El teorema del punto fijo

B. Cascales

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Murcia, 26 de Febrero de 2009
Seminario del Departamento de Matemáticas

Cuando hablamos del *Teorema del Punto Fijo* en realidad no nos referimos a un único teorema del punto fijo sino a toda una teoría.

Cuando hablamos del *Teorema del Punto Fijo* en realidad no nos referimos a un único teorema del punto fijo sino a toda una teoría.

. . . la importancia de una teoría la da. . .

- la historia,

Cuando hablamos del *Teorema del Punto Fijo* en realidad no nos referimos a un único teorema del punto fijo sino a toda una teoría.

. . . la importancia de una teoría la da. . .

- la historia,
- la estética y profundidad de los resultados que conectan hipótesis contrastables con tesis sorprendentes (lejanas de las hipótesis!),

Cuando hablamos del *Teorema del Punto Fijo* en realidad no nos referimos a un único teorema del punto fijo sino a toda una teoría.

. . . la importancia de una teoría la da. . .

- la historia,
- la estética y profundidad de los resultados que conectan hipótesis contrastables con tesis sorprendentes (lejanas de las hipótesis!),
- la contundencia y abundancia de las aplicaciones a áreas diversas,

Cuando hablamos del *Teorema del Punto Fijo* en realidad no nos referimos a un único teorema del punto fijo sino a toda una teoría.

. . . la importancia de una teoría la da. . .

- la historia,
- la estética y profundidad de los resultados que conectan hipótesis contrastables con tesis sorprendentes (lejanas de las hipótesis!),
- la contundencia y abundancia de las aplicaciones a áreas diversas,
- durante cuanto tiempo está viva la teoría.

Preliminares

Notación y definiciones

Notación

- D es un conjunto.
- $f : D \longrightarrow D$ es una aplicación.

Notación y definiciones

Notación

- D es un conjunto.
- $f : D \to D$ es una aplicación.

¿Qué es un punto fijo?

Notación y definiciones

Notación

- D es un conjunto.
- $f : D \to D$ es una aplicación.

¿Qué es un punto fijo?

Es un punto $x_0 \in D$ que satisface $f(x_0) = x_0$

Notación

- D es un conjunto.
- $f : D \longrightarrow D$ es una aplicación.

¿Qué es un punto fijo?

$$\text{Es un punto } x_0 \in D \text{ que satisface } f(x_0) = x_0$$

¿Qué se busca en un teorema del punto fijo?

Notación y definiciones

Notación

- D es un conjunto.
- $f : D \to D$ es una aplicación.

¿Qué es un punto fijo?

Es un punto $x_0 \in D$ que satisface $f(x_0) = x_0$

¿Qué se busca en un teorema del punto fijo?

- condiciones en D, f que garantizan la existencia de x_0;

Notación y definiciones

Notación

- D es un conjunto.
- $f : D \to D$ es una aplicación.

¿Qué es un punto fijo?

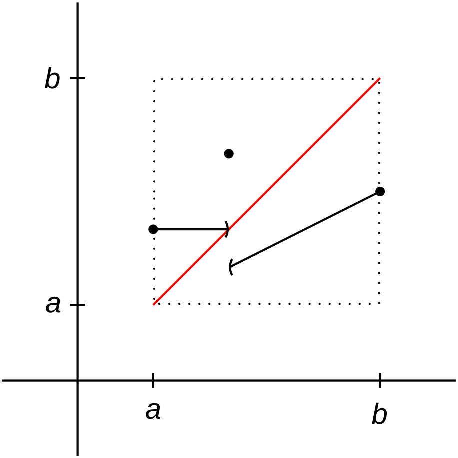
Es un punto $x_0 \in D$ que satisface $f(x_0) = x_0$

¿Qué se busca en un teorema del punto fijo?

- condiciones en D, f que garantizan la existencia de x_0;
- condiciones que garantizan (si es posible) unicidad.

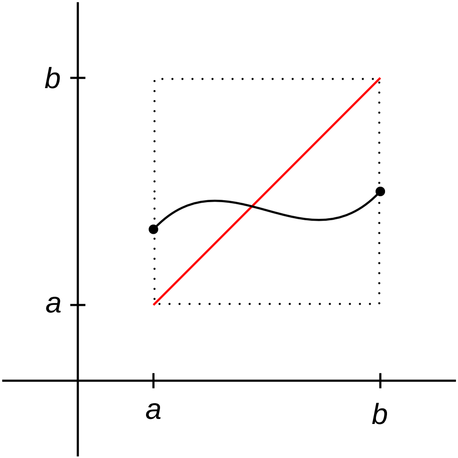
¿Existen siempre puntos fijos?

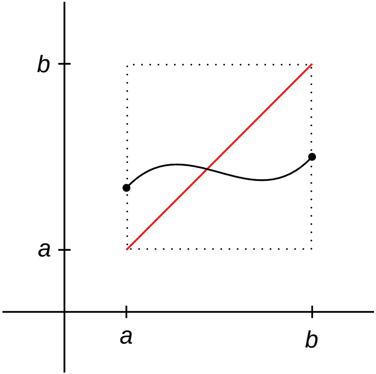
¿Existen siempre puntos fijos?



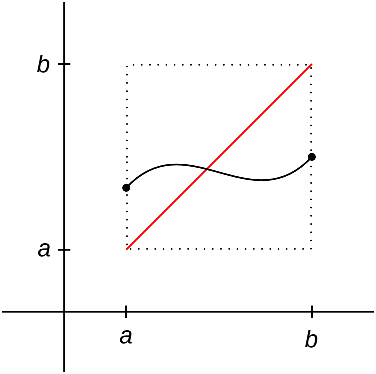
Funciones con puntos fijos

Funciones con puntos fijos



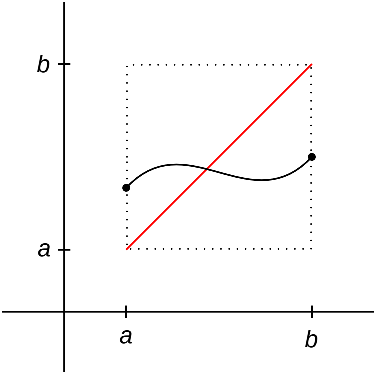


$f : [a, b] \to [a, b]$ **continua:**



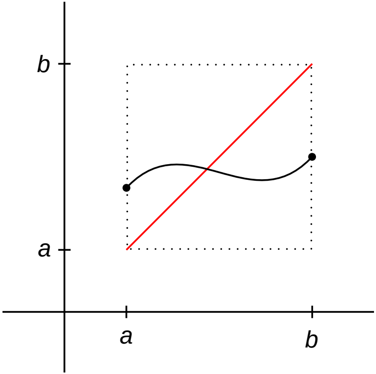
$f : [a, b] \to [a, b]$ **continua:**

1. $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x - f(x) =: g(x);$



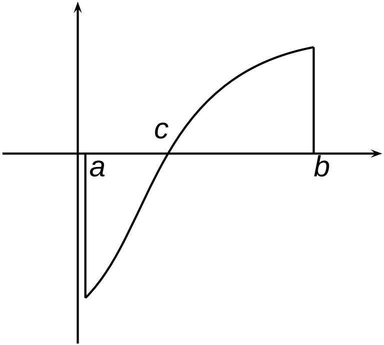
$f : [a, b] \to [a, b]$ **continua:**

1. $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x - f(x) =: g(x)$;
2. $g(a) \le 0$ y $g(b) \ge 0$;



$f : [a, b] \to [a, b]$ **continua:**

1. $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x - f(x) =: g(x)$;
2. $g(a) \leq 0$ y $g(b) \geq 0$;
3. utilizamos el Teorema de Bolzano;



$f : [a, b] \to [a, b]$ **continua:**

1. $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x - f(x) =: g(x)$;
2. $g(a) \leq 0$ y $g(b) \geq 0$;
3. utilizamos el Teorema de Bolzano;

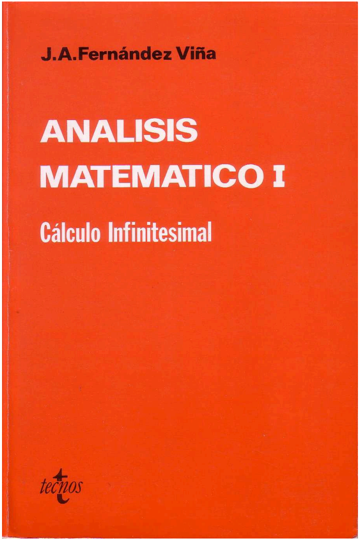
FUNCIONES CONTINUAS DE UNA VARIABLE REAL 159

7.3.1. Teorema.—Sea f una función real continua definida en el intervalo compacto $I=[a,b]$. Para todo número real ξ comprendido entre los dos números $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un punto x_0 en el intervalo I tal que $f(x_0)=\xi$.

Si $f(a)=f(b)$, el teorema es trivial. Supongamos, por ejemplo, que sea $f(a)<f(b)$ y entonces $f(a)\leqslant\xi\leqslant f(b)$. Si el número ξ coincide con $f(a)$ o con $f(b)$, el teorema está demostrado; debemos, pues, suponer que $f(a)<\xi<f(b)$. El conjunto $X=\{x\in I; f(x)\leqslant\xi\}$ es cerrado en virtud del teorema 7.1.5 y como está acotado (por ser un subconjunto del intervalo acotado I), será un conjunto compacto; además no es vacío, pues, evidentemente, $a\in X$. De acuerdo con el teorema 5.5.2, el extremo superior x_0 del conjunto X pertenecerá al propio conjunto X, es decir, $f(x_0)\leqslant\xi$. Observemos, por otra parte, que debe ser $x_0<b$, pues si fuese $x_0=b$ tendríamos $f(b)\leqslant\xi$ que es contrario a la hipótesis. Veamos que la desigualdad $f(x_0)\leqslant\xi$ es de hecho una igualdad, con lo que quedará demostrado el teorema. Supongamos que fuera $f(x_0)<\xi$. Como f es continua en x_0, para el número real positivo $\xi-f(x_0)$ existirá otro número $\eta>0$ tal que la relación $|x-x_0|\leqslant\eta$, $x\in I$, implicará $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\xi-f(x_0)$. Por ser $x_0<b$ podrá encontrarse un punto $x'\in I$ tal que sea $x_0<x'<x_0+\eta$, y para el cual, por consiguiente, tendremos $f(x')-f(x_0)\leqslant\xi-f(x_0)$; entonces $f(x')\leqslant\xi$ y se llega a la contradicción de que x' debe pertenecer a X siendo mayor que su extremo superior.

