre las sumas s y S que conducen a la integral de Riemann, $\int_a^b f(x)g(x)dx$, si $f(\xi_r) \geq 0$, y por tanto se verifica (1.2.4), si ambas existen. Por la propiedad aditiva f, puede expresarse como diferencia de dos funciones no negativas, $f = |f| - [\ |f| - f\ ]$, de tal manera que cualquier caso se reduce al $f(x) \geq 0$.

En particular, si $g(x)$ es continua, entonces $\alpha'(x) = g(x)$, lo cual nos lleva al caso anterior.

En fin, la integral de tipo Stieltjes es, pues, una generalización de la integral de Riemann, y es legítimo usar la notación (1.2.1).

Observaciones:

1. No basta que $f(x)$ sea integrable, ni aun continua, y $\alpha(x)$ derivable, para que exista $\int_a^b f(x)g(x)dx$. Por ejemplo:

   Si $f(x) \equiv 1$ y $\alpha(x) = \Phi(x)$(función de Volterra), que tiene derivada acotada no integrable, entonces no existe la integral de Riemann, mientras que existe la integral de Stieltjes, dada por

   $$\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

   donde $\alpha(x)$ es de variación acotada.

   La definición, que es muy técnica, de la *función Volterra* puede verse en [2].

2. Se puede considerar a $\alpha(x)$ como medida de una masa repartida en el intervalo (a,b) y entonces $\Delta\alpha(x)$ será la masa en $[x_{r-1}, x_r]$. Si $\alpha(x)$ es continua, la masa de cada punto es nula; pero cabe que existan masas puntuales aisladas, y si σ es la masa del punto x_0, la función $\alpha(x)$ recibe un incremento o salto σ al pasar de la izquierda a la derecha de x_0. La función $\alpha(x)$ es conocida como función de repartición o de distribución; y si $g(x)$ existe, ésta es la densidad lineal.

1.2.2. Condiciones de Integrabilidad.

En general, la condición de integrabilidad de la integral generalizada de Riemann-Stieltjes, es análoga a la de la integral de Riemann, con la salvedad de que no es necesario que sea nulo el límite según la norma, tal condición queda expuesta en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes, $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, es que para cada $\varepsilon > 0$ exista una partición tal que*

$$\sum \omega_r[\alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})] < \varepsilon$$

donde $\omega_r = M_r - m_r$. Lo cual es equivalente a que $\lim_\pi \sum \omega_r\delta_r = 0$.

En cambio, para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes no es necesario que sea nulo el límite $\lim_{h\to 0} \sum \omega_r\delta_r = 0$, según la norma; dicha condición es necesaria para la existencia de la integral de Riemann.

Definición 1.2.2. *Diremos que un conjunto de puntos es de medida (α) nula si puede encerrarse en un número finito o infinito-numerable de intervalos abiertos de medida δ_r, tales que $\sum \delta_r < \varepsilon$.*

Por tanto, *para la existencia de la integral de Riemann es condición necesaria y suficiente que el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$ sea de medida (α) nula. Pero esta condición no es necesaria para la existencia de la integral generalizada de Riemann-Stieltjes.*

Teorema 1.2.3. *Una función $f(x)$ es integrable respecto a $\alpha(x)$, en el sentido de la integral generalizada de Rieman-Stieljes, si verifica las siguientes condiciones:*

i. *$f(x)$ continua y $\alpha(x)$ monótona.*

ii. *$f(x)$ monótona y $\alpha(x)$ continua.*

Demostración:

i Basta observar que desde una partición, donde $\omega_r < \omega$, se tiene que

$$S - s = \sum \omega_r\delta_r < \omega \sum \delta_r = \omega[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon$$

eligiendo ω suficientemente pequeño, existe la integral generalizada de Riemann-Stieltjes, aunque $\alpha(x)$ sea discontinua, siendo monótona.

ii Asumiendo que $f(x)$ es creciente, por ejemplo, tenemos:

$$S - s = \sum \omega_r\delta_r < h \sum \omega_r = h[f(b) - f(a)]$$

donde $\delta_r < h$, es decir, $\alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1}) < h$, desde una partición en adelante si $\alpha(x)$ es continua.

Nota: En estas mismas hipótesis existen los límites según la norma, es decir, condiciones suficientes para la existencia de la integral de Riemann, bajo una norma $h \to 0$ en adelante, son $f(x)$ *continua* y $\alpha(x)$ *monótona*, o $f(x)$ *monótona* y $\alpha(x)$ *continua.*

1.2.3. Propiedades Fundamentales.

Las propiedades fundamentales de la integral de Rieman-Stieljes subsisten, con la salvedad de que ahora se interpretará $\delta_r = \alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})$.

Teorema 1.2.4. *Sea f una función integrable en el intervalo [a,b], entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Teorema del Valor Medio:*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \mu[\alpha(b) - \alpha(a)], \quad \text{con} \quad m < \mu < M$$

siendo m y M los extremos de $f(x)$ en (a.b).

2. *Permutación de extremos:*

$$\int_b^a f(x)d\alpha(x) = -\int_a^b f(x)d\alpha(x) \quad , \quad \int_a^a f(x)d\alpha(x) = 0$$

3. *Aditividad respecto del intervalo:*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x)$$

$$\int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x) + \int_b^a f(x)d\alpha(x) = 0.$$

4. *Linealidad respecto del integrando:*

$$\int_a^b kf(x)d\alpha(x) = k\int_a^b f(x)d\alpha(x);$$

$$\int_a^b \left[\sum_1^p f_n(x)\right] d\alpha(x) = \sum_1^p \int_a^b f_n(x)d\alpha(x).$$

5. *Linealidad respecto de la distribución $\alpha(x)$:*

$$\int_a^b f(x)d[k\alpha(x)] = k\int_a^b f(x)d\alpha(x);$$

$$\int_a^b f(x)\ d\left[\sum_1^p \alpha_n(x)\right] = \sum_1^p \int_a^b f(x)d\alpha_n(x).$$

6. *Propiedades de Monotonía:*

   Para $\alpha(x)$ creciente la integral de una función no negativa es no negativa, resulta entonces de la propiedad 4 por sustracción que:

$$\text{Si } f(x) \leq \varphi(x), \qquad \int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \int_a^b \varphi(x)d\alpha(x); \qquad (\alpha(x) \text{ creciente})$$

   observando que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, resulta,

$$-\int_a^b |f(x)|d\alpha(x) \leq \int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \int_a^b |f(x)|d\alpha(x); \qquad (\alpha(x) \text{ creciente})$$

   Además por la propiedad 1 y por ser $|f(x)| \leq \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$, resulta que

$$\int_a^b |f(x)|d\alpha(x) \leq \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|[\alpha(b) - \alpha(a)]; \qquad (\alpha(x) \text{ creciente})$$

7. *Continuidad de la Función Integral:*

   Sea $F(x) = \int_a^x f(x)d\alpha(x)$ su incremento, según la propiedad 1 y 3, puede expresarse de la siguiente manera:

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(x)d\alpha(x) = \mu[\alpha(x+h)-\alpha(x)]; \quad (m \leq \mu \leq M, \ \alpha(x) \text{ creciente})$$

   Si además $\alpha(x)$ es continua, este incremento es arbitrariamente pequeño tomando h sufientemente pequeño; luego $F(x)$ es continua si lo es $\alpha(x)$, y $f(x)$ es acotada. En cambio, es importante notar que la función integral de Stieltjes es discontinua en los puntos donde $f(x)$ es continua y no nula, si en ellos es $\alpha(x)$ discontinua.

Observación: En la propiedad (3), para la integral de Riemann, la existencia de las dos integrales del segundo miembro de la primera igualdad, no implica la del primero. Por ejemplo:

Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

para la integral de Riemann-Stieltjes, se tiene

$$\textstyle\int_0^1 f(x)d\alpha(x) = 1 \quad , \quad \int_1^2 f(x)d\alpha(x) = 0 \ ,$$

pero

$$\int_0^2 f(x)d\alpha(x) \quad \text{no} \quad \text{existe.}$$

Observación: Si la función $\alpha(x)$ tiene una cantidad finita de saltos en un punto de cada subintervalo de la partición, la integral de Riemann-Stieltjes puede expresarse como una combinación lineal de los valores de la función $f(x)$ en dichos puntos de discontinuidad, tomando como coeficientes los saltos asociados de $\alpha(x)$.

En efecto, consideremos que $\alpha(x)$ tiene un salto σ en ξ, esto es,

$$\begin{array}{ll} \alpha(x) = \eta & \text{para } x \leq \xi, \\ \alpha(x) = \eta + \sigma & \text{para } x > \xi, \end{array}$$

el salto se presenta en un solo intervalo, para cualquier punto x_r de partición, y en este es $\Delta\alpha = \sigma$, mientras en los restantes es $\Delta\alpha = 0$, luego las sumas por defecto y por exceso son $s = m_r\sigma$, $S = M_r\sigma$, donde m_r y M_r tienden a $f(\xi)$, siempre que $f(x)$ sea continua; por tanto, existe la integral, y vale:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sigma f(\xi)$$

En general, si son varios los puntos ξ_r de discontinuidad de la función escalonada $\alpha(x)$ con saltos σ_r en número finito, resulta análogamente:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sigma_1 f(\xi_1) + \sigma_2 f(\xi_2) + \cdots + \sigma_n f(\xi_n).$$

Así, la integral de Stieltjes permite expresar sumas finitas.

1.2.4. Funciones de Variación Acotada.

En este acápite veremos que al tomar a la función $\alpha(x)$ de variación acotada y $f(x)$ continua (o viceversa), la integral de Riemann-Stieltjes existe y sigue teniendo las propiedades antes descritas.

Definición 1.2.5. *Sea f una funcion definida en $\mathcal{C}[a,b]$, sea $\{t_i\}_{i=1}^n$ una sucesión finita tal que $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$, entonces la variación de f sobre [a,b], representada por $V_a^b(f)$ esta dada por:*

$$V_a^b(f) = \sup\left\{\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})| : t_k \in \{t_i\}_{i=1}^n\right\}$$

Definición 1.2.6. *Una función $f \in \mathcal{C}[a,b]$ es de variación finita (o de variación acotada) sobre [a,b] si*

$$V_a^b(f) = \sup\left\{\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})| : t_k \in \{t_i\}_{i=1}^n\right\} < +\infty$$

Proposición 1.2.7. *Sea f una función de variación acotada sobre $\mathcal{C}[a,b]$. Entonces existen funiones acotadas no decrecientes f_1 y f_2 tal que $f = f_1 - f_2$.*

La demostracion puede verse en [3]

Aunque hemos supuesto $\alpha(x)$ creciente, la descomposición de Jordan permite generalizar la integral de Stieltjes al caso en que $\alpha(x)$ es de ***variación acotada***, pues de (1.2.2) se deduce:

$$
(1.2.5) \qquad \begin{aligned}
\int_a^b f(x)d\alpha(x) &= \lim_{\pi} \Sigma\eta_r([\alpha_1(x_r) - \alpha_2(x_r)] - [\alpha_1(x_{r-1}) - \alpha_2(x_{r-1})]) \\
&= \lim_{\pi} \Sigma\eta_r[\alpha_1(x_r) - \alpha_1(x_{r-1})] - \lim_{\pi} \Sigma\eta_r[\alpha_2(x_r) - \alpha_2(x_{r-1})] \\
&= \int_a^b f(x)d\alpha_1(x) - \int_a^b f(x)d\alpha_2(x), \quad \text{con} \quad m_r \leq \eta_r \leq M_r
\end{aligned}
$$

existen, siempre que $f(x)$ sea continua, para el caso de la integral de Riemann, aunque, cabe también, que exista la integral de Stieltjes de una función $f(x)$ muy discontinua.

Así mismo escribiendo las fórmulas precedentes para α_1 y para α_2, y, restando las de cada par, quedan generalizadas las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes para distribuciones α de variación acotada.

Similarmente, el caso en que $f(x)$ es monótona y $\alpha(x)$ continua, admite análoga generalización, expresando $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, como diferencia de funciones crecientes, si es de variación acotada.

En resumen, los dos tipos fundamentales de existencia de la integral de Stieltjes son: $f(x)$ ***continua y*** $\alpha(x)$ ***de variación acotada, o viceversa***; ya que de uno se pasa al otro mediante integración por partes, es decir ambos son equivalentes y tienen todas las propiedades descritas en el apartado 1.2.4.

Propiedades de Monotonía.

Las propiedades de monotonía, descritas en 6. del apartado 1.2.4, que exigían $\alpha(x)$ creciente, quedan generalizadas de la siguiente manera:

Teorema 1.2.8. *Sea $V(x)$ la variación total de $\alpha(t)$en [a,x], representado por $V(x) = V_a^x \alpha(t)$, entonces*

$$
(1.2.6) \qquad \left| \int_a^b f(x)d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|dV(x) \leq \|f(x)\|_\infty V(b).
$$

Demostración

Si $P(x)$ y $N(x)$ son las variaciones positiva y negativa de $\alpha(t)$ en $[a,x]$, entonces $\alpha(x) = \alpha(a) + P(x) - N(x)$, y por la propiedad de linealidad de $\alpha(x)$ y la relación (1.2.5),tenemos

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)dP(x) - \int_a^b f(x)dN(x),$$

de donde, por propiedades 5. y 6. con $P(x) + N(x) = V(x)$, obtenemos:

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \left|\int_a^b f dP\right| + \left|\int_a^b f dN\right| \leq \int_a^b |f| dP + \int_a^b |f| dN = \int_a^b |f| dV.$$

Dado que $|f(x)| \leq \|f(x)\|_\infty$ y $V(a) = V_a^a \alpha(x) = 0$, se verifica:

$$\int_a^b |f| dV \leq \|f(x)\|_\infty V(b).$$

■

Nota: La primera desigualdad de (1.2.6), suele escribirse:

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)| \, |d\alpha(x)| \, .$$

Teorema 1.2.9. *Si $f(x)$ es continua y $\alpha(x)$ de variación acotada en [a,b], entonces*

$$F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t).$$

es también de variación acotada en [a.b] y

$$V_F(x) \equiv V_a^x F(t) \leq \int_a^x |f(t)||d\alpha(t)|.$$

Valor de la integral ante la naturaleza de las funciones $f(x)$ y $\alpha(x)$.

El siguiente teorema muestra que el valor de la integral de Riemann-Stieljes no cambia al modificar $\alpha(x)$ en un conjunto numerable, siempre que siga siendo de variación acotada.

Teorema 1.2.10. *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, $\alpha(x)$ de variación acotada en $[a, b]$ y toma un valor constante k en un conjunto C que incluye a y b y es denso en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = 0.$$

Por tanto, si $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$, de variación acotada, difieren en una constante k en el conjunto C, tenemos

$$\int_a^b f(x)d\alpha_1(x) = \int_a^b f(x)d\alpha_2(x).$$

Demostración.

Tomando particiones $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ en el conjunto C, donde $\alpha(x_r)$ para $r = 1, 2, \cdots, n$ es constante y $\delta_r = \alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})$, es evidente que

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{h\to 0} \sum \eta_r \delta_r = 0.$$

$\blacksquare$

Teorema 1.2.11. *Si $\alpha(x)$ es creciente en $[a, b]$, y estrictamente creciente en $n + 1$ puntos, por lo menos, y $f(x) \geq 0$ es continua y tiene a lo más n ceros en (a, b) entonces*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) > 0.$$

Demostración.

Existe al menos un punto x_0 donde $\alpha(x)$ es estrictamente creciente y $f(x)$ no se anula, entonces existe un entorno E de x_0, o semientorno en el caso de que $x_0 = a$ o $x_0 = b$, de extremos β, γ, tal que

$$m_E = \min_{\beta\leq x\leq\gamma} f(x) > 0,\ \Delta\alpha(x) = \alpha(\gamma) - \alpha(\beta) > 0$$

y

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) > \int_a^\gamma f(x)d\alpha(x) > m_E\Delta\alpha(x) > 0.$$

$\blacksquare$

Definición 1.2.12. *La función normalizada de una función de variación acotada $\alpha(x)$ en $[a, b]$, representada por $\alpha^*(x)$, esta dada por:*

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = a \\ \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0^+} \alpha(x) + \lim_{x\to 0^-} \alpha(x)\right] - \alpha(a) & si\ a < x < b \\ \alpha(b) - \alpha(a) & si\ x = b \end{cases}$$

Teorema 1.2.13. *Si $f(x)$ es continua, $\alpha(x)$ de variación acotada en $[a, b]$ y $\alpha^*(x)$ su función normalizada, entonces*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha^*(x).$$

La normalización de una distribución $\alpha(x)$ no altera el valor de la integral de una función continua, pues por teorema 1.2.10 se tiene

$$\int_a^b f(x)d[\alpha(x) - \alpha(a) - \alpha^*(x)] = 0.$$

1.3. Funcionales en $\mathcal{C}[a,b]$

En esta sección mostraremos que cada funcional lineal en $\mathcal{C}[a,b]$ se puede escribir como una integral de Stieltjes y además puede extenderse de manera única al conjunto de la diferencia de dos funciones que son límites de sucesiones crecientes y acotadas en $\mathcal{C}[a,b]$. Iniciaremos enunciando las condiciones que caracterizan la linealidad de un funcional en $\mathcal{C}[a,b]$, lo consideraremos con la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida.

Definición 1.3.1. *Sea $\mathcal{C}[a,b]$ el conjunto de las funciones reales continuas sobre el intervalo [a,b]. Una aplicación que asigna a cada elemento f de $\mathcal{C}$ un número real* $\mathrm{T}(f)$, $\mathrm{T}:\mathcal{C}[a,b]\to\mathbb{R}$, *se dice que es un funcional lineal si verifica que es:*

i. Aditiva: $\mathrm{T}(f_1+f_2)=\mathrm{T}(f_1)+\mathrm{T}(f_2), \quad \forall\ f_1,f_2\in\mathcal{C}[a,b]$

ii. Homogénea: $\mathrm{T}(cf)=c\mathrm{T}(f),\ \forall\ f\in\mathcal{C}[a,b]$ *y* $\ \forall\ c\in\mathbb{R}$

iii. Acotada: Existe una constante M tal que

$$|\mathrm{T}(f)|\leq M\|f(x)\|_\infty.$$

La integral de Riemann-Stieltjes, $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, con $\alpha(x)$ fija y de variación acotada, siempre define un funcional lineal, comprobaremos una por una las condiciones de la definición 1.3.1:

i.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))d\alpha(x) &= \lim_\pi \Sigma(f_1(\xi_r)+f_2(\xi_r))\delta_r\\ &= \lim_\pi \Sigma f_1(\xi_r)\delta_r + \lim_\pi \Sigma f_2(\xi_r)\delta_r\\ &= \int_a^b f_1(x)d\alpha(x)+\int_a^b f_2(x)d\alpha(x)\end{aligned}$$

ii.

$$\int_a^b (cf(x))d\alpha(x)=\lim_\pi \Sigma(cf(\xi_r))\delta_r=\lim_\pi c\Sigma f(\xi_r)\delta_r = c\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

iii.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| &= \left|\lim_\pi \Sigma f(\xi_r)\delta_r\right| \leq \lim_\pi \Sigma|f(\xi_r)\delta_r|\\ &\leq \max|f(x)|.\mathtt{V}_a^b(\alpha)=\mathtt{V}_a^b(\alpha)\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

donde $\mathtt{V}_a^b(\alpha)$ es la variación total de $\alpha(x)$.

Por tanto, la integral de Riemann-Stieltjes, es aditiva, homogénea y acotada.

De hecho, cada funcional lineal en el espacio de las funciones continuas en $[a,b]$, se puede escribir como una integral de Stieltjes. A continuación mostraremos este hecho.

Definición 1.3.2. *Llamaremos $\mathcal{A}[a,b]$ al conjunto formado por la diferencia de dos funciones que a su vez son límite de sucesiones crecientes y acotadas en $\mathcal{C}[a,b]$*

Teorema 1.3.3. *Sea* T *un funcional lineal definido en $\mathcal{C}[a,b]$, entonces* T *se extiende de manera única en $\mathcal{A}[a,b]$ y además*

$$|T(f)| \leq \|T\| \|f\|_\infty$$

Demostración. Consideremos una función $f(x)$ como el límite de una sucesión $\{f_n(x)\}$ creciente y acotada, denotemos por B a una cota de dicha sucesión. Demostraremos que el límite de $\mathrm{T}(f_n)$ existe independientemente de la sucesión de funciones que se escoja y que T extendido a $\mathcal{A}[a,b]$ sigue siendo un funcional lineal.

Para ello es suficiente probar que la serie $\sum_{k=2}^{\infty} |\mathrm{T}(f_k) - \mathrm{T}(f_{k-1})|$ converge absolutamente, con una elección adecuada de signo se cumple que la suma parcial de la serie anterior es la imagén, a través de T, de la suma parcial de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \pm[f_k(x) - f_{k-1}(x)]$, esto es,

$$\mathrm{T}\left(\sum_{k=2}^{n} \pm[f_k(x) - f_{k-1}(x)]\right) = \sum_{k=2}^{n} |\mathrm{T}(f_k) - \mathrm{T}(f_{k-1})|.$$

Dado que T es un operador acotado, bastará probar que las funciones incluidas en el miembro izquierdo de la expresión anterior estará acotado, independientemente de la elección de signo y de n, tomando en cuenta la monotonía de $\{f_n\}$ se verifica facilmente que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=2}^{n} \pm[f_k(x) - f_{k-1}(x)]\right| &\leq \sum_{k=2}^{n} |\pm[f_k(x) - f_{k-1}(x)]| \\ &= [f_2(x) - f_1(x)] + [f_3(x) - f_2(x)] + \cdots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] \\ &= f_n(x) - f_1(x) \qquad (1.3.1) \end{aligned}$$

De lo cual se deduce que

$$\left\|\sum_{k=2}^{n} \pm[f_k(x) - f_{k-1}(x)]\right\|_\infty \leq \|f_n - f_1\|_\infty < 2B$$

De lo anterior concluimos que la serie

$$\mathrm{T}(f_1) + (\mathrm{T}(f_2) - \mathrm{T}(f_1)) + (\mathrm{T}(f_3) - \mathrm{T}(f_2)) + \cdots$$

es absolutamente convergente. Así $\mathrm{T}(f_n)$ tiende a un límite finito.

En resumen, si una sucesión $f_n(x)$ de funciones crecientes y acotadas converge a una función acotada $f(x)$, entonces $\mathrm{T}(f_n)$ también converge a un límite finito, designaremos este valor límite por $\mathrm{T}(f)$, donde f no es necesariamente continua.

A continuación probaremos que este límite es único y existe independientemente de la sucesión que se eliga; supongamos que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son dos sucesiones crecientes de funciones continuas que tienen el mismo límite f. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que dichas sucesiones están aumentando en sentido estricto, es decir, $f_n < f_{n+1}$, $g_n < g_{n+1}$; fijando un elemento f_m y recorriendo la segunda sucesión, tendremos que a partir de cierto índice $f_m < g_n$. De hecho si este no fuera el caso, los puntos x tal que

$$f_m(x) \geq g_1(x), f_m(x) \geq g_2(x), \cdots$$

constituirían una sucesión anidada de cerrados,no vacío y existirá al menos un punto x^* incluido en todos los conjuntos. Así, tendríamos

$$f_m(x^*) \geq \lim g_n(x) = f(x^*)$$

lo que contradice la hipótesis de que $f_m < f$.

Siguiendo un razonamiento análogo, existe para cada g_m una infinidad de funciones más grande f_n. Por lo tanto podemos formar una sucesión creciente $f_{m_1} < g_{m_2} < f_{m_3} < g_{m_4} < \cdots$ tendiendo a f, y la sucesión de valores que le corresponden en virtud del funcional T tiende a un límite definido, que coincide con $\lim \mathrm{T}(f_n) = \lim \mathrm{T}(g_n)$. ∎

Así, hemos demostrado que el funcional es único para cada función acotada y es el límite de una sucesión creciente de funciones continuas.

Consideremos, ahora, funciones del tipo definido en $\mathcal{A}[a,b]$, esto es, funciones $f-g$, para $f,g \in \mathcal{C}[a,b]$, tales que son límite de sucesiones crecientes y acotadas. Al igual que en el caso de la integral de Lebesque, la relación $f-g$ puede expresarse como, $f-g = f_1 - g_1$, a su vez esto es $f + g_1 = f_1 + g$; por la linealidad del funcional T, tenemos

$$\mathrm{T}(f) + \mathrm{T}(g_1) = \mathrm{T}(f + g_1) = \mathrm{T}(f_1 + g) = \mathrm{T}(f_1) + \mathrm{T}(g),$$

así, $\mathrm{T}(f) - \mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(f_1) - \mathrm{T}(g_1)$, luego $\mathrm{T}(f-g) = \mathrm{T}(f) - \mathrm{T}(g)$.