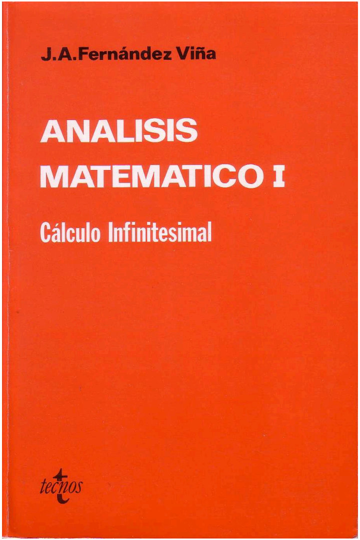
$f:[a,b]\to[a,b]$ continua:

1. $f(x)=x \Leftrightarrow 0=x-f(x)=: g(x)$;
2. $g(a)\leq 0$ y $g(b)\geq 0$;
3. utilizamos el Teorema de Bolzano;
4. *i.e. g* lleva *intervalos a intervalos*;



$f : [a, b] \to [a, b]$ **continua:**

1. $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x - f(x) =: g(x)$;
2. $g(a) \leq 0$ y $g(b) \geq 0$;
3. utilizamos el Teorema de Bolzano;
4. *i.e.* g lleva *intervalos a intervalos*;



$f : [a,b] \to [a,b]$ continua:

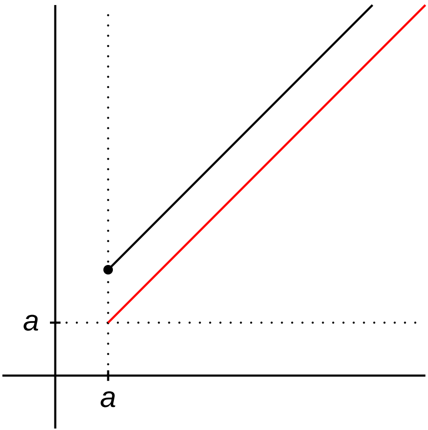
1. $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x - f(x) =: g(x)$;
2. $g(a) \leq 0$ y $g(b) \geq 0$;
3. utilizamos el Teorema de Bolzano;
4. *i.e.* g lleva *intervalos a intervalos*;

Esencial

- f es continua;
- $[a,b]$ es convexo y compacto.

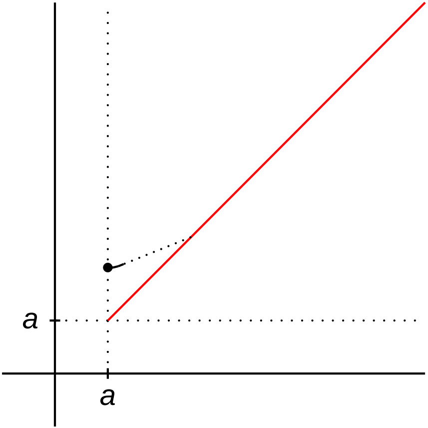
$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ continua ¿Tiene punto fijo?

$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ continua ¿Tiene punto fijo?

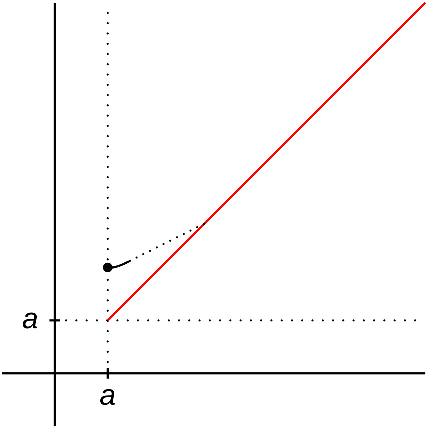


¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?

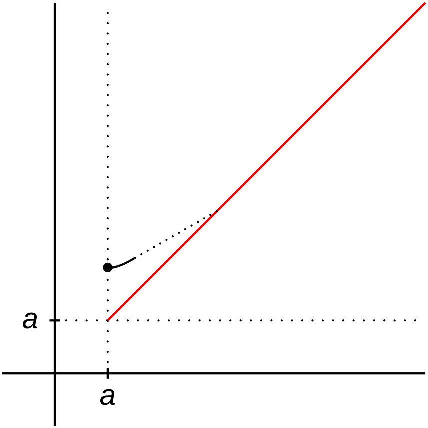
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



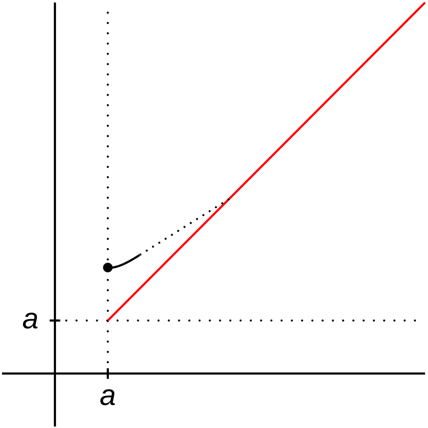
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



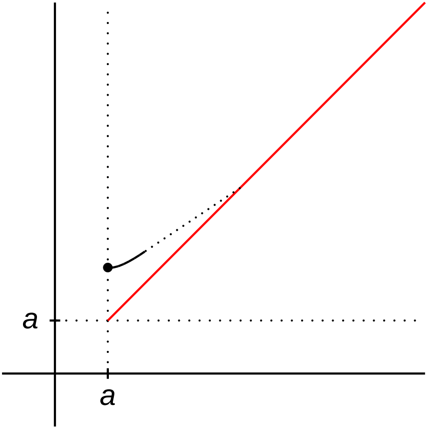
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



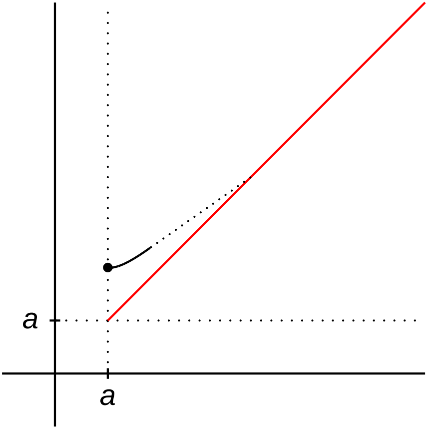
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



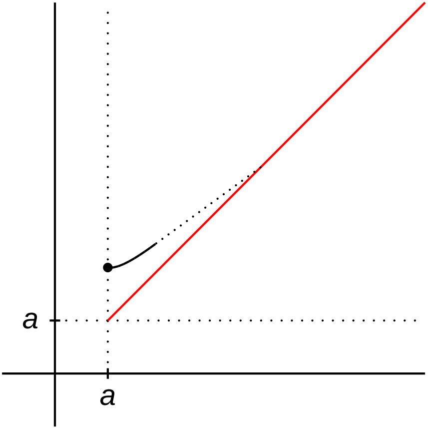
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



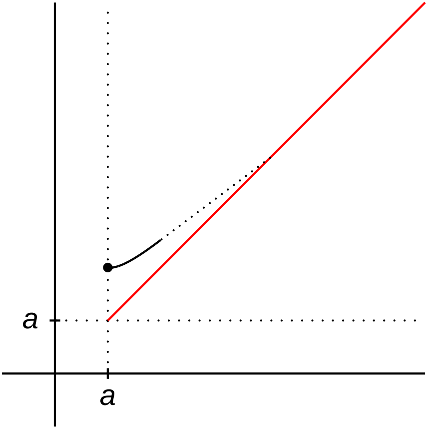
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



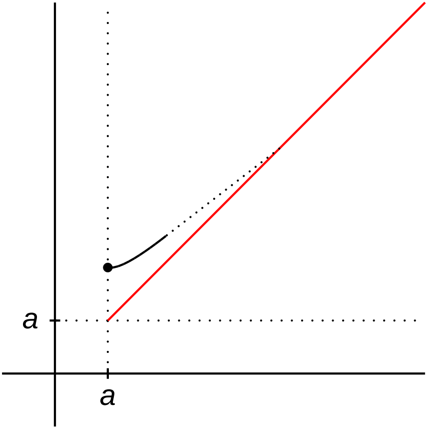
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



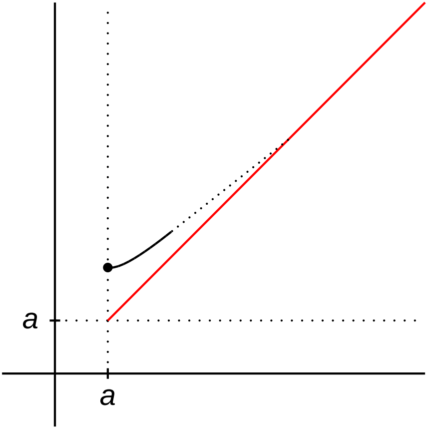
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



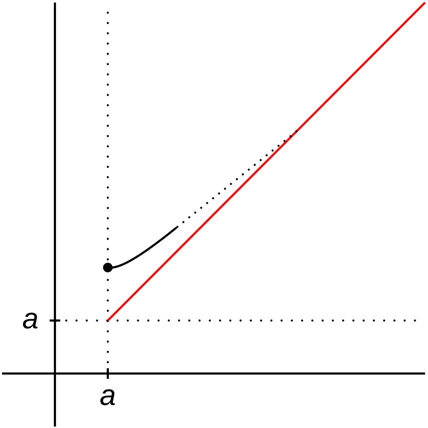
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