Evidentemente, el funcional extendido a $\mathcal{A}[a,b]$ es aditivo y homogéneo; demostraremos que sigue siendo acotado:

Sea $\mu = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x) - g(x)|$, la cota superior de una sucesión de funciones en $\mathcal{A}[a,b]$. Consideremos dos sucesiones crecientes, continuas, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$, que convergen a f y a g, respectivamente. Formemos funciones auxiliares $h_n(x)$ tales que

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } -\mu \leq f_n(x) - g_n(x) \leq \mu \\ g_n(x) + \mu, & \text{si } f_n(x) - g_n(x) > \mu \\ g_n(x) - \mu, & \text{si } f_n(x) - g_n(x) < -\mu \end{cases} .$$

Luego, las funciones $h_n(x)$ son continuas y tienden cada vez más a f. Por otra parte, observemos que

$$\sup_{a\leq x\leq b} |h_n(x) - g_n(x)| \leq \mu$$

En consecuencia, tenemos

$$|\mathrm{T}(f-g)| = \left|\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}(h_n) - \mathrm{T}(g_n)\right| = \lim_{n\to\infty} |\mathrm{T}(h_n - g_n)| \leq M_{\mathrm{T}}\mu$$

■

1.4. Teorema de Riesz

El dominio del funcional lineal T, definido en 1.3.1, puede extenderse a ciertas funciones con pocas discontinuidades. Sea $\mathcal{R}[a,b]$ el conjunto formado por este tipo de funciones; si $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces su combinación lineal también esta en $\mathcal{R}[a,b]$.

Sea $f_{c,d}(x)$ la función característica en el intervalo $c \leq x \leq d$, tal que $f_{c,d}(x) = \lim_n f_n(x)$, donde $\{f_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones continuas y está dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin (c-\frac{1}{n}, d+\frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si } x \in (c,d) \\ n(x-c)+1 & \text{si } x \in [c-\frac{1}{n}, c] \\ n(d-x)+1 & \text{si } x \in [d, d+\frac{1}{n}] \end{cases}$$

Definamos la función $\alpha(x) = \mathrm{T}(f_{a,x})$ para $a < x \leq b$ y $\alpha(a) = 0$, Demostraremos que la función $\alpha(x)$ es de variación acotada y que su variación total no supera la norma M_{T}.

Dividamos el intervalo (a,b) de la forma habitual y consideremos

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = \mathrm{T}(f(x)),$$

donde

$$f(x) = \varepsilon_1 f_{a,x_1}(x) + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k \left[f_{a,x_k}(x) - f_{a,x_{k-1}}(x)\right],$$

y $\varepsilon_k = -1, 0$, o 1 de acuerdo con el signo de $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$. Esta función, al ser una combinación lineal de las funciones f_{a,x_k}, pertenece a $\mathcal{R}[a,b]$ y $|f(x)| \leq 1$, en consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = \mathrm{T}(f(x)) \leq M_{\mathrm{T}}.$$

Luego,

$$\limsup \sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = \limsup \mathrm{T}(f(x)) \leq M_{\mathrm{T}}.$$

Así queda demostrado que la variación total de $\alpha(x)$ es menor o igual que M_{T}. ■

Ahora consideremos que $f(x)$ es una función continua, particionando el intervalo (a, b) y denotando por ξ_k uno de los puntos del intervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$. Definamos la función $\varphi(x)$ tal que $\varphi(a) = f(\xi_1)$ y $\varphi(x) = f(\xi_k)$ para $x_{k-1} < x \leq x_k$, es evidente que esta función está en $\mathcal{R}[a, b]$ y puede expresarse de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = f(\xi_1) f_{a,x_1}(x) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)[f_{a,x_k}(x) - f_{a,x_{k-1}}(x)].$$

En consecuencia,

$$\mathrm{T}(\varphi) = f(\xi_1)\alpha(x_1) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

dado que $\alpha(x_0) = \alpha(a) = 0$ obtenemos

$$\mathrm{T}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

Observese que el segundo miembro de la expresión anterior, es la sumatoria del segundo miembro de la expresión (1.2.2) asociada a la integral de Stieltjes.

Por otro lado, denotando por ω la oscilación máxima de f en los intervalos de subdivisión, tenemos $|f(x) - \varphi(x)| \leq \omega$, por lo tanto,

$$|\mathrm{T}(f) - \mathrm{T}(\varphi)| = |\mathrm{T}(f - \varphi)| \leq \omega M_{\mathrm{T}}.$$

Para $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$, $\omega \to 0$, de aquí se deduce que $\mathrm{T}(\varphi) \to \mathrm{T}(f)$. Luego

$$\mathrm{T}(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

además la variación total de $\alpha(x)$ es una cota del funcional, así

$$V_a^b(\alpha(x)) \geq M_{\mathrm{T}}.$$

Pero, a su vez, Variación $V_a^b(\alpha(x)) \leq M_{\mathrm{T}}$, por lo que $V_a^b(\alpha(x)) = M_{\mathrm{T}}$. ■

Todo lo expuesto anteiormente puede resumirse en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.1. *La integral de Stieltjes*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

formado con una función fija de variación acotada $\alpha(x)$, define un funcional lineal en el espacio $\mathcal{C}$ de funciones continuas $f(x)$, y a la inversa, cada funcional lineal puede expresarse como una integral de Stieltjes.

Observación: El teorema sigue siendo válido para el espacio de funciones continuas con valores complejos, con la misma definición de norma, $\|f\| = \text{máx}\,|f(x)|$. Por supuesto, la función de variación acotada $\alpha(x)$, puede tener valores complejos, así como el funcional lineal $\mathrm{T}(f)$ y, además, la propiedad $\mathrm{T}(cf) = c\mathrm{T}(f)$ también debe exigirse para el coeficiente complejo c.

Comentario:

En la demostración del teorema de Riesz, hemos construidos funcionales lineales continuos, extendiendo el espacio $\mathcal{C}[a, b]$ al $\mathcal{A}[a, b]$, a través del límite de funciones continuas y acotadas. En general, siempre es posible extender un funcional lineal de un subespacio topológico Y a un espacio topológico X, en donde $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Sin embargo, si el funcional es continuo, no hay razón, a priori, para suponer que tales extensiones también sean continuas, a menos que el subespacio Y este complementado topológicamente en X. El ***teorema de Hahn-Banach*** nos garantiza que siempre existe la posibilidad de construir funcionales lineales continuos en los espacios normados abstractos, este teorema es uno de los resultados fundamentales del análisis funcional.

Capítulo 2

El Teorema de Representación de Riesz

En este capítulo desarrollaremos el teorema de Riesz, para espacios de funciones sobre espacios localmente compactos, el cuál asegura que cada funcional lineal positivo en un espacio localmente compacto, queda representado por una medida de Borel positiva regular sobre el mismo espacio. Esencial para la prueba son ciertas propiedades topológica de $\mathbb{R}^n$ que detallaremos a continuación.

2.1. Preliminares Topológicos

Definición 2.1.1. *Un espacio topológico es un conjunto* X *dotado de una colección,* τ*, de subconjuntos de* X*, que sastiface las siguientes propiedades:*

i) $\emptyset, \mathrm{X} \in \tau$

ii) La intersección finita de elementos de τ *está en* τ*,esto es,*

$$\{V_i\}_{i=1}^n \in \tau \longrightarrow \bigcap_{i=1}^n V_i \in \tau$$

iii) La unión arbitraria de elementos de τ *esta en* τ*;*

$$\{V_\alpha\} \in \tau \longrightarrow \bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$$

τ *se llama topología de* X

Definición 2.1.2. *Un espacio topológico* X *se dice de Hausdorff si para cualquiera dos puntos distintos* p *y* q *de* X *existen dos abiertos disjuntos* U *y* V *de* X *tales que* $p \in U$ *y* $q \in V$*.*

Definición 2.1.3. *Un subconjunto* K *de un espacio topológico* X *se dice compacto si cada cubrimiento abierto de* K *contiene un número finito de sub-cubierta. Es decir, si* $\{V_\alpha\}$ *es una colección de conjuntos abiertos, cuya unión contiene a* K*, entonces la unión de alguna subcolección finita de* $\{V_\alpha\}$ *también contiene a* K*. En particular si* X *es en sí compacto, entonces se llama un Espacio Compacto.*

Definición 2.1.4. *Un espacio topológico* X *se dice localmente compacto si cada punto de* X *tiene un entorno cuya clausura es compacto. Es evidente que todo espacio compacto es localmente compacto.*

De acuerdo al teorema de Heine-Borel todo subconjunto compacto del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, por lo que cualquier par de puntos de $\mathbb{R}^n$ tiene entornos disjuntos cuya clausura es compacto, es decir, $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto. También, cada espacio métrico es un espacio de Hausdorff.

Teorema 2.1.5. *Sean* K *un conjunto compacto y* F *un conjunto cerrado de un espacio topológico* X*. Si* $\mathrm{F} \subset \mathrm{K}$*, entonces* F *es compacto.*

Demostración: Sea $\{V_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de F y sea $W = \mathrm{F}^c$, entonces $W \cup (\cup_\alpha V_\alpha)$ cubre a X, así existe una colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$ tal que

$$\mathrm{K} \subset W \cup V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$$

y dado que $\mathrm{F} \subset \mathrm{K}$,tenemos que

$$\mathrm{F} \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}.$$

Luego F es compacto. ■

Teorema 2.1.6. *Supongamos que* X *es un espacio de Hausdorff,* $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$*,* K *compacto y* $p \in \mathrm{K}^c$*. Entonces existen conjuntos abiertos disjuntos* U *y* W *tal que* $p \in \mathrm{U}$ *y* $\mathrm{K} \subset \mathrm{W}$*.*

Demostración: Dado que el compacto K está contenido en el espacio de Hausdorff, entonces para cualquier punto $q \in \mathrm{K}$, existen conjuntos abiertos disjuntos U_q y V_q, tal que $p \in \mathrm{U}_q$ y $q \in \mathrm{V}_q$. Además, por la compacidad de K hay una colección finita de puntos en K tal que

$$\mathrm{K} \subset V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n}.$$

Luego, los conjuntos que satisfacen la hipótesis del teorema son

$$\mathrm{U} = U_{q_1} \cap \cdots \cap U_{q_n} \quad \text{y} \quad \mathrm{W} = V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n}.$$

■

Corolario 2.1.7. *Sea* X *un espacio de Hausdorff, todo subconjunto de* X*, verifica lo siguiente:*

a. Si $K \subset \mathrm{X}$ *es compacto,* K *es cerrado.*

b. Si $\mathrm{F}, \mathrm{K} \in \mathrm{X}$*, donde* F *es cerrado y* K *compacto, entonces* $\mathrm{F} \cap \mathrm{K}$ *es compacto.*

Demostración:

a. Por la compacidad de K en el espacio de Hausdorff, existe una colección finita de conjuntos abiertos $\{V_{q_i}\}_{i=1}^{n}$ tal que

$$K \subset V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n},$$

luego

$$K \subset K^c \cup \ (\cup_{i=1}^{n} V_{q_i}).$$

Se tiene que para cada $p \in K^c$ existe un conjunto abierto U_q, tal que $U_p \subset K^c$. Por tanto K^c es abierto, así queda demostrado que K es cerrado.

b. Dado que F es cerrado y K compacto por la parte (a) del corolario K es cerrado, luego, $F \cap K$ es cerrado y por teorema 2.1.5 se deduce que $F \cap K$ es compacto. ■

Teorema 2.1.8. *Si* $\{K_\alpha\}$ *es una colección arbitraria de subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff y si* $\cap_\alpha K_\alpha = \emptyset$*, entonces alguna subcolección finita* $\{K_\alpha\}$ *también tiene intersección vacía.*

Demostración: Definamos $V_\alpha = K_\alpha^c$. Fijemos un miembro K_1 de $\{K_\alpha\}$. Puesto que ningún punto de K_1 pertenece a cada K_α, $\{V_\alpha\}$ es un cubrimiento abierto de K_1. Por lo tanto $K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$ para alguna colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$. Esto implica que

$$K_1 \ \cap \ K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n} = \emptyset.$$

■

Teorema 2.1.9. *Sea* U *un abierto en un espacio de Hausdorff localmente compacto* X, $K \subset U$ *y* K *compacto. Entonces existe un conjunto abierto* V *con clausura compacta tal que*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

Demostración: Dado que todos los puntos de K tienen un entorno con clausura compacta, y además K esta cubierta por la unión de un número finito de estos entornos, k se encuentra en un conjunto abierto G con clausura compacta. Si $U = X$, tomar $V = G$.

De lo contrario, sea $C = U^c$. El teorema 2.1.6 muestra que a cada $p \in C$ le corresponde un conjunto abierto W_p tal que $K \subset W_p$ y $p \notin \overline{W}_p$. Por lo tanto $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p\}$, donde p varía sobre C, es una colección de conjuntos compactos disjuntos. Por teorema 2.1.8 existen puntos $p_1, \cdots, p_n \in C$ tal que

$$C \ \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \cdots \ \cap \overline{W}_{p_n} = \emptyset.$$

Luego el conjunto

$$V = G \cap W_{p_1} \cap \cdots \cap W_{p_n}.$$

es un conjunto abierto cuya clausura es compacta, puesto que

$$\overline{V} \subset \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \cdots \cap \overline{W}_{p_n}.$$

■

Proposición 2.1.10. *Sea* X *un espacio de Hausdorff, y sea K y L subconjuntos compactos disjuntos de* X*. Entonces hay subconjuntos abiertos disjuntos* U *y* V *de* X *tal que* $K \subset \mathrm{U}$ *y* $L \subset \mathrm{V}$*.*

Demostración: Consideremos primero el caso en que K contiene exactamente un punto, digamos x. Por cada y en L hay un par U_y y V_y de conjuntos abiertos disjuntos tal que $x \in \mathrm{U}_y$ y $y \in \mathrm{V}_y$(recordemos que X es Hausdorff). Como L es compacto, existe una familia finita $y_1, \cdots, y_n$ de tal manera que los conjuntos $\mathrm{V}_{y_1}, \cdots, \mathrm{V}_{y_n}$ cubren a L. Los conjuntos U y V definidos por $\mathrm{U} = \cap_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{y_i}$ y $\mathrm{V} = \cup_{i=1}^{n} \mathrm{V}_{y_i}$ son los conjuntos abiertos requeridos.

Consideremos ahora el caso donde K tiene más de un elemento. Acabamos de demostrar que para cada x en K existen conjuntos abiertos disjuntos, digamos U_x y V_x tal que $x \in \mathrm{U}_x$ y $L \subset \mathrm{V}_x$. Como K es compacto, existe una familia finita $x_1, \cdots, x_k$ tal que $\mathrm{U}_{x_1}, \cdots, \mathrm{U}_{x_k}$ cubre a K. La prueba queda completada si definimos U y V por

$$\mathrm{U} = \cup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_{x_i} \text{ y } \mathrm{V} = \cap_{i=1}^{k} \mathrm{V}_{x_i}$$

■

Proposición 2.1.11. *Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto que tiene una base numerable para su topología. Entonces cada subconjunto abierto de* X *es un* F_σ*(unión de una sucesión de subconjuntos cerrados de* X*), y de hecho es la unión de una sucesión de conjuntos compactos. Del mismo modo, cada subconjunto cerrado de* X *es un* G_δ*(intersección de una sucesión de conjuntos abiertos de* X*).*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{U}$ es una base numerable de la topología de X. Sea U un subconjunto abierto de X, y sea $\mathcal{U}_{\mathrm{U}}$ la colección de los conjuntos V en $\mathcal{U}$ para los cuales $\overline{V}$ es compacto y se incluye en U. La proposición 2.1.9 implica que U es la unión de la clausura de los conjuntos en $\mathcal{U}_{\mathrm{U}}$ (los entornos abiertos previstos por la proposición 2.1.9 se puede sustituir por conjuntos más pequeños que pertenecen a $\mathcal{U}$). Por lo tanto U es la unión de una colección numerable de conjuntos que son cerrados y, de hecho, compacto.

Ahora bien, supongamos que C es un subconjunto cerrado de X. Entonces C^c es abierto, por lo que es la unión de una sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados. En consecuencia C es la intersección de los conjuntos abiertos F_n^c, para $n = 1, 2, \cdots$ ■

Proposición 2.1.12. *Cada espacio de Hausdorff localmente compacto que tiene una base numerable para su topología es* $\sigma -$ *compacto.*

Demostración: Dado un espacio topológico es un subconjunto abierto de sí mismo, esta proposición es un corolario inmediato de la proposición anterior. ■

Definición 2.1.13. *El soporte de una función compleja f en un espacio topológico* X *es la clausura del conjunto*

$$\{x : f(x) \neq 0\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$, *la colección de todas las funciones continuas complejas en* X *con soporte compacto. Notese que* $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ *es un espacio vectorial, ya que se verifica:*

i. Si $f, g \in \mathcal{C}(\mathrm{X})$, *la suma sigue siendo una función continua compleja, esto es,* $(f + g) \in \mathcal{C}(\mathrm{X})$, *así también los múltiplos escalares de funciones continuas complejas siguen siendo continuas, es decir,* $(cf) \in \mathcal{C}(\mathrm{X})$, *para* $f \in \mathcal{C}(\mathrm{X})$.

ii. El soporte de $(f + g)$ *se encuentra en la unión del soporte de* f *y el soporte de* g, *y cualquier unión finita de conjuntos compactos es compacto.*

Definición 2.1.14. *Si* $K \subset \mathrm{X}$ *compacto,* f *una función en* $\mathcal{C}_c(X)$, *tal que* $0 \leq f(x) \leq 1$, *para todo* $x \in \mathrm{X}$ *y* $f(x) = 1$, *para todo* $x \in \mathrm{K}$, *entonces dicha relación se denotará por* $K \prec f$. *Por otro lado, si* V *es un abierto,* $0 \leq f \leq 1$ *para* $f \in \mathcal{C}_c(X)$ *y el soporte de* f *está en* V, *entonces tal condición se representará por* $f \prec V$. *En caso de que ambas relaciones se verifiquen la notación que se utilizará es* $K \prec f \prec V$.

Lema 2.1.15. *(Lema de Urysohn's): Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto,* V *es abierto en* X, K *compacto y* $\mathrm{K} \subset \mathrm{V}$. *Entonces existe una función* $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ *tal que* $K \prec f \prec V$.

Demostración: Tomemos $r_1 = 0, r_2 = 1$, y sea $r_3, r_4, r_5, \cdots$ una enumeración de racionales en $(0, 1)$. Por teorema 2.1.9, podemos encontrar conjuntos abiertos V_0 y V_1 tal que $\overline{\mathrm{V}}_0$ es compacta y

$$(1) \quad \mathrm{K} \subset \mathrm{V}_1 \subset \overline{\mathrm{V}}_1 \subset \mathrm{V}_0 \subset \overline{\mathrm{V}}_0 \subset \mathrm{V}.$$

Supongamos $n \geq 2$ y $\mathrm{V}_{r_1}, \cdots, \mathrm{V}_{r_n}$ han sido escogidos de tal manera que $r_i < r_j$ implica $\overline{\mathrm{V}}_{r_j} \subset \mathrm{V}_{r_i}$. Entonces uno de los números $r_1, \cdots, r_n$, digamos r_i, será el más grande menor que r_{n+1}, y otro, por ejemplo r_j, será el más pequeño mayor que r_{n+1}. Usando el teorema 2.1.9 de nuevo, podemos encontrar $\mathrm{V}_{r_{n+1}}$ de manera que

$$\overline{\mathrm{V}}_{r_j} \subset \mathrm{V}_{r_{n+1}} \subset \overline{\mathrm{V}}_{r_{n+1}} \subset \mathrm{V}_{r_i}.$$

Continuando, se obtiene una colección $\{V_r\}$ de conjuntos abiertos, uno para cada racional $r \in [0, 1]$, con las siguientes propiedades:

a. $\mathrm{K} \subset \mathrm{V}_1$,

b. $\overline{\mathrm{V}}_0 \subset \mathrm{V}$,

c. Cada $\overline{\mathrm{V}}_r$ es compacto,

d. $s > r$ implica $\overline{\mathrm{V}}_s \subset \mathrm{V}_r$ (2)

Definamos

$$f_r(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in \mathrm{V}_r \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$g_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{\mathrm{V}}_s \\ s & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

y

$$f = \sup_r f_r, \; g = \inf_s g_s \quad (4).$$

Es claro que $0 \leq f \leq 1$, que $f(x) = 1$ si $x \in \mathrm{K}$, y que $f(x)$ tiene su soporte en $\overline{\mathrm{V}}_0$. La prueba queda completada mostrando que $f = g$.

La desigualdad $f_r(x) > g_s(x)$ sólo es posible si $r > s$, $x \in \mathrm{V}_r$, y $x \notin \overline{\mathrm{V}}_s$. Pero $r > s$ implica $\mathrm{V}_r \subset \mathrm{V}_s$. Por lo tanto $f_r \leq g_s$ para todo r y s, así $f \leq g$.

Supongamos $f(x) < g(x)$ para algún x. Entonces existen racionales r y s tal que $f(x) < r < s < g(x)$. Como $f(x) < r$, tenemos $x \notin \mathrm{V}_r$. Además, dado que $g(x) > s$, tenemos $x \in \overline{\mathrm{V}}_s$. Por (2) esto es una contradicción. Por tanto $f = g$. ■

Teorema 2.1.16. *Partición de la unidad: Suponga que* $\mathrm{V}_1, \cdots, \mathrm{V}_n$ *son subconjuntos abiertos de un espacio de Hausdorff localmente compacto* X*;* K *es compacto, y*

$$\mathrm{K} \subset \mathrm{V}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_n.$$

Entonces existen funciones $h_i \prec \mathrm{V}_i$*, para* $i = 1, \cdots, n$*, tal que*

$$h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x) = 1 \quad (x \in \mathrm{K}).$$

A la colección $\{h_i\}_{i=1}^n$ *es llamada partición de la unidad de* K*, subordinada a la cubierta* $\{\mathrm{V}_i\}_{i=1}^n$.

Demostración: Por teorema 2.1.9, cada $x \in \mathrm{K}$ tiene un entorno W_x con clausura compacta $\overline{\mathrm{W}}_x \subset \mathrm{V}_i$ para algún i. Hay puntos $x_1, \cdots, x_m$ tal que $\mathrm{W}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathrm{W}_{x_m} \supset \mathrm{K}$. Si $1 \leq i \leq n$, sea H_i la unión de los $\overline{\mathrm{W}}_{x_j}$ que se encuentran en V_i. Por lema de Urysohn´s existen funciones g_i tales que $\mathrm{H}_i \prec g_i \prec \mathrm{V}_i$. Definamos

$$h_1 = g_1$$

$$h_2 = (1 - g_1) g_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_n = (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{n-1}) g_n.$$

Entonces $h_i \prec \mathrm{V}_i$. Se comprueba fácilmente, por inducción, que

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n).$$

Dado que $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{H}_n$, al menos una $g_i(x) = 1$ en cada punto $x \in \mathrm{K}$, así obtenemos que

$$h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x) = 1$$

■

2.2. Propiedades de Regularidad de la medida de Borel

En esta sección estudiaremos la propiedad de regularidad de una medida en un Espacio de Hausdorff localmente compacto, dicha propiedad permite muchas aproximaciones y cálculos que serían imposibles sin ella. En particular, los funcionales lineales positivos pueden representarse utilizando medidas regulares.

En espacios de Hausdorff localmente compactos más complicados, existen medidas de Borel finitas que no son regulares. Sin embargo, para un espacio de Hausdorff localmente compacto que tiene una base numerable con una medida de Borel finita en un conjunto compacto la medida es regular.

Definición 2.2.1. *A la terna* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *que consiste de un conjunto* X*, una* $\sigma - algebra$ $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X *y una medida* μ *sobre* $\mathcal{A}$ *es llamado espacio de medida.*

Proposición 2.2.2. *Sea* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida*

a) Si $\{A_k\}$ *es una sucesión creciente de conjuntos que pertenecen a* $\mathcal{A}$*, entonces*

$$\mu(\cup_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$$

b) Si $\{A_k\}$ *es una sucesión decreciente de conjuntos que pertenecen a* $\mathcal{A}$*, y si* $\mu(A_n) < +\infty$ *para algún* n*, entonces*

$$\mu(\cap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$$

Demostración: Primero consideremos que $\{A_k\}$ es una sucesión creciente de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, y definamos una sucesión $\{B_j\}$ donde $B_1 = A_1$ y $B_j = A_j - A_{j-1}$ para $j > 1$. Estos conjuntos, así construidos son disjuntos, pertenecen a $\mathcal{A}$ y satisfacen $A_k = \cup_{j=1}^{k} B_j$ para cada k. De ello se deduce que $\cup_k A_k = \cup_j B_j$ y por tanto

$$\mu(\cup_k A_k) = \sum_j \mu(B_j) = \lim_k \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_k \mu(\cup_{j=1}^{k} B_j) = \lim_k \mu(A_k)$$

Esto completa la prueba de (a).