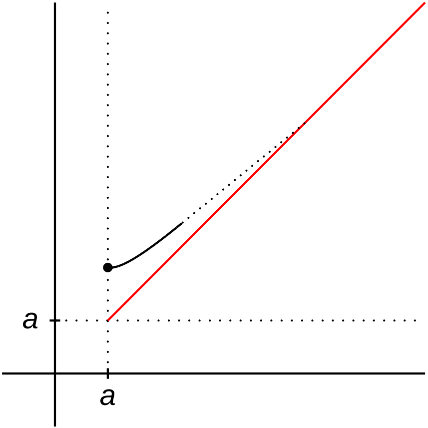
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



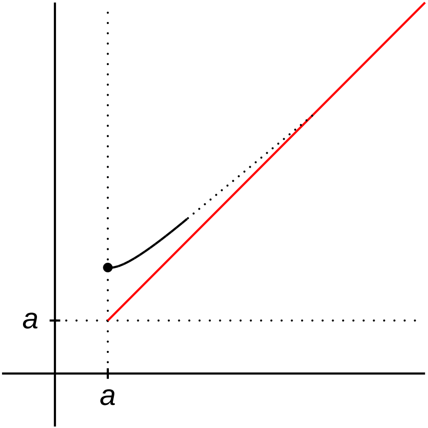
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



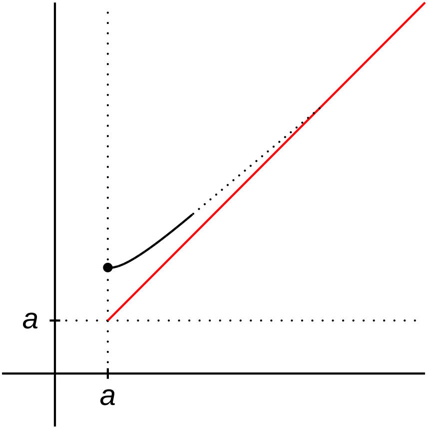
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



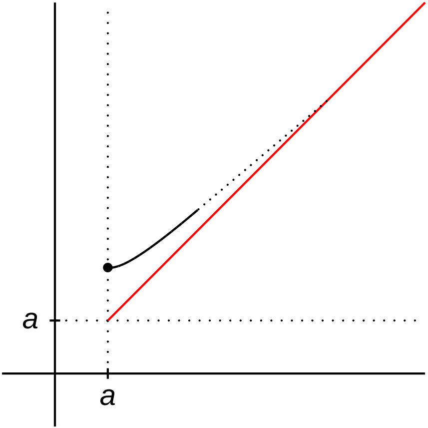
¿Por qué $f : [a, +\infty) \rightarrow [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



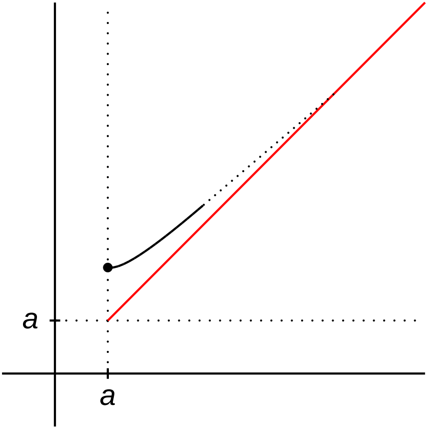
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



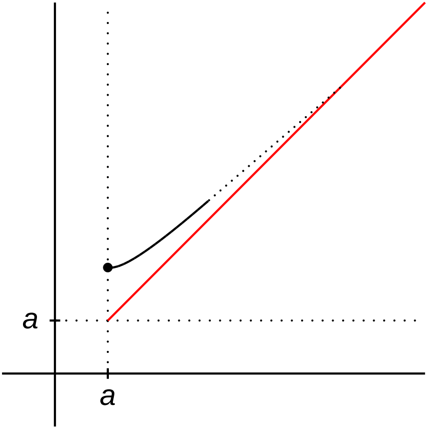
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



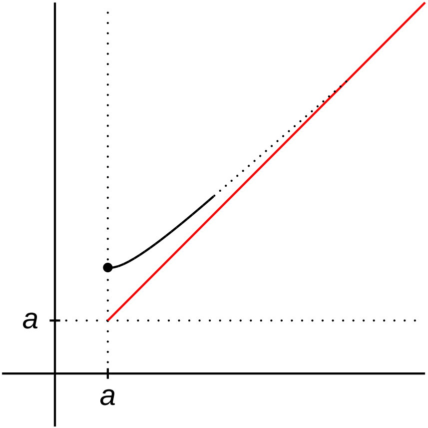
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



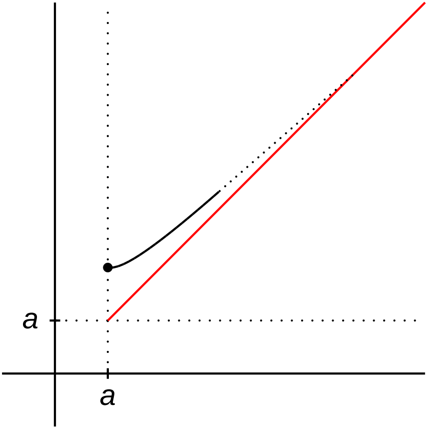
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



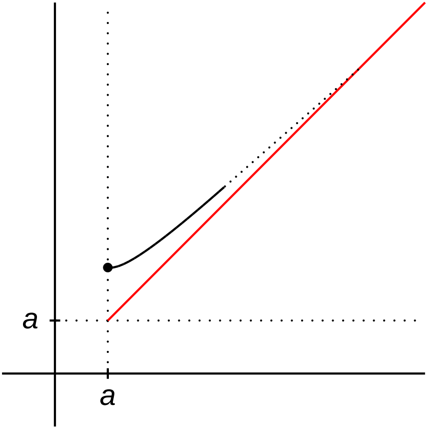
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



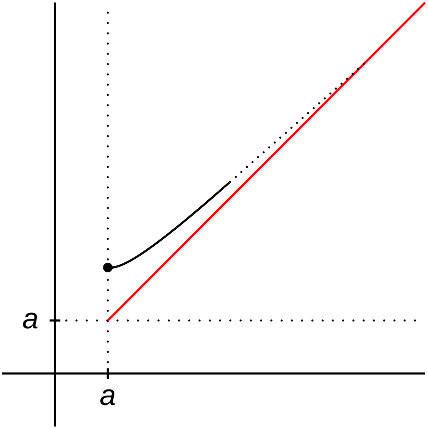
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



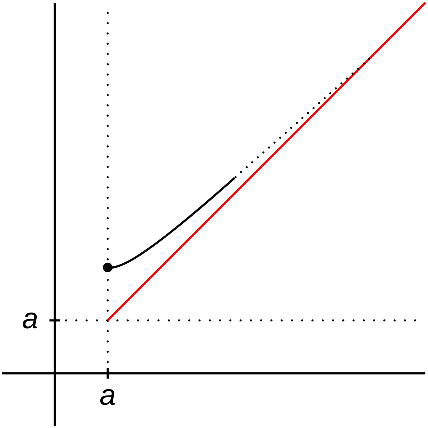
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



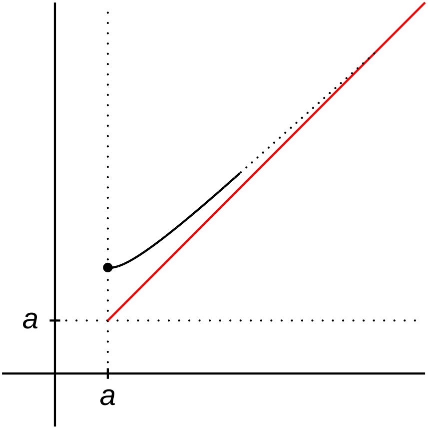
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



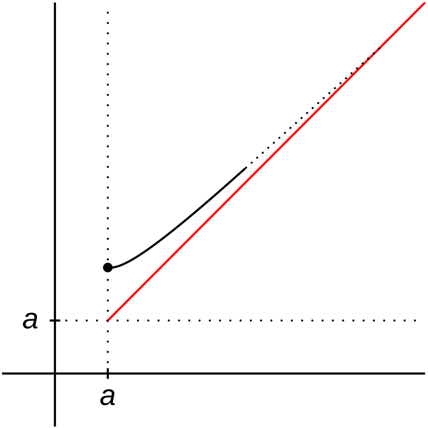
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



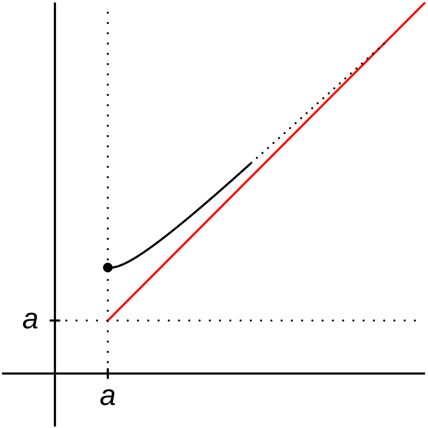
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



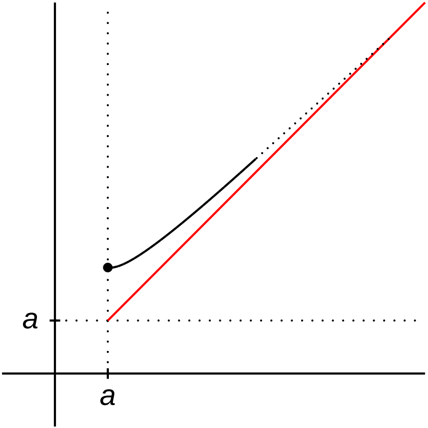
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



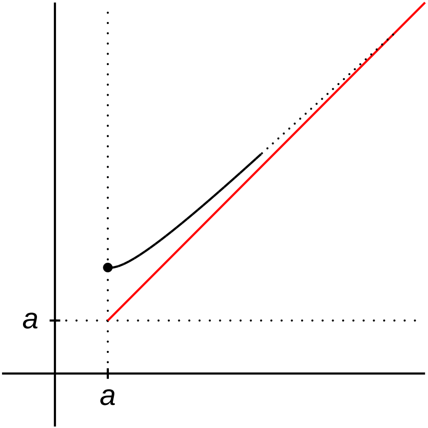
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