Ahora supongamos que $\{A_k\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ y que $\mu(A_n) < +\infty$ para algún n, podemos suponer que $n = 1$. Para cada k sea $C_k = A_1 - A_k$. Entonces $\{C_k\}$ es una sucesión creciente de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, y $\cup_k C_k = A_1 - (\cap_k A_k)$. Luego, se sigue de la parte (a) que $\mu(\cup_k C_k) = \lim_k \mu(C_k)$ y por tanto

$$\mu(A_1 - (\cap_k A_k)) = \lim_k mu(A_1 - A_k) = \mu(A_1) - \lim_k \mu(A_k), \quad \text{donde} \quad \mu(A_1) < +\infty$$

Así concluimos que

$$\mu(\cap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k).$$

■

Definición 2.2.3. *Sea* $(\mathrm{Y}, \mathcal{B})$ *un espacio medible y sea* $\mathcal{B}_0$ *la colección de subconjuntos de* Y*, entonces* $\sigma(\mathcal{B}_0)$ *representa la* $\sigma - algebra$ *sobre* Y *más pequeña que incluye a* $\mathcal{B}_0$*, frecuentemente se le llama* $\sigma - algebra$ *generada por* $\mathcal{B}_0$.

Definición 2.2.4. *Sean* $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ *y* $(\mathrm{Y}, \mathcal{B})$ *espacios medibles. Una aplicación* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *se dice que es medible con respecto a* $\mathcal{A}$*, si para todo* $B \in \mathcal{B}$*, se verifica que* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposición 2.2.5. *Sean* $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ *y* $(\mathrm{Y}, \mathcal{B})$ *espacios medibles y sea* $\mathcal{B}_0$ *la colección de subconjuntos de* Y *tal que* $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$*. Entonces la función* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *es medible con respecto a* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *si y sólo si* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *para cada* $B \in \mathcal{B}_0$.

La demostración puede verse en [3]

Lema 2.2.6. *Sean* X *e* Y *espacios topológicos de Hausdorff, y sea* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *una aplicación continua. Entonces* f *es medible Borel; es decir medible con respecto a las* $\sigma - algebras$ *de Borel* $\mathcal{B}(\mathrm{X})$ *y* $\mathcal{B}(\mathrm{Y})$.

Demostración: La continuidad de f implica que si U es un subconjunto abierto de Y, entonces $f^{-1}(\mathrm{U})$ es abierta y por lo tanto un subconjunto de Borel de X. Dado que la colección de subconjuntos de abiertos de Y es generada por $\mathcal{B}(\mathrm{Y})$, la medibilidad de f es un resultado inmediato de la proposición 2.2.5. ■

Lema 2.2.7. *Sea* X *un espacio topológico Hausdorff, y sea* Y *un subespacio de* X*. Entonces*

$$\mathcal{B}(\mathrm{Y}) = \{A : \textit{Existe un conjunto } B \textit{ en } \mathcal{B}(\mathrm{X}) \textit{ tal que } A = B \cap \mathrm{Y}\}$$

Demostración: Sea $\mathcal{B}(\mathrm{X})_\mathrm{Y}$ la colección de subconjuntos de Y que tienen la forma $B \cap \mathrm{Y}$ para algún B en $\mathcal{B}(\mathrm{X})$. Necesitamos demostrar que $\mathcal{B}(\mathrm{Y}) = \mathcal{B}(\mathrm{X})_\mathrm{Y}$. Sea f la inyección estándar de Y en X, es decir, sea $f(y) = y$ tomando cada y en Y. Entonces f es continua, y por lo tanto medible con respecto a $\mathcal{B}(\mathrm{Y})$ y $\mathcal{B}(\mathrm{X})$. Dado que cada subconjunto B de X satisface que $f^{-1}(B) = B \cap \mathrm{Y}$, esto implica que $\mathcal{B}(\mathrm{X})_\mathrm{Y} \subset \mathcal{B}(\mathrm{Y})$. Por otro lado, se comprueba facilmente que $\mathcal{B}(\mathrm{X})_\mathrm{Y}$ es una $\sigma - algebra$ sobre Y que contiene todos los subconjuntos abiertos de Y, y por lo tanto incluye $\mathcal{B}(\mathrm{Y})$. Con esto queda demostrado que $\mathcal{B}(\mathrm{Y}) = \mathcal{B}(\mathrm{X})_\mathrm{Y}$. ■

Definición 2.2.8. *Sea* X *un espacio topológico de Hausdorff. Una medida de Borel en* X *es una medida cuyo dominio es* $\mathcal{B}(\mathrm{X})$. *Suponga que* $\mathcal{A}$ *es una* $\sigma-$ *algebra de* X, *tal que* $\mathcal{B}(\mathrm{X}) \subset \mathcal{A}$. *Una medida positiva* μ *en* $\mathcal{A}$ *es regular si*

a) cada subconjunto compacto K *de* X *satisface* $\mu(\mathrm{K}) < +\infty$

b) cada conjunto A *en* $\mathcal{A}$ *satisface*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(\mathrm{U}) : A \subset \mathrm{U} \ y\ \mathrm{U} \ \textit{es abierto}\}$$

c) cada subconjunto abierto U *de* X *satisface*

$$\mu(\mathrm{U}) = \sup\{\mu(\mathrm{K}) : \mathrm{K} \subset \mathrm{U} \ y\ \mathrm{K} \ \textit{es compacto}\}$$

Una *medida de Borel regular* en X es una medida regular cuyo dominio es $\mathcal{B}(\mathrm{X})$. Una medida que satisface la condición (b) es a menudo llamada *regular externa* y una medida que satisface la condición (c), se denomina *regular interna*.

Lema 2.2.9. *Sea* X *un espacio de Hausdorff en el que cada conjunto abierto es un* F_σ, *y sea* ν *una medida de Borel finita en* X. *Entonces, cada subconjunto de Borel* A *de* X *satisface*

$$\textit{(1)} \quad \nu(A) = \text{ínf}\{\nu(\mathrm{U}) : A \subset \mathrm{U} \ y\ \mathrm{U} \ \textit{es abierto}\}$$

y

$$\textit{(2)} \quad \nu(A) = \sup\{\nu(F) : F \subset A \ y\ F \ \textit{es cerrado}\}$$

La demostración puede verse en [3]

Proposición 2.2.10. *Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto que tiene una base numerable, y sea* μ *la medida de Borel en* X *que es finita en conjuntos compactos. Entonces* μ *es regular.*

Demostración: Consideremos primero la regularidad interna de μ. Sea U un subconjunto abierto de X. La proposición 2.1.11 implica que U es la unión de una sucesión $\{k_j\}$ de conjuntos compactos, y la proposición 2.2.2 implica que $\mu(\mathrm{U}) = \text{lím}_n \, \mu(\cup_{j=1}^n K_j)$. De aquí se sigue la regularidad interior de μ.

Por otro lado, sea $\{\mathrm{U}_n\}$ una sucesión de conjuntos abiertos tales que $\mathrm{X} = \cup_n \mathrm{U}_n$ de tal manera que $\mu(\mathrm{U}_n) < +\infty$ para cada n (por ejemplo, tomar una base numerable $\mathcal{U}$ de X, y organizar en una sucesión de estos conjuntos U en los que $\overline{U}$ es compacto). Para cada n definir una medida de Borel μ_n en X por $\mu_n(A) = \mu(A \cap \mathrm{U}_n)$. Las medidas μ_n son finitos, y por lo tanto la proposición 2.1.11 y el Lemma 2.2.9 implica que son regular externa. Por tanto, si A pertenece a $\mathcal{B}(\mathrm{X})$ y si ϵ es un número positivo, entonces para cada n existe un conjunto abierto V_n que incluye A y satisface $\mu_n(V_n) < \mu_n(A) + \epsilon/2^n$. Consecuentemente $\mu((\mathrm{U}_n \cap \mathrm{V}_n) - A) < \epsilon/2^n$. El conjunto V definido por $V = \cup_n(\mathrm{U}_n \cap \mathrm{V}_n)$ es abierto, incluye A y satisface

$$\mu(V - A) \leq \sum_n \mu((\mathrm{U}_n \cap \mathrm{V}_n) - A) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon$ y de aquí se sigue la regularidad externa de μ. ■

Proposición 2.2.11. *Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto que tiene una base numerable. Entonces cada medida regular de* X *es* $\sigma - finito$.

Demostración: El espacio X es, de acuerdo con la proposición 2.1.12, la unión de una sucesión de conjuntos compactos. Dado que la medida de un conjunto compacto es finito bajo una medida regular, entonces en espacio X es $\sigma - finito$. ∎

Proposición 2.2.12. *Sea* X *un espacio de Hausdorff, sea* $\mathcal{A}$ *la* $\sigma - algebra$ *en* X *que incluye a* $\mathcal{B}(\mathrm{X})$, *y sea* μ *la medida regular de* $\mathcal{A}$. *Si* A *pertenece a* $\mathcal{A}$ *y es* $\sigma - finito$ *bajo* μ, *entonces*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \ \ y \ \ K \ es \ compacto\}$$

Demostración: Asumamos que $\mu(A) < +\infty$. Sea ϵ un número positivo y usando la regularidad de μ escojamos un conjunto abierto Vtal que $A \subset V$ y $\mu(V) < \mu(A) + \epsilon$, y luego elegimos un subconjunto compacto L de V tal que $\mu(L) > \mu(V) - \epsilon$. Como $\mu(V - A) < \epsilon$, podemos escoger un conjunto abierto W que incluye $V - A$ y satisface $\mu(W) < \epsilon$. El conjunto $L - W$ es entonces un subconjunto compacto de A y satisface

$$\mu(L - W) = \mu(L) - \mu(L \cap W) > \mu(V) - 2\epsilon \geq \mu(A) - 2\epsilon$$

Dado que ϵ es arbitrario, se sigue la relación

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ y } K \text{ es compacto}\}$$

en el caso en que $\mu(A)$ es finita.

Por el contrario, podemos asumir que $A = \cup_n A_n$, donde para cada n tenemos $A_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(A_n) < +\infty$. Para cada número positivo α necesitamos construir un subconjunto compacto K de A tal que $\mu(K) > \alpha$; podemos hacer esto, eligiendo primero un N suficientemente grande que $\mu(\cup_{n=1}^{N} A_n) > \alpha$ y usando la construcción de la primera parte de la prueba para producir un subconjunto compacto de $\cup_{n=1}^{N} A_n$. ∎

Lema 2.2.13. *Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea* μ *una medida de Borel regular en* X. *Si* U *es un subconjunto abierto de* X, *entonces*

$$\mu(U) = \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X}) \ \ y \ 0 \leq f \leq \chi_U\right\}$$

$$= \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X}) \ \ y \ f \prec U\right\}$$

Demostración: Es claro que μ(U) es al menos tan grande como el supremo primero, y que el supremo primero es al menos tan grande como el segundo. Por lo tanto, es suficiente probar que

$$\mu(U) \leq \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X}) \ \ y \ f \prec U\right\}.$$

Sea α un número que satisface que $\alpha < \mu(U)$, y usando la regularidad de μ para escoger un subconjunto compacto K de U tal que $\alpha < \mu(K)$. El teorema 2.1.9 proporciona una función $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ que satisface que $\chi_K \leq f$ y $f \prec U$. Entonces $\alpha < \int f d\mu$ y

$$\alpha < \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X}) \text{ y } f \prec U\right\}.$$

Como α es un número menor que $\mu(U)$, la prueba queda completada. ■

2.3. Teorema de Riesz

Un resultado elemental que se estudia en cursos de Análisis Funcional, acerca de los subconjuntos de Borel en espacios de Hausdorff, es que cada función f en $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$, donde X es un espacios de Hausdorff localmente compacto, es integrable con respecto a cada medida regular en X. De ello se desprende que si μ es una medida regular de Borel en X, entonces $f \to \int f d\mu$ define un funcional lineal en $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$. Frigyes Riesz(1909), demostró que existe una única medida regular de Borel que induce el mismo funcional, y este debe poseer la característica de ser positivo. En este sentido, el concepto de positividad de funcionales lineales es esencial.

Definición 2.3.1. *Un funcional lineal* T *es positivo en* $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$*, si para cada función no negativa* f *en* $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ *se verifica que* $\mathrm{T}(f) \geq 0$.

Obsérvese que, de acuerdo a la definición anterior, si μ es una medida regular de Borel en X, entonces el funcional $f \to \int f d\mu$ es positivo. También, ocurre que un funcional lineal positivo preserva el orden, en el sentido que si $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ y satisfacen que $f \leq g$, entonces $\mathrm{T}(f) \leq \mathrm{T}(g)$.

Teorema 2.3.2. ***(Teorema de Representación de Riesz)*** *Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea* T *un funcional lineal positivo sobre* $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$*. Entonces existe una* $\sigma -$ *algebra* $\boldsymbol{M}$ *en* X *que contiene todos los conjuntos de Borel en* X *y existe una única medida regular de Borel* μ *sobre* $\boldsymbol{M}$ *tal que*

$$\mathrm{T}(f) = \int_{\mathrm{X}} f d\mu, \textit{para cada} f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$$

Demostración La demostración se llevará a cabo mediante seis pasos esenciales en los cuales se construirá una $\sigma -$ algebra y una medida que represente al funcional lineal y satisfagan las condiciones enunciadas en el teorema.

1. Primero probaremos la unicidad de μ. Si μ satisface las condiciones (b) y (c) de la definición de regularidad, enunciada en la sección anterior, claramente μ está determinada en la $\sigma -$ algebra $\mathbf{M}$. Por lo tanto es suficiente probar que

$$\mu_1(K) = \mu_2(K), \text{para todo } K \text{ compacto en X}$$

Fijemos un conjunto compacto K y $\varepsilon > 0$, de acuerdo a las condiciones (a) y (b) de la definición de regularidad, existe un conjunto abierto V, tal que, $K \subset V$ con $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$, por el lema de Urysohn´s existe una función $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ tal que $K \prec f \prec V$, por lo que

$$\mu_1(K) = \int_{\mathrm{X}} \chi_K d\mu_1 \leq \int_{\mathrm{X}} f d\mu_1 = \mathrm{T}(f) = \int_{\mathrm{X}} f d\mu_2$$

$$\leq \int_{\mathrm{X}} \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$

Dado que ε es arbitrariamente pequeño, se obtiene que

$$\mu_1(K) \leq \mu_2(K).$$

Intercambiando los papeles de μ_1 y μ_2, llegamos a la otra desigualdad, así,

$$\mu_1(K) = \mu_2(K)$$

y la unicidad queda demostrada.

2. Construyamos una medida que represente un funcional y verifiquemos que esta es una medida regular de Borel.

Definamos, entonces, para cada conjunto abierto V de X, la función

$$(1) \qquad \mu(V) = \sup\{\mathrm{T}(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X}) \text{ y } f \prec V\};$$

Si $V_1 \subset V_2$ es claro que (1) implica que $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$, luego podemos extender la definición anterior a todos los subconjuntos de X por

$$(2) \qquad \mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subset V \text{ abierto}\};$$

y definamos tambien a $\mathbf{M}_F$ como la clase de todos los subconjuntos E de X tal que verifican que

a) $\mu(E) < +\infty$
b) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\} \quad (3)$

asimismo, definamos a $\mathbf{M}$ como la clase de todos los subconjuntos E de X tal que $(E \cap K) \in \mathbf{M}_F$ para cada compacto K.

Es evidente que si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$ y que $\mu(E) = 0$ implica que $E \in \mathbf{M}_F$, y consecuentemente E también está en $\mathbf{M}$. Probaremos la subaditividad de μ:

Sean V_1 y V_2 subconjuntos abiertos de X; consideremos una función g en $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ tal que $g \prec V_1 \cup V_2$. Por teorema 2.1.16 existen funciones h_1 y h_2 tal que $h_i \prec V_i$ y $h_1(x) + h_2(x) = 1$ para toda x en el soporte de g. De aquí

$$h_i g \prec V_i \ , \ g = h_1 g + h_2 g$$

y por tanto

$$\mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(h_1 g) + \mathrm{T}(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2), \ \forall \ g \prec V_1 \cup V_2$$

así

$$\mu(V_1 \cup V_2) = \sup\{\mathrm{T}(g) : g \prec V_1 \cup V_2\} \leq \mu(V_1) + \mu(V_2) \qquad (4)$$

Consideremos, ahora, una sucesión $\{E_i\}$ de subconjuntos arbitrarios de X; si $\mu(E_i) = \infty$ la subaditividad numerable de μ se satisface trivialmente, supongamos entonces, que $\mu(E_i) < \infty$ para toda i. Eligamos $\varepsilon > 0$ y por (2) existen conjuntos abiertos $V_i \supset E_i$ que satisfacen

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/2^i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

Tomemos una función $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ tal que $f \prec V$, donde $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$, como f tiene soporte compacto, tenemos

$$f \prec \cup_{i=1}^{n} V_i, \quad \text{para algún } n.$$

Aplicando inducción a (4), obtenemos

$$\mathrm{T}(f) \leq \mu(\cup_{i=1}^{n} V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$$

Dado que esto es válido para cada $f \prec V$ y como $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \subset V$, se sigue que

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$$

y como ε es arbitrariamente pequeño queda demostrado la subaditividad numerable de μ, esto es;

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

3. Ahora demostraremos que si K es compacto, entonces $K \in \mathbf{M}_F$ y

$$\mu(K) = \text{ínf}\{\mathrm{T}(f) : K \prec f\}.$$

Sea $K \prec f$ y $V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha \; para \; 0 < \alpha < 1\}$, entonces $K \subset V_\alpha$ y para cada función g tal que $g \prec V_\alpha$, se verifica que $\alpha g \leq f$; luego por (1)

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{\mathrm{T}(g) : g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1}\mathrm{T}(f)$$

haciendo tender α a 1, obtenemos

$$\mu(K) \leq \mathrm{T}(f). \quad (5)$$

Por tanto $\mu(K) < +\infty$.
Evidentemente, K satisface la condición (3), así $K \in \mathbf{M}_F$.

Por otro lado, por la condición (b) de la definición de regularidad de la medida de Borel, para $\varepsilon > 0$, existe $V \supset K$ con $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$; y por lema de Urysohn´s, $K \prec f \prec V$ para alguna función $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$. Así

$$\mathrm{T}(f) \leq \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

por tanto

$$\mu(K) \leq \mathrm{T}(f) \leq \mu(V)$$

lo cual implica que

$$\mu(K) = \inf\{\mathrm{T}(f) : K \prec f\}.$$

4. Demostraremos ahora que la colección **M** definida, es la $\sigma -$ algebra en X que contiene a todos los conjuntos de Borel. Para ello, primero, demostraremos algunas propiedades de $\mathbf{M}_F$:

a) $\mathbf{M}_F$ contiene a todo conjunto abierto V con $\mu(V) < +\infty$.

En efecto, sea α un número real tal que $\alpha < \mu(V)$ por (1) en el paso 2, existe una función $f \prec V$ con $\alpha < \mathrm{T}(f)$. Si W es algún conjunto abierto que contiene el soporte de K de f, entonces $f \prec W$, luego $\mathrm{T}(f) \leq \mu(W)$. Así $\mathrm{T}(f) \leq \mu(K)$, lo que indica que K es un compacto contenido en V con $\alpha < \mu(K)$ por tanto se verifica que

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V \; y \; K \text{ compacto}\}$$

b) Verifiquemos la aditividad de μ en $\mathbf{M}_F$.

Primero demostraremos que para un par de conjuntos compactos disjuntos, K_1 y K_2 se verifica que

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) \quad (6)$$

Eligamos $\varepsilon > 0$, por lema de Urysohn´s existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ tal que $0 \leq f \leq 1$ y

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_1 \\ 0 & \text{si } x \in K_2 \end{cases}.$$

Por el paso 3. existe una función g tal que

$$K_1 \cup K_2 < g \ \ y \ \ \mathrm{T}(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

Observe que por la definición de $f(x)$, se verifica que $K_1 \prec fg$ y $K_2 < (1-f)g$; luego por la linealidad de T y por (5) se sigue que

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mathrm{T}(fg) + \mathrm{T}(g - fg) = \mathrm{T}(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

Dado la arbitrariedad de ε y por la subaditividad numerable de μ, probado en el paso 1. se llega a que

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

Por otro lado, si $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \infty$, la aditividad de μ se sigue de manera trivial del paso 1..Supongamos pues que $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) < +\infty$ y eligamos un $\varepsilon > 0$. Dado que $E_i \in \mathbf{M}_F$ hay conjuntos compactos $H_i \subset E_i$ tales que

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - \varepsilon/2^i; \quad (i = 1, 2 \cdots)$$

Definamos $K_n = \cup_{i=1}^{n} H_i$ y usando inducción en (6), obtenemos

$$(7) \qquad \mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \mu(K_n) = \Sigma_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \Sigma_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Luego,

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

y por paso 1. se obtiene

$$(8) \qquad \mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), \text{ donde } E_i \text{ son disjuntos dos a dos en } \mathbf{M}_F.$$

Además, como $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) < +\infty$ y $\varepsilon > 0$, de (8) se verifica que

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon, \text{ para algún } N$$

y por la relación establecida en (7), se sigue que

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon$$

lo cual demuestra que $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ satisface la condición (c) de la definición de regularidad, y así $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{M}_F$.

c) Demostraremos que dado $E \in \mathbf{M}_F$, existe un compacto K y un abierto V en $\mathbf{M}_F$ tal que

$$K \subset E \subset V \quad y \quad \mu(V-K) < \varepsilon, \;\; \forall\, E \in \mathbf{M}_F.$$

Demostración: Las definiciones expresadas en el paso 2. aseguran la existencia de $K \subset E$ y $V \supset E$ tal que

$$\mu(V) - \varepsilon/2 < \mu(E) < \mu(K) + \varepsilon/2$$

Dado que $V-K$ es abierto, $V-K \in \mathbf{M}_F$, por (a) y el resultado expuesto en (b) se deduce que

$$\mu(K) + \mu(V-K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

y así la prueba queda completada.

d) Probemos ahora que $\mathbf{M}_F$ es cerrada bajo uniones, intersecciones finitas y complemento.

Demostración: Sea $A, B \in \mathbf{M}_F$; si $\varepsilon > 0$, por (c) sabemos que existen conjuntos K_i y V_i tales que $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset B \subset V_2$ y $\mu(V_i - K_i) < \varepsilon$, para $i = 1, 2$. Luego

$$A - B \subset V_1 - K_2 \subset [(V_1 - K_1) \cup (K_1 - V_2) \cup (V_2 - K_2)]$$

y la subaditividad de μ, mostrada en el paso 1. implica que

$$\mu(A-B) \leq \varepsilon + \mu(K_1 - V_2) + \varepsilon.$$

Así, como $K_1 - V_2$ es un subconjunto compacto de $A-B$, deducimos que $A-B$ satisface la condición (c) de medida regular, luego $A - B \in \mathbf{M}_F$.

Por otro lado, dado que $A \cup B = (A-B) \cup B$, aplicando la aditividad de μ en $\mathbf{M}_F$, obtenemos que $A \cup B \in \mathbf{M}_F$, de manera similar, $A \cap B = A - (A-B)$ también pertenece a $\mathbf{M}_F$.

e) Finalmente, demostremos que $\mathbf{M}$ es una $\sigma -$ algebra en X que contiene a todos los conjuntos de Borel.

Demostración: Sea K un conjunto compacto arbitrario en X. Si $A \in \mathbf{M}$, entonces $A^c \cap K = K - (A \cap K)$, y como K y $(A \cap K)$ son miembros de $\mathbf{M}_F$, resulta que $A^c \cap K \in \mathbf{M}_F$ y por tanto $A^c \in \mathbf{M}$.

Ahora supongamos que $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, donde cada $A_i \in \mathbf{M}$ y construyamos una sucesión disjunta de miembros de $\mathbf{M}_F$, de la siguiente manera

$$B_1 = A_1 \cap K$$

y

$$B_n = (A_n \cap K) - (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}), \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

luego, por (d) y dado que $A \cap K = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ y por la aditividad numerable de μ en $\mathbf{M}_F$ se sigue que $A \cap K \in \mathbf{M}_F$, lo cual implica que $A \in \mathbf{M}$.

Por otra parte, consideremos un conjunto C cerrado, entonces $C \cap K$ es compacto, luego $C \cap K \in \mathbf{M}_F$, y así tenemos que $C \in \mathbf{M}$. De hecho X$\in$ $\mathbf{M}$.

Así, hemos demostrado que $\mathbf{M}$ es una $\sigma -$ algebra en X que contiene todos los subconjuntos cerrados de X. Por tanto contiene a todos los conjuntos de Borel en X.