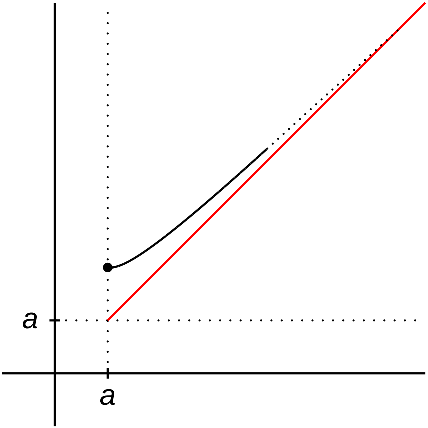
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



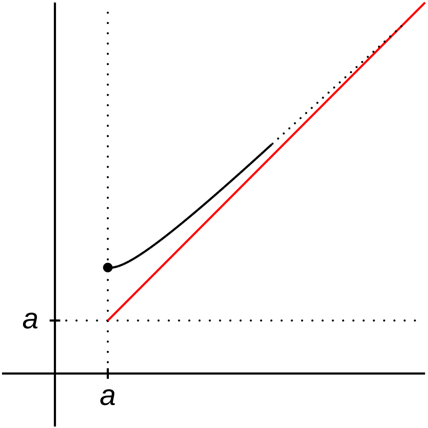
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



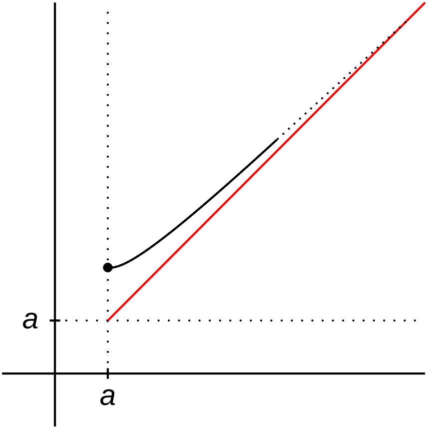
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



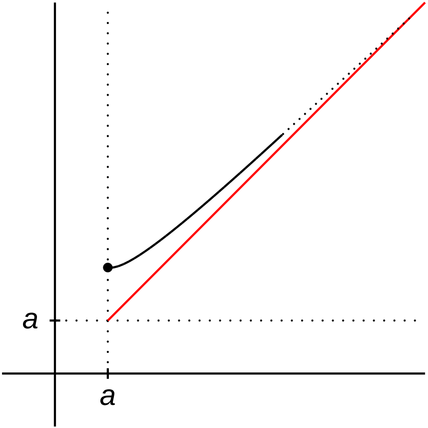
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



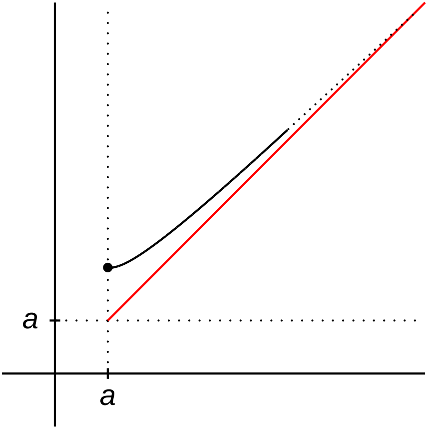
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



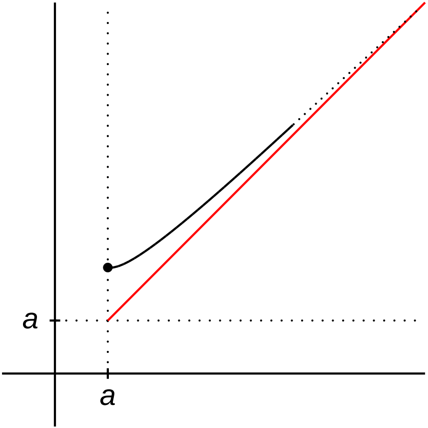
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



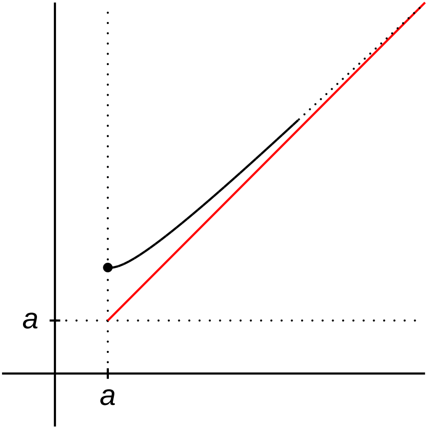
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



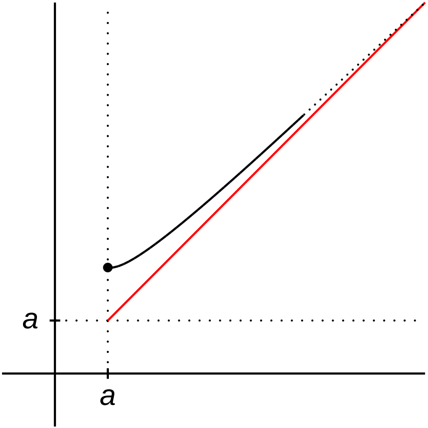
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



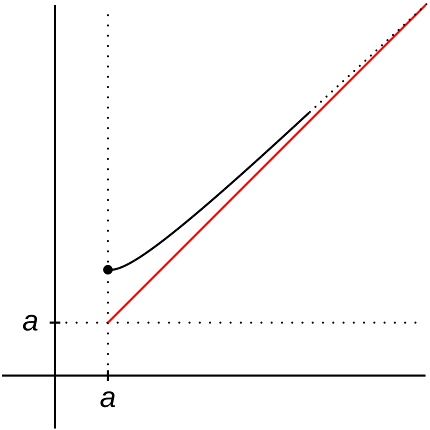
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



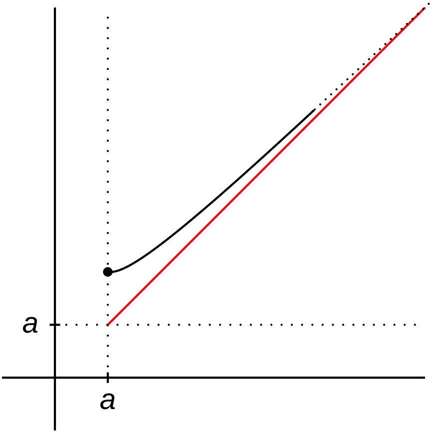
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



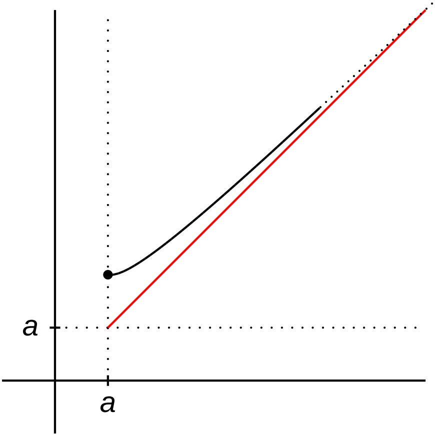
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



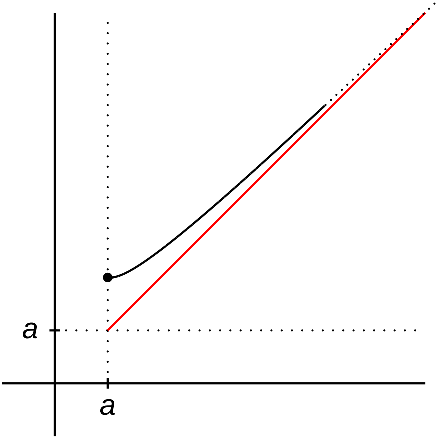
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



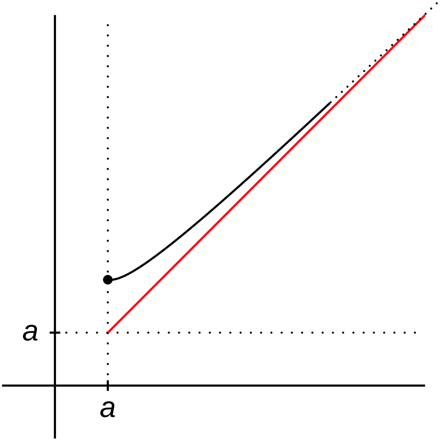
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



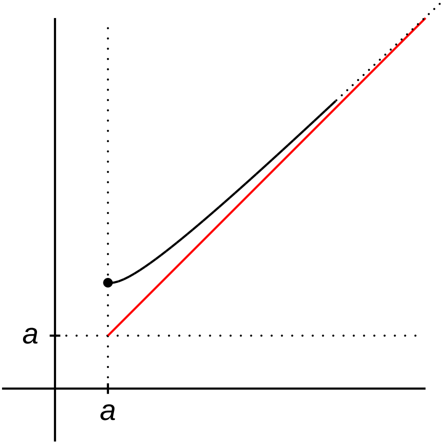
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



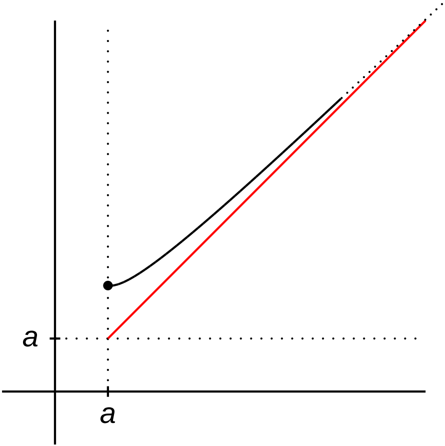
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



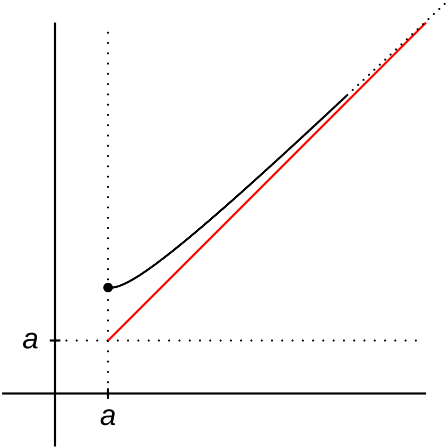
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



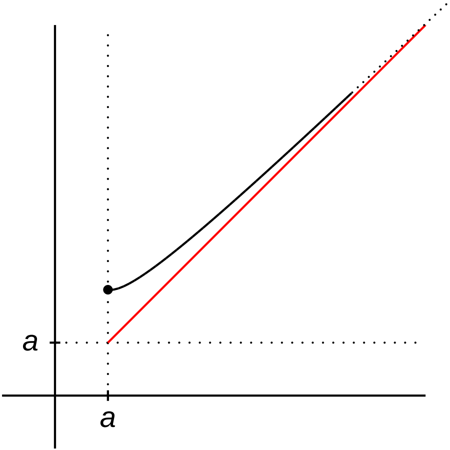
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



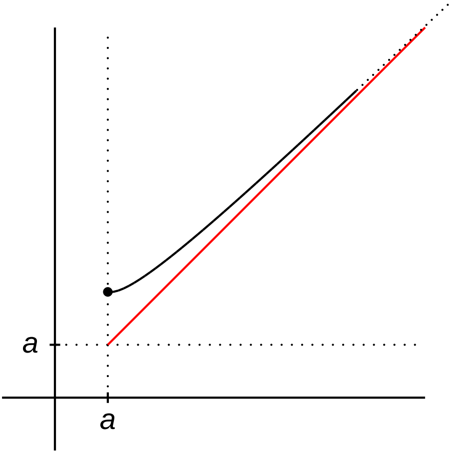
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



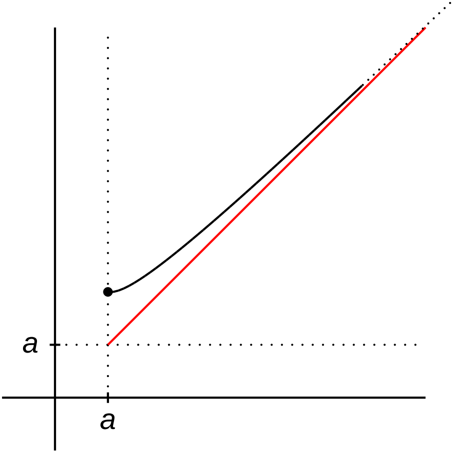
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



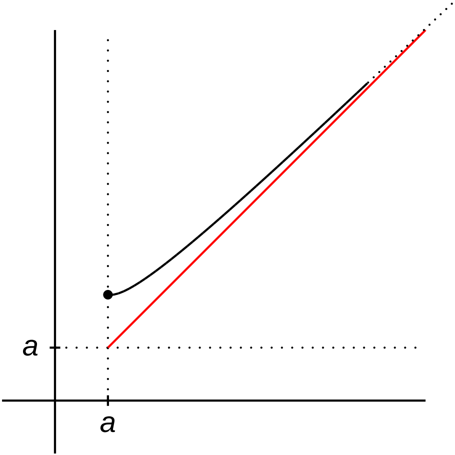
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



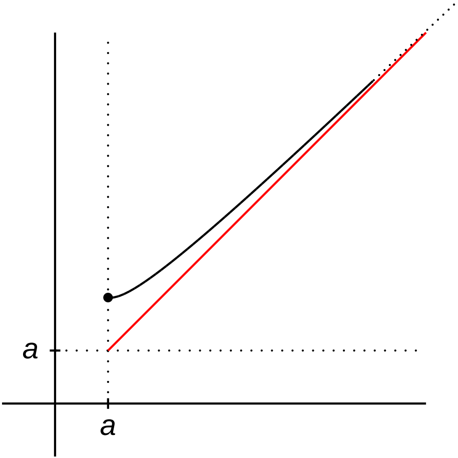
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



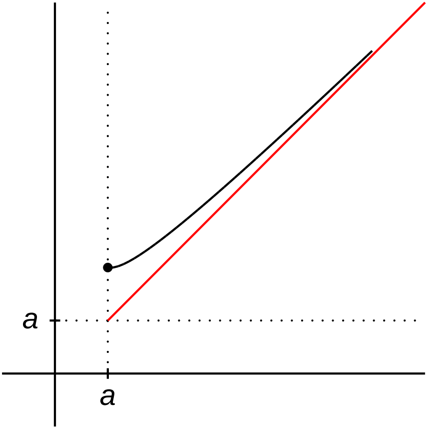
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



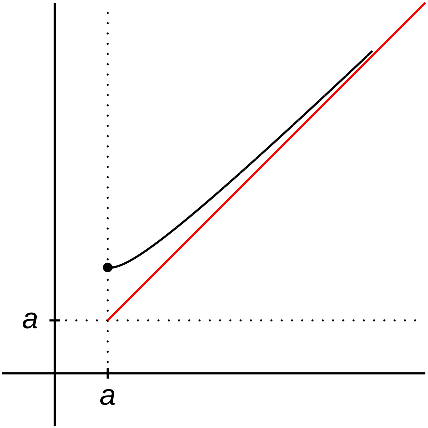
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



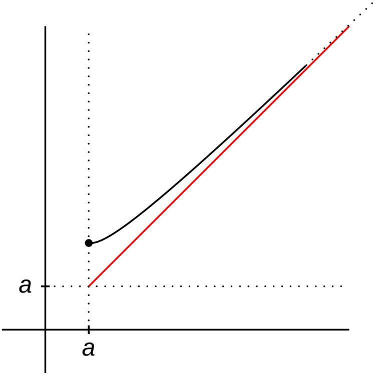
¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?

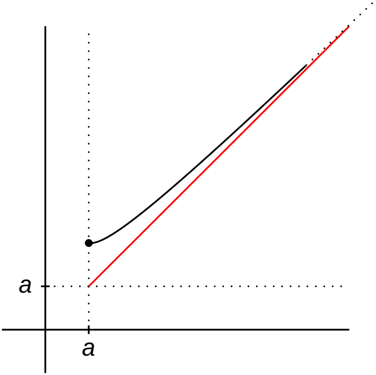


¿Por qué $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ puede no tener punto fijo?



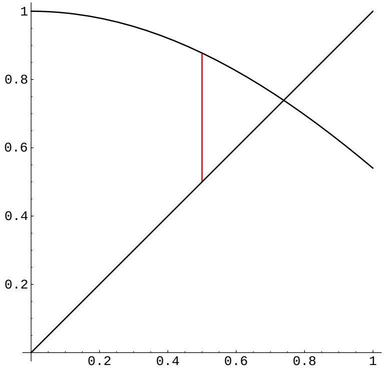
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ **punto fijo?**





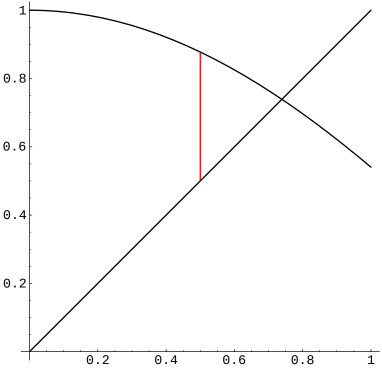
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;



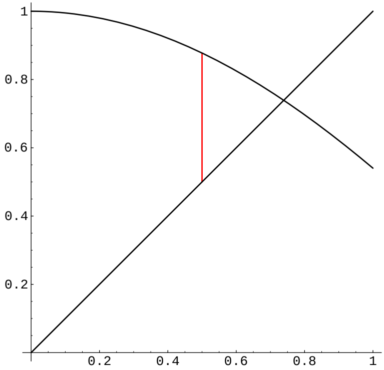
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;



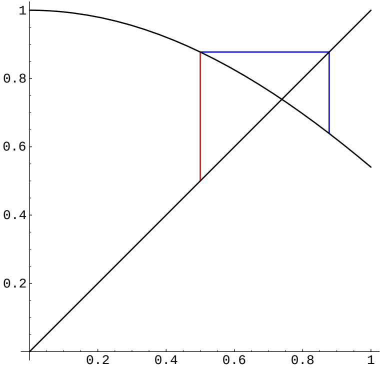
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;



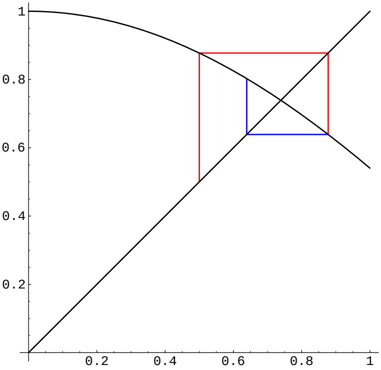
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;



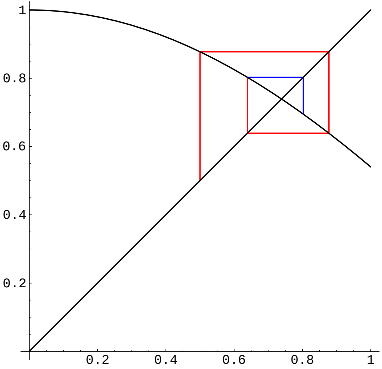
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;



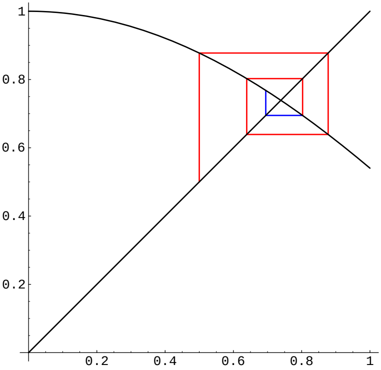
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \le M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$ es de Cauchy;



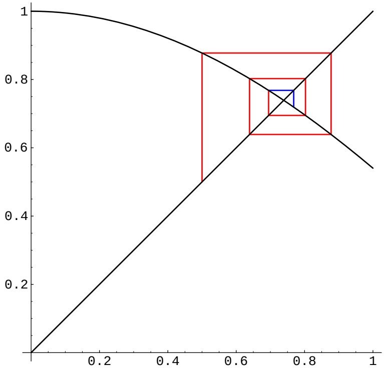
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;



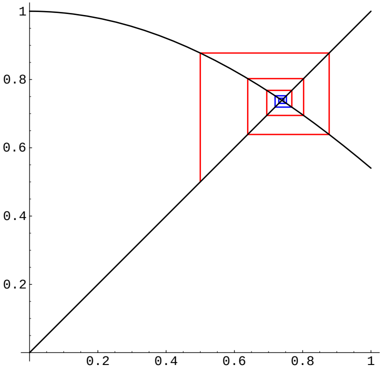
¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$ es de Cauchy;



¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;



¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;
   - $x = \lim_n x_n \Rightarrow x = f(x)$!.