5. Ahora, probaremos que $\mathbf{M}_F$ está compuesta por todos los miembros E de la $\sigma -$ algebra $\mathbf{M}$, para los cuales $\mu(E) < +\infty$.

Demostración: De acuerdo a los resultados expuestos en el paso 3. y en (d) del paso anterior, si $E \in \mathbf{M}_F$, entonces $E \cap K \in \mathbf{M}_F$ para cada compacto K, lo cual a su vez implica que $E \in \mathbf{M}$.

Supongamos que $E \in \mathbf{M}$ y $\mu(E) < +\infty$, dado que $\mathbf{M}_F$ contiene a todos los conjuntos abiertos V con medida finita y por (c) del paso 4., para $\varepsilon > 0$, se verifica que $V \supset E$ y $K \subset V$ (K compacto) con $\mu(V - K) < \varepsilon$. Luego, como $E \cap K \in \mathbf{M}_F$, existe un compacto $H \subset (E \cap K)$ tal que

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon$$

y dado que

$$E \subset [(E \cap K) \cup (V - K)]$$

tenemos que

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V - K) < \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Por tanto se concluye que $E \in \mathbf{M}_F$.

Ya hemos probado, la existencia de la $\sigma -$ algebra $\mathbf{M}$ en X y la unicidad de la medida regular de Borel, bajo las definiciones dadas en el paso 2.Llego el momneto de demostrar la última parte de la conclusión del *Teorema de Representación de Riesz*:

6. Para cada $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$, se cumple que a cada funcional lineal positivo de f, le corresponde una medida positiva finita Borel μ sobre X, esto es:

$$\mathrm{T}(f) = \int_{\mathrm{X}} f d\mu, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$$

Demostración: Es suficiente probarlo para una función real f y además sólo necesitamos demostrar que se verifica la desigualdad

$$\mathrm{T}(f) \leq \int_{\mathrm{X}} f d\mu \quad (9)$$

ya que por la linealidad de T se verificará que

$$-\mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(-f) \leq \int_{\mathrm{X}} (-f) d\mu = -\int_{\mathrm{X}} f d\mu \quad (10)$$

Luego de (9) y (10) se obtendría la igualdad.

Iniciemos nuestra demostración; consideremos el conjunto K como el soporte de una función real $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$, sea $[a, b]$ un intervalo que contiene el rango de f, eligamos $\varepsilon > 0$, y_i tal que $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ donde,

$$y_0 < a < y_1 < \cdots < y_n = b.$$

Definamos

$$E_i = \{x : y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K, \quad i = 1, \cdots, n$$

dado que f es continua, f es medible Borel, y los conjuntos E_i son por tanto conjuntos disjuntos Borel cuya unión es K. Existen conjuntos abiertos $V_i \supset E_i$ tales que

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/n \quad (i = 1, \cdots, n)$$

y $f(x) < y_i + \varepsilon, \forall\ x \in V_i$. Por teorema 2.1.12, existen funciones $h_i \prec V_i$ tal que $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ sobre K. Por tanto $f = \sum_{i=1}^{n} h_i f$, y el paso 3. muestra que

$$\mu(K) \leq \mathrm{T}(\sum_{i=1}^{n} h_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}(h_i).$$

Dado que $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$, y $y_i - \varepsilon < f(x)$ en E_i, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}(h_i f) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \mathrm{T}(h_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \varepsilon) \mathrm{T}(h_i) - |a| \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}(h_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \varepsilon)[\mu(E_i) + \varepsilon/n] - |a| \mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\varepsilon \mu(K) + \varepsilon/n \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \varepsilon) \\
&\leq \int_{\mathrm{X}} f d\mu + \varepsilon[2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon]
\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, la desigualdad (9) se ha establecido, y la prueba del *Teorema de Representación de Riesz* queda completada. ∎

Capítulo 3

Algunas Aplicaciones del Teorema de Representación de Riesz

En este capítulo pondremos de manifiesto el alcance del teorema de representación de Riesz en otras parcelas del análisis funcional. En particular, expondremos dos aplicaciones notables, una de ellas es su aplicabilidad en la construcción del núcleo de Poisson, utilizado para resolver el problema de Dirichlet en dos dimensiones. Específicamente, sirve para hallar las soluciones a la ecuación de Laplace en dos dimensiones, dadas las condiciones de frontera de Dirichlet sobre un disco unitario. Los núcleos de Poisson se encuentran a menuddo en aplicaciones en la teoría de control y problemas en dos dimensiones en la electrostática. La otra aplicación del teorema de Riesz, es su papel fundamental en la demostración del interesante resultado del teorema de Mazur en el espacio $\mathcal{C}(K)$, el cual asegura que a partir de una sucesión puntualmente convergente en $\mathcal{C}(K)$, podemos obtener una uniformemente convergente con el mismo punto de convergencia, a partir de ciertas combinaciones convexas.

3.1. Una aproximación Abstracta a la Integral de Poisson

En esta sección se exhibirá cómo los funcionales lineales positivos en $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ surgen de manera natural, eligiendo un marco abstracto conveniente. En particular, expondremos que a cada punto del disco unidad cerrado, el cual contiene al espacio de todos los polinomios complejos f, que designaremos por A, le corresponde una medida positiva sobre la frontera del disco, y este punto queda representado por un funcional lineal positivo, en el subespacio A de $\mathcal{C}(\overline{D[0,1]})$, conocido como la integral de Poisson, dada por:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})dt \quad (z = re^{i\theta}), \ \ \forall\ f \in A \ \text{ y } \ z \in D[0,1]$$

Antes de ilustrar la aplicación del teorema de representación de Riesz para este problema concreto, definiremos el marco abstracto donde se desarrollara tal aplicación.

Teorema 3.1.1. *(Teorema de Hahn-Banach) Si M es un subespacio de un espacio lineal normado* X *y si f es un funcional lineal acotado en M, entonces f puede extenderse a un funcional lineal acotado por F en* X *tal que* $\|F\| = \|f\|$, *donde*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M, \|x\| \leq 1\} \|F\| = \sup\{|F(x)| : x \in \mathrm{X}, \|x\| \leq 1\}$$

La demostración puede verse en [6]

Sean K un espacio de Hausdorff compacto, H un subconjunto compacto de K, y A un subespacio de $\mathcal{C}(K)$ tal que $f(x) = 1, \ \forall x \in K$, está en A y

$$\|f\|_K = \|f\|_H, \qquad (f \in A) \qquad (1)$$

Diremos que H es una frontera de K, correspondiente al espacio A.

Si $f \in A$ y $x \in K$, la relación (1) implica que

$$|f(x)| \leq \|f\|_H. \qquad (2)$$

En particular , si $f(y) = 0, \ \forall y \in H$, entonces $f(x) = 0, \quad \forall x \in K$. Por tanto, si $f = f_1 - f_2$, donde $f_1, f_2 \in A$ y $f(y) = 0, \quad \forall \ y \in H$, entonces $f_1 = f_2$.

Sea $M = \{f|_H : f \in A\}$, claramente M es un subespacio de $\mathcal{C}(H)$, por lo cual cada elemento de M tiene una única extensión a un elemento de A. Así, tenemos una correspondencia natural entre M y A, que es inyectiva y que además, por (1) conserva la norma.

Fijemos un punto $x \in K$. Si $f = 1$ en A, se verifica que $|f(x)| = \|f\|_H$, para todo $x \in K$, luego la aplicación $f \to f(x)$ es un funcional lineal acotado en M, de norma 1. Por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal T en $\mathcal{C}(H)$, de norma 1, tal que

$$\mathrm{T}(f) = f(x) \quad (f \in M) \qquad (3)$$

donde $\mathrm{T}(1) = 1, \|\mathrm{T}\| = 1 \qquad (4)$.

A continuación demostraremos que este funcional lineal es positivo en $\mathcal{C}(H)$:

Supongamos que $f \in \mathcal{C}(H), \ 0 \leq f \leq 1$, y definamos la función $g = 2f - 1$, y $\mathrm{T}(g) = \alpha + i\beta$ donde α y β son números reales. Dado que $|g| \leq 1$, por su propia construcción, se verifica que $|g + ir|^2 \leq 1 + r^2$, para toda constante real r. Así (4) implica que

$$(\beta + r)^2 \leq |\alpha + i(\beta + r)|^2 = |\mathrm{T}(g + ir)|^2 \leq 1 + r^2. \qquad (5)$$

Resulta así que $\beta^2 + 2r\beta \leq 1$ para todo número real r, lo que obliga a que $\beta = 0$. Como $\|g\|_H \leq 1$, tenemos que $|\alpha| \leq 1$; luego

$$\mathrm{T}(f) = \frac{1}{2}\mathrm{T}(1 + g) = \frac{1}{2}(1 + \alpha) \geq 0. \qquad (6)$$

Por tanto el funcional T es lineal positivo en $\mathcal{C}(H)$.

Ahora estamos en condiciones para aplicar el ***teorema de representación de Riesz***, el cual asegura la existencia de una medida de Borel positiva regular μ_x en H tal que

$$\mathrm{T}(f) = \int_H f d\mu_x \qquad (f \in \mathcal{C}(H)) \qquad (7)$$

En particular, obtenemos la fórmula de representación

$$f(x) = \int_H f d\mu_x \qquad (f \in A) \qquad (8)$$

Hemos demostrado que *a cada $x \in K$ le corresponde una medida positiva μ_x sobre la frontera H que representa a x en el sentido de que se verifica (8) para toda $f \in A$.*

Ejemplo: Si $V = \{z : |z| < 1\}$, es el disco unidad abierto del plano complejo, $K = \overline{V}$, es el disco unidad cerrado, tomando como H la frontera U de V. Entonces todo polinomio f, es decir, toda función de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, donde $a_0, a_1. \cdots, a_N$ son números complejos, satisfacen la relación

$$\|f\|_V = \|f\|_U$$

así,

$$f(z) = \int_U f d\mu_z, \quad (f \in A) \quad \text{donde A es un subespacio de } \mathcal{C}(\overline{V})$$

Efectivamente, primero obsérvese que la continuidad de f implica que el supremo de $|f|$ en V es el mismo que en $\overline{V}$.
Como $\overline{V}$ es compacto, existe un $z_0 \in \overline{V}$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \overline{V}$. Supongamos que

$$z_0 \in V$$

Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n (z - z_0)^n,$$

y si $0 < r < 1 - |z_0|$, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{N} |b_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0)|^2 d\theta = |b_0|^2,$$

así que, $b_1 = b_2 = \cdots = b_N = 0$; es decir f es constante. Por consiguiente, $z_0 \in U$ para todo polinomio no constante f, lo que prueba que la igualdad, $\|f\|_V = \|f\|_U$, es verdadera.

Observación: El funcional lineal positivo T determina a μ_x de manera única; pero no hay ninguna garantía de que la extensión que proporciona el teorema de Hahn-Banach sea única. Sin embargo en algunos casos especiales si se obtiene unicidad.

La Integral de Poisson:

Ahora estamos en condiciones de deducir la integral de Poisson en el contexto abstracto descrito previamente.

Teorema 3.1.2. *Supongamos que A es un espacio vectorial de funciones complejas continuas en el disco unidad cerrado $\overline{V}$. Si A contiene a todos los polinomios, y si*

$$\sup_{z\in V}|f(z)| = \sup_{z\in U}|f(z)|, \qquad (\forall f \in A)$$

donde U es la frontera de V, entonces la representación integral de poisson

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(e^{it})dt \quad (z = re^{i\theta})$$

es válida para toda $f \in A$ y todo $z \in V$

Demostración: Sea A un subespacio de $C(\overline{V})$ que contiene a todos los polinomios y tal que

$$\|f\|_V = \|f\|_U$$

para toda $f \in A$. Entonces a cada $z \in V$ le corresponde una medida de Borel positiva μ_z en U tal que

$$f(z) = \int_U f d\mu_z, \quad (f \in A) \qquad (9)$$

Fijemos ahora un $z \in V$ y escribimos $z = re^{i\theta}$, $\;0 \leq r < 1$, θ real.

Si $v_n(w) = w^n$, entonces $v_n \in A$ para $n = 0, 1, 2, \cdots$; por tanto, (9) muestra que

$$v_n(z) = r^n e^{in\theta} = \int_U v_n d\mu_z \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (10)$$

Como $v_{-n} = \overline{v}_n$ en U, (10) implica que

$$\int_U v_n d\mu_z = r^{|n|}e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (11)$$

Esta última igualdad sugiere que consideremos la función real

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)} \qquad (t\ real), \qquad (12)$$

como $P_r(\theta - t)$ está mayorada por la serie geométrica convergente $\sum r^{|n|}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)e^{int}dt = r^{|n|}e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (13)$$

Comparando (13) y (11) se obtiene

$$\int_U f d\mu_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \qquad (14)$$

para $f = v_n$, y, por tanto, para todo polinomio trigonométrico f; luego (14) se verifica para toda $f \in \mathcal{C}(U)$. Así queda demostrado que μ_z está determinada de manera única por (9).