Espacios métricos y puntos fijos

4.68 Recurrir a la demostración del teorema del punto fijo (teorema 4.48) para las cuestiones de notación.

a) Probar que $d(p, p_n) \leq d(x, f(x))\alpha^n/(1 - \alpha)$.
Esta desigualdad, útil en trabajos numéricos, proporciona una aproximación de la distancia existente entre p_n y el punto fijo p. Se da un ejemplo en (b).

b) Tomar $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2/x)$, $S = [1, +\infty]$. Probar que f es una contracción de S cuya constante de contracción es $\alpha = \frac{1}{2}$ y cuyo punto fijo es $p = \sqrt{2}$. Formar la sucesión $\{p_n\}$ empezando por $x = p_0 = 1$ y probar que $|p_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}$.

4.69 Probar, utilizando contraejemplos, que el teorema del punto fijo no tiene por qué verificarse si (a), el espacio métrico subyacente no es completo, o bien si (b), la constante de contracción $\alpha \geq 1$.

4.70 Sea $f : S \to S$ una función de un espacio métrico completo (S, d) en sí mismo. Supongamos que existe una sucesión real $\{\alpha_n\}$ convergente hacia 0 tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y)$ para todo $n \geq 1$ y todo x, y de S, donde f^n es la n-ésima iteración de f, es decir,

$$f^1(x) = f(x),\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \text{ para } n \geq 1.$$

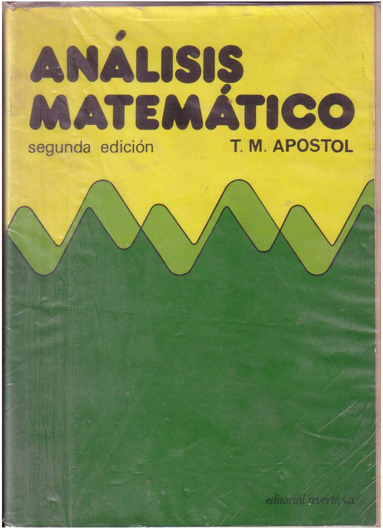
Probar que f tiene un punto fijo. *Indicación.* Aplíquese el teorema del punto fijo a f^m para un m conveniente.

4.71 Sea $f : S \to S$ una función de un espacio métrico (S, d) en sí mismo tal que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;
   - $x = \lim_n x_n \Rightarrow x = f(x)$!.
5. Ejercicio

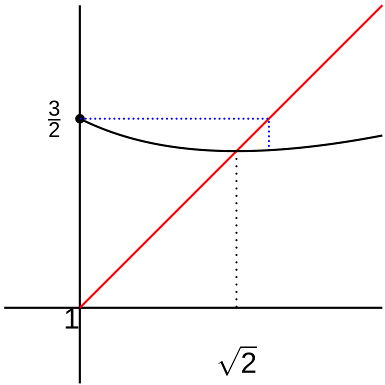


¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

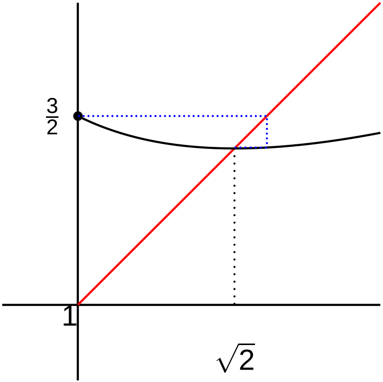
1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;
   - $x = \lim_n x_n \Rightarrow x = f(x)$!.
5. Ejercicio

Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

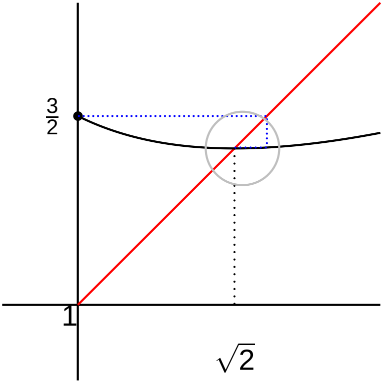
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$



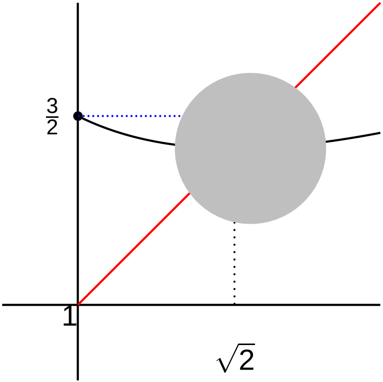
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$



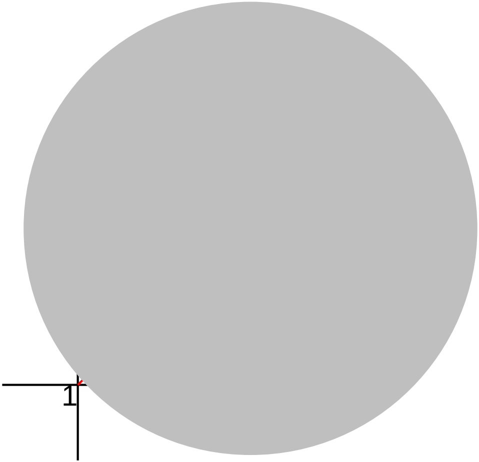
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

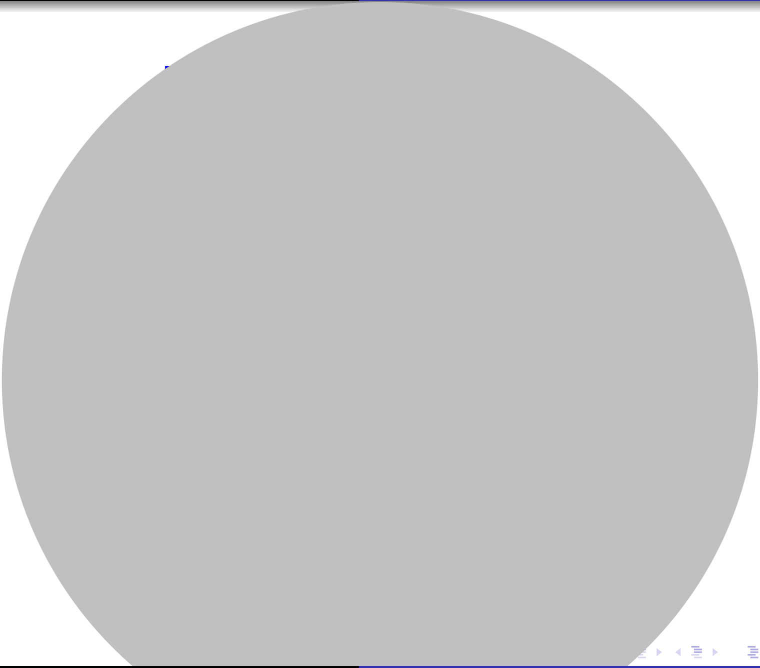


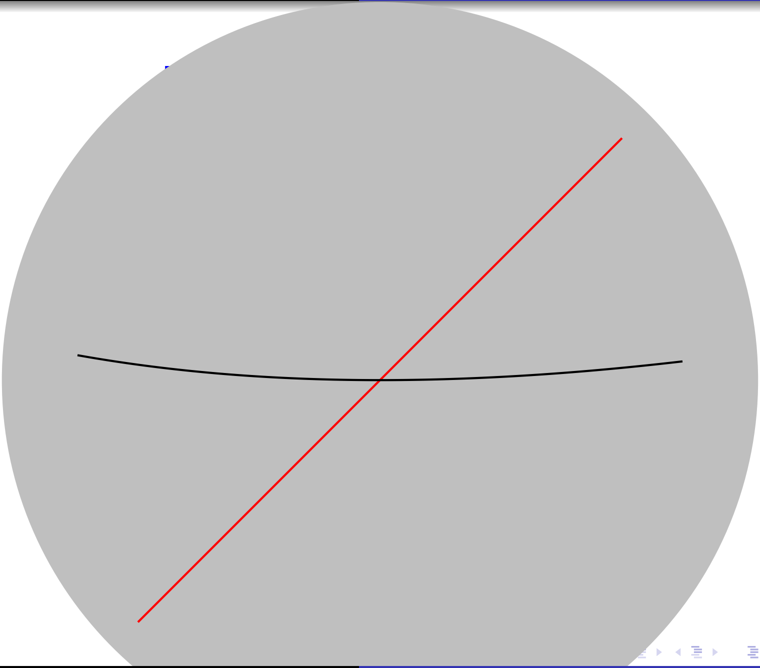
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