En particular, se verifica (14) si $f \in A$, y entonces (9) proporciona la representación

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \qquad (f \in A) \qquad (15)$$

La serie (12) puede sumarse explícitamente , pues es la parte real de

$$1 + 2 \sum_{1}^{\infty} (ze^{-it})^n = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 - r^2 + 2ir\sin(\theta - t)}{|1 - ze^{-it}|^2}$$

En consecuencia,

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}. \qquad (16)$$

que es el llamado núcleo de Poisson. Obsérvese que $P_r(\theta - t) \geq 0$ si $0 \leq r < 1$. ■

3.2. Teorema de Mazur

Otra notable aplicación del teorema de representación de Riesz, es que en el espacio de las funiones continuas sobre un compacto, la convergencia débil implica la convergencia puntual y viceversa, para sucesiones acotadas. De aquí, se desprende un resultado interesante expuesto por Mazur; el cual establece que a partir de una sucesión puntualmente convergente en $\mathcal{C}(K)$, podemos obtener una uniformemente convergente con el mismo punto de convergencia, a partir de ciertas combinaciones convexas.

Definición 3.2.1. *Sea* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. El espacio dual de* X*, denotado por* X^**, es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en* X*, dotado con la norma canónica*

$$\|f\|^* = \sup_{x \in B_{\mathrm{X}}} |f(x)|,$$

donde B_{X} *es la bola unidad de* X.

Note que X^* es un espacio de Banach para un espacio normado X.

Definición 3.2.2. *Sea* X *un espacio normado. La topología débil* (w) *en* X *es la generada por una base que consiste de los conjuntos*

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathrm{X} : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \ \textit{para} \ \ i = 1, 2, \cdots, n\},$$

para toda $f_0 \in \mathrm{X}^*$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathrm{X}$ *y* $\varepsilon > 0$

Observación:

- En el caso complejo, la topología w^* en X^* también puede definirse equivalentemente usando $|Re(f - f_0)(x_i)|$ en la descripción de su base.
- La topología débil y la topología débil estrella verifican la condición de Hausdorff.
- Cada conjunto *w-abierto* es también abierto en norma, por lo que la topología de la norma es más fuerte que la topología débil. Así mismo, cómo los conjuntos definidos en la topología w^* en X están entre los definidos en la topología débil en X, la topología débil es más fuerte que la topología débil estrella en X^*

Definición 3.2.3. *Un conjunto* C *es convexo en un espacio vectorial, si* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$, *cuando* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in C$ *y* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$ *satisfacen* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Proposición 3.2.4. *Si un espacio normado* X *es finito-dimensional entonces la topología débil en* X *coincide con la topología en norma de* X*, y la topología débil estrella de* X^* *coincide con la topología en norma de* X^*.

Los detalles de la demostración pueden verse en [5]

Teorema 3.2.5. *(Hahn-Banach) Sea* C *un conjunto convexo cerrado en un espacio de Banach complejo* X*. Si* $x_0 \notin C$ *entonces existe* $f \in \mathrm{X}$ *tal que*

$$Re(f(x_0)) > \sup\{Re(f(x)) : x \in C\}$$

La demostración puede verse en [5]

Teorema 3.2.6. *Sea* X *un espacio de Banach real. Si* A *es un conjunto convexo débilmente cerrado en la topología estrella en* X^* *y* $f \in \mathrm{X}^* \backslash A$, *entonces existe* $x \in \mathrm{X}$ *tal que* $f(x) > \sup\{g(x) : g \in A\}$

La demostración puede verse en [5]

Definición 3.2.7. *Sea* D *un conjunto dirigido de* X*. Decimos que una red* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ *en un espacio topológico* X*, converge a algún punto* $x \in \mathrm{X}$ *si para cada entorno* $U(x)$ *de* x *existe* $\alpha_0 \in D$, *tal que* $x_\alpha \in U(x)$ *cuando* $\alpha_0 \leq \alpha$. *Decimos que* x *es el límite de* $\{x_\alpha\}$ *y escribimos* $x_i \to x$.

A continuación demostraremos el teorems de Mazur, que es un corolario del teorema de Hahn-Banach, el cual sustentará la convergencia en norma de una combinación convexa a partir de la convergencia débil en un espacio de Banach, en donde se pone de manifiesto la aplicación del teorema de representación de Riesz.

Teorema 3.2.8. *(Mazur, corolario de Hahn-Banach) Cada conjunto convexo cerrado en un espacio de Banach* X *es débilmente cerrado. Por lo tanto, para los conjuntos convexos, la norma y la clausura débil coinciden.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos que X es un espacio de Banach en los reales, y C es un subconjunto convexo cerrado de X. Si $x_0 \notin C$, entonces, por teorema 3.2.5, podemos elegir una función $f \in \mathrm{X}^*$ tal que $f(x_0) > \sup\{f(x) : x \in C\}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\{f(x) : x \in C\} < \alpha < f(x_0).$$

Entonces el conjunto $\mathcal{O} = \{x \in \mathrm{X} : f(x) > \alpha\}$ es débilmente abierto en X. Es claro que, $x_0 \in \mathcal{O}$ y $\mathcal{O} \cap C = \emptyset$; lo cual demuestra que $\mathrm{X} \backslash C$ es $w-$ *abierto* y por tanto C es $w-$ *cerrado*.

Consideremos que C es un conjunto convexo. Como la topología de la norma es fuerte, obtenemos $\overline{C} \subset \overline{C}^w$; y además sabemos que $\overline{C}$ es un conjunto convexo cerrado, por tanto también es $w-$ *cerrado*, luego

$$\overline{C} = \overline{C}^w$$

■

Para conjuntos *no convexos*, la norma y la clausura débil puede ser diferente.

La teoría de integración indica la convergencia para sucesiones de funciones integrables y no para redes, ya que la medida es numerablemente aditiva. Así, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue puede ser no válido para redes. Por ejemplo:

Consideremos una red $(D, \prec)$ donde D es un subintervalo finito de $I = [0,1]$, $\preceq$ la relación de inclusión y sea $f_\alpha : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in D$ tal que

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \alpha \\ 0 & \text{si } x \notin \alpha \end{cases}$$

La red de funciones f_α converge puntualmente a la función **1**.

En efecto, por definición de convergencia, para todo $\alpha \in I$, existe α_x tal que para todo $\alpha \geq \alpha_x$, $f_\alpha = 1$. Sea $\alpha_x = \{x\} \in D$, y como $\alpha \geq \alpha_x$, entonces $\alpha_x \subseteq \alpha$, así $x \in \alpha$, luego

$$f_\alpha(x) = 1.$$

Por tanto, f_α converge puntualmente a **1**.

Evidentemente, en este ejemplo, $\lim_\alpha \int_I f_\alpha d\mu \neq \int_I \mathbf{1} d\mu$, violando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue; ya que f_α es una red, no una sucesión.

En la teoría que nos ocupa, utilizaremos sucesiones.

A continuación, desarrollaremos el teorema de Mazur en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto, en el cual se evidencia el aporte del teorema de representación de Riesz.

Consideremos el espacio normado $(\mathcal{C}(K), \|\centerdot\|_\infty)$; el teorema de representación de Riesz, nos garantiza que el espacio dual de $\mathcal{C}(K)$ coincide con el espacio de las medidas regulares, lo cual facilita el manejo de una convergencia más sencilla.

Proposición 3.2.9. *Si* X *es un espacio normado y* $A \subseteq \mathrm{X}$*, entonces* A *es un conjunto acotado si sólo si para cada* f *en* X^*, $\sup\{|f(a)| : a \in A\} < \infty$.

Los detalles de la demostración pueden verse en [7]

Proposición 3.2.10. *Una sucesión acotada* $\{f_n\}$ *contenida en* $\mathcal{C}(K)$ *converge débilmente a una función continua* f*, si y sólo si, converge puntualmente.*

Demostración:

i. Sea $M(\mathrm{X})$ el conjunto de todos los valores complejos de medidas regulares sobre X. Por hipótesis sabemos que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ débilmente, para cada $\mu \in M(\mathrm{X})$. Gracias al resultado expuesto en el teorema de representación de Riesz, se satisface que $M(\mathrm{X}) = \mathcal{C}_0(\mathrm{X})^*$; luego la proposición 3.2.9 implica que $\sup_n \|f_n\| < \infty$. Si tomamos la medida de Dirac como μ, esto es,

$$\mu = \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases},$$

tenemos

$$\int_{\mathrm{X}} f_n d\delta_x = f_n(x)$$

así $f_n \to f$, que es lo que queriamos probar.

ii. El recíproco es una consecuencia del teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (TCD). Ahora, supongamos que $f_n \to f$ puntualmente, y está acotada, así de acuerdo al (TCD) y la hipótesis planteada, sabemos que para toda medida de Borel finita μ sobre X, tenemos

$$\int_{\mathrm{X}} f_n d\mu \to \int_{\mathrm{X}} f d\mu$$

luego, tomando $\mu = M(\mathrm{X})$ llegamos a que $f_n \to f$ en la topología débil. ■

Teorema 3.2.11. *(Teorema de Mazur en $\mathcal{C}(K)$) Sea $\mathcal{C}(K)$ el espacio de las funciones continuas en el compacto K y $f, f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{C}(K)$, donde $\{f_n\}$ es acotada. Si f_n converge puntualmente a f, entonces existe una combinación convexa g_n de $\{f_n\}$ tal que g_n converge en norma a f.*

Demostración:
Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en $\mathcal{C}(K)$, K compacto. Definamos el conjunto C como,

$$C = \overline{conv\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\left\{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n : \lambda_n \geq 0, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1 \right\}}.$$

Supongamos que $f_n \to f$ débilmente, en términos topológicos esto es equivalente a decir que $f \in \overline{C}^w$, luego el Teorema de Mazur 3.2.8 garantiza que la topología débil w puede reemplazarse por una fuerte, en $\|\cdot\|$, ya que C es convexo y cerrado, es decir, $\overline{C}^w = C$. Esto implica que $x \in \overline{conv f_n}$. De aquí se sigue que existen (λ_n), con $\lambda_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1$ tal que

$$\left\| \sum \lambda_n f_n - f \right\| < \varepsilon$$

Eligiendo $\varepsilon = \frac{1}{m}$ proporciona una sucesión de combinanaciones convexas que converge a f uniformemente.

■

Comentario:

Otras aplicaciones interesante, en donde el teorema de representación de Riesz juega un papel fundametal y podrían considerarse en trabajos posteriores son:

- ***Teorema de Krein - Smulian*** que caracteriza cuando la envoltura convexa cerrada de un conjunto compacto es de nuevo compacta, en este contexto el teorema de Riez permite identificar el dual de $\mathcal{C}$(X) con el espacio $M(K)$ de las medidas de Radon definida en la σ - algebra de Borel de K, lo cual es fundamental para su demostación.

- ***Caracterización debilmente compacta de Grothendieck***.

Las aplicaciones anteriores no fueron incorporadas al presente trabajo por el nivel de complejidad y la falta de tiempo para seguir su estudio; sin embargo es conveniente hacer mención de ellas, pues confío en que algunos lectores estarán interesados en estudiar con detalle tales resultados.

Bibliografía

[1] J. L. Kelley, *Topología General*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina. 1975.

[2] J. Rey Pastor, C. A. Trejo, C. Pi Calleja, *Analisis Matematico*

[3] Donald L. Cohn, *Measure Theory*. 1980.

[4] F. Riesz, B. Sz. Nagy, *Functional Analysis*. Blackie & Son Limited. London and Glasgow. 1956.

[5] Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos Santalucía V., Pelant J., Zizler V. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*

[6] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1987.

[7] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Sringer-Verlag, N. Y., 1985. McGraw-Hill, Inc., 1987.

[8] B. Cascales, J. M. Mira *Análisis Funcional*. DM. Colección Texto-Guía. ICE-Universidad de Murcia. 2002.

[9] B. Cascales, S. Tronyanski *Fundamentos de Análisis Matemático*. Universidad de Murcia. 2007.

[10] J. Dieudonne *History of Functional Analysis*. North-Holland Publishing Company. 1981.