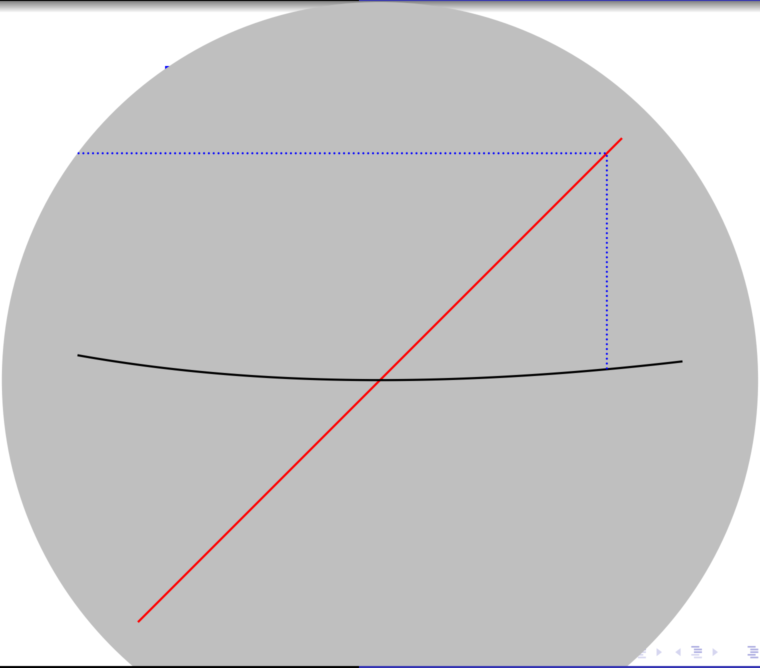


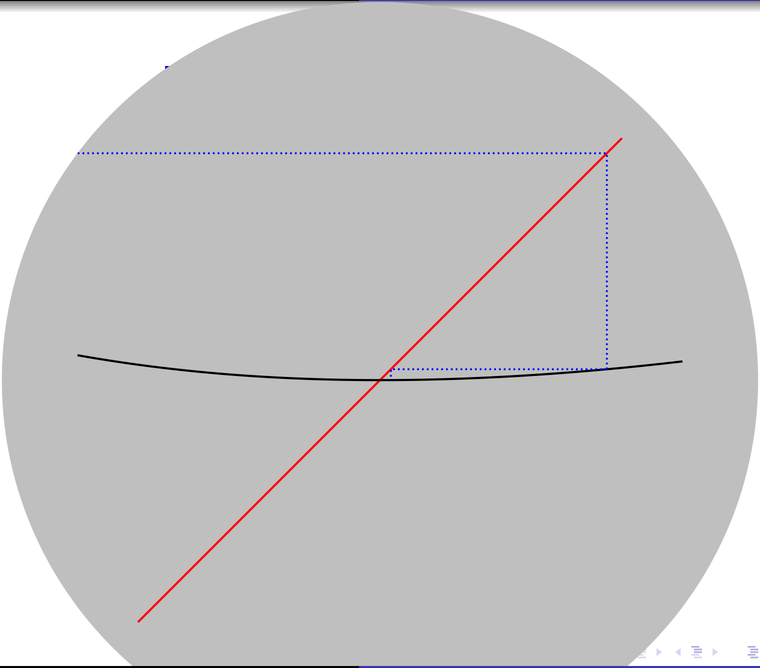
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

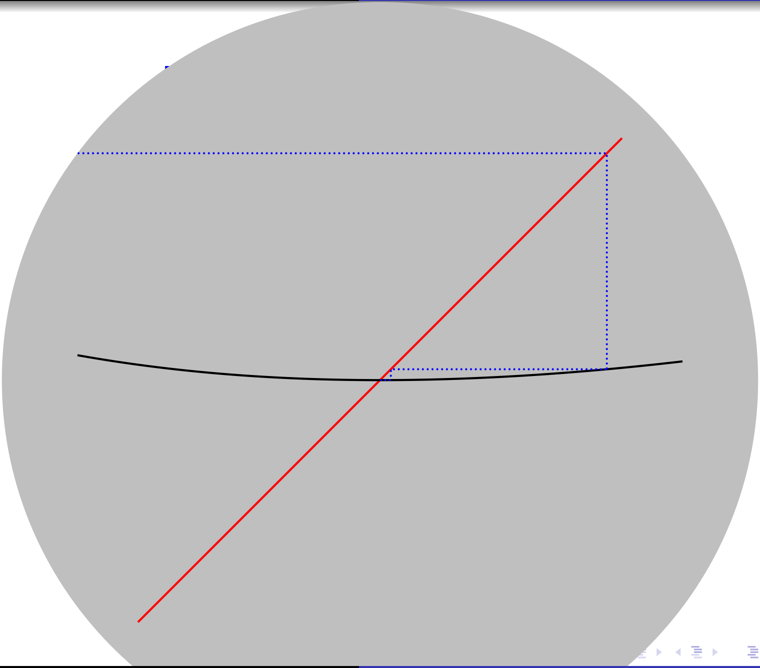






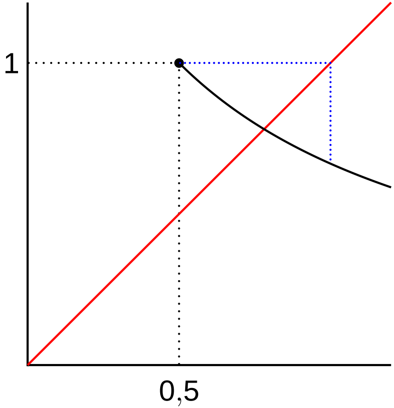




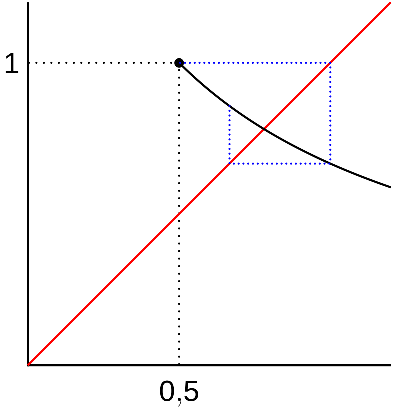


Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$

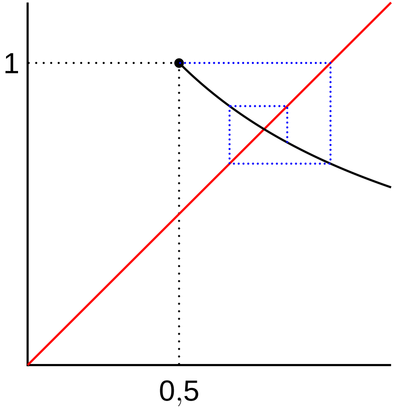
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



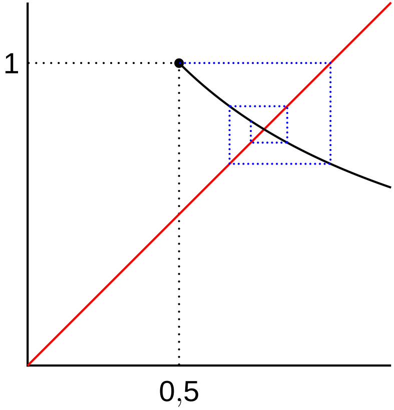
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



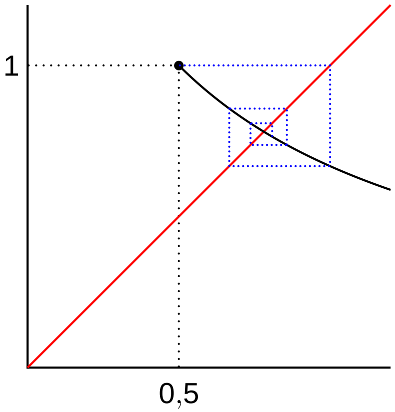
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



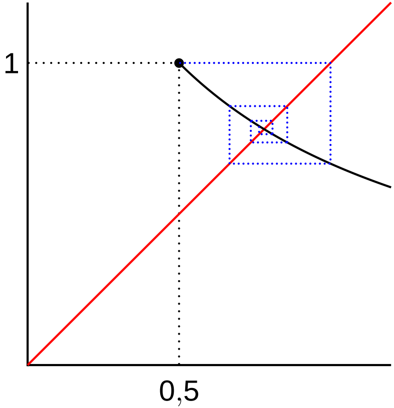
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



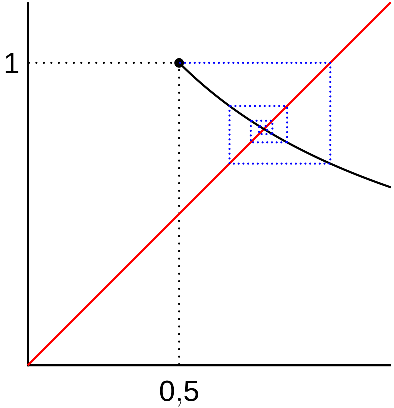
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



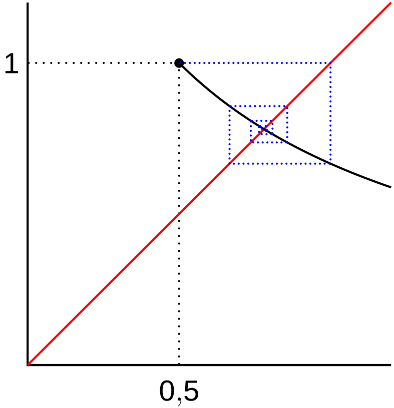
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



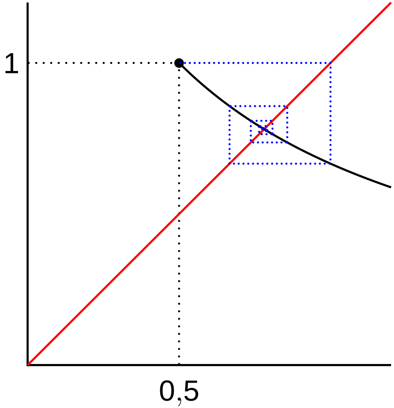
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



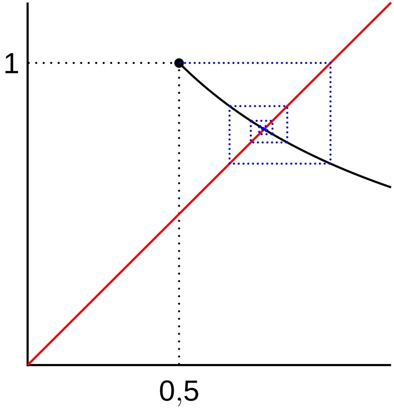
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$

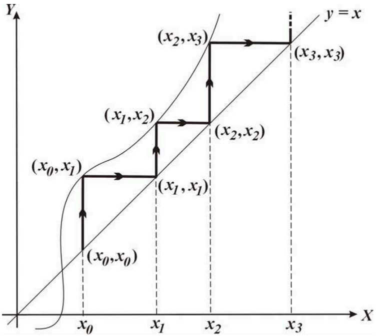


Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$



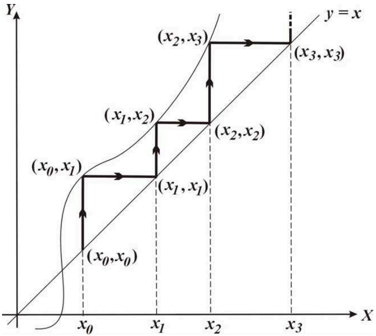
Punto fijo de $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$





¿$f : [a,+\infty) \to [a,+\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a,+\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;
   - $x = \lim_n x_n \Rightarrow x = f(x)$!.
5. Ejercicio



¿$f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ punto fijo?

1. impedir que $|f'(x)| \approx 1$;
2. obligar $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x;
3. *i.e.* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y;
4. La hipótesis de arriba implica que si $x_0 \in [a, +\infty)$ entonces:
   - $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ es de Cauchy;
   - $x = \lim_n x_n \Rightarrow x = f(x)!$.
5. Ejercicio

Esencial

- Sucesiones de Cauchy $\equiv$ convergentes;
- $0 \leq M < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} M^n = \frac{1}{1-M}$;

Métrica y puntos fijos: Banach (1922)

Principio de Contracción de Banach

- M un espacio con una métrica d.
- $T : M \longrightarrow M$ es *lipschitziana* si existe un $k \geq 0$ tal que, para todos $x, y \in M$,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

- $T : M \longrightarrow M$ contractiva$\equiv$lipschitziana y $k < 1$.

Principio de Contracción de Banach

- M un espacio con una métrica d.
- $T : M \longrightarrow M$ es *lipschitziana* si existe un $k \geq 0$ tal que, para todos $x, y \in M$,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

- $T : M \longrightarrow M$ contractiva≡lipschitziana y $k < 1$.

Principio de Contracción de Banach

Sean (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \longrightarrow M$ una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo en M, y para cada $x_0 \in M$, la sucesión de iteradas $(T^n x_0)_n$ converge a dicho punto fijo.

Principio de la Contracción

Sean (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \longrightarrow M$ una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo en M, y para cada $x_0 \in M$, la sucesión de iteradas $(T^n x_0)_n$ converge a dicho punto fijo.

Demostración.-

- Para $x_0 \in M$ definimos la sucesión iterativa $(x_n)_n$ dada por $x_{n+1} = Tx_n$.
- Para $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n+p}) \le k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k} \right) d(x_0, Tx_0).$$

- $(x_n)_n$ es de Cauchy

Principio de la Contracción

Sean (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \longrightarrow M$ una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo en M, y para cada $x_0 \in M$, la sucesión de iteradas $(T^n x_0)_n$ converge a dicho punto fijo.

Demostración.-

- Para $x_0 \in M$ definimos la sucesión iterativa $(x_n)_n$ dada por $x_{n+1} = Tx_n$.
- Para $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq k^n \left(\frac{1 - k^p}{1 - k} \right) d(x_0, Tx_0).$$

- $(x_n)_n$ es de Cauchy
- Existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$.
- $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$;

Principio de la Contracción

Sean (M,d) un espacio métrico completo y $T: M \longrightarrow M$ una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo en M, y para cada $x_0 \in M$, la sucesión de iteradas $(T^n x_0)_n$ converge a dicho punto fijo.

Demostración.-

- Para $x_0 \in M$ definimos la sucesión iterativa $(x_n)_n$ dada por $x_{n+1} = Tx_n$.
- Para $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) d(x_0, Tx_0).$$

- $(x_n)_n$ es de Cauchy
- Existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$.
- $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$;
- x es único.

Topología y puntos fijos: Brouwer (1912)

Teorema de Brouwer

- $B^n := \left\{ x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$
- $S^{n-1} := \left\{ x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}.$
- Para $n = 2$, identificaremos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$.

Teorema de Brouwer

- $B^n := \left\{ x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$
- $S^{n-1} := \left\{ x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$.
- Para $n = 2$, identificaremos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$.

Teorema de Brouwer

Sea $\varphi : B^n \longrightarrow B^n$ una aplicación continua de la bola unidad en sí misma. Entonces, φ tiene un punto fijo en B^n, *i.e.*, existe $x \in B^n$ tal que $\varphi(x) = x$.

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;
5. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer 1909;

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;
5. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer 1909;
6. n arbitrario J. Hadamard 1910;

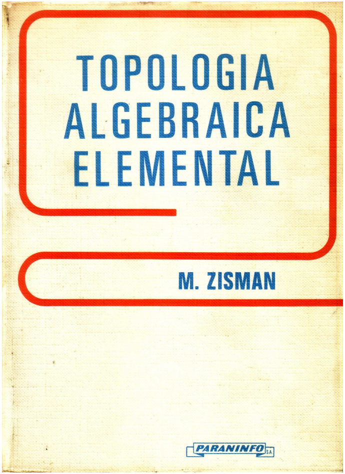
L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;
5. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer 1909;
6. n arbitrario J. Hadamard 1910;
7. Brouwer, en 1912, prueba distinta a la Hadamard;

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;
5. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer 1909;
6. n arbitrario J. Hadamard 1910;
7. Brouwer, en 1912, prueba distinta a la Hadamard;
8. Diversas demostraciones.

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966



1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;
5. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer 1909;
6. n arbitrario J. Hadamard 1910;
7. Brouwer, en 1912, prueba distinta a la Hadamard;
8. Diversas demostraciones.
9. Topología algebraica.

L. E. J. Brouwer, holandés 1881-1966

1. Trabajó fundamentalmente en *filosofía de las matemáticas y lógica*.
2. Trabajó en topología: 1909-1913;
3. No fue el primero en demostrar *su teorema*;
4. Para $n = 1$, Bolzano 1817;
5. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer 1909;
6. n arbitrario J. Hadamard 1910;
7. Brouwer, en 1912, prueba distinta a la Hadamard;
8. Diversas demostraciones.
9. Topología algebraica.
10. Análisis: The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 7 (Aug. - Sep., 1980), pp. 525-527

A LESS STRANGE VERSION OF MILNOR'S PROOF OF BROUWER'S FIXED-POINT THEOREM

C. A. ROGERS

In a recent note [1], John Milnor gives a proof of the "hairy dog theorem" and deduces the Brouwer fixed-point theorem as a consequence. Milnor describes his proof as strange but elementary. In this note we give a less strange and more direct proof of the following retraction theorem, which is well known to be equivalent, in a completely elementary and fairly simple way, to the Brouwer fixed-point theorem.

THEOREM 1. *It is not possible for a continuous function* $\mathbf{f}$ *to map the unit ball* $B^n = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leqslant 1\}$ *of n-dimensional Euclidean space onto the unit sphere* $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ *and to satisfy*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

for all $\mathbf{x}$ *on* S^{n-1}.

The theorem is an immediate consequence of two lemmas.

LEMMA 1. *If there were a continuous map of* B^n *onto* S^{n-1} *leaving each point of* S^{n-1} *fixed, then there would be a continuously differentiable map with these properties.*

LEMMA 2. *It is not possible for a continuously differentiable function to map* B^n *onto* S^{n-1} *and to leave each point of* S^{n-1} *fixed.*

The proof of the first lemma uses standard ideas; the proof of the second lemma uses the ideas of Milnor.

Proof of Lemma 1. Let $\mathbf{f}$ map B^n continuously onto S^{n-1} and suppose that $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ for all $\mathbf{x}$ on S^{n-1}. Then $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ is continuous on B^n, vanishes on S^{n-1}, and satisfies

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leqslant 2 \tag{1}$$

on B^n. So we can choose θ with $\frac{3}{4} < \theta < 1$ so that

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| < \tfrac{1}{4}, \quad \text{for } \theta \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant 1. \tag{2}$$

Let $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ be the unit vectors along the coordinate axes. By the Weierstrass approximation theorem we can choose polynomials $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, so that

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathbf{e}_i - (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \Big\| < \tfrac{1}{4}, \tag{3}$$

for all $\mathbf{x}$ with $\|\mathbf{x}\| \leqslant 1$. Write

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathbf{e}_i,$$

for convenience. Again, using the Weierstrass approximation theorem, we can choose a polynomial Q satisfying

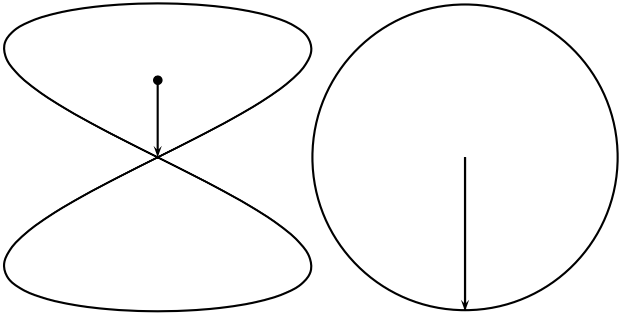
$$\tfrac{3}{4} \leqslant Q(r^2) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant r \leqslant \theta; \qquad |Q(r^2)| \leqslant 1, \quad \theta \leqslant r \leqslant 1; \qquad Q(1) = 0.$$

C. A. Rogers received his Ph.D. from the University of London in 1949, after studying with R. G. Cooke, L. S. Bosanquet, and H. Davenport. He has been at University College London on and off since 1938. He became a Fellow of the Royal Society in 1959 and has served as President of the London Mathematical Society (1970–72). He has worked on Geometry of numbers, Packing and covering, Hausdorff measures, Convexity, and Analytic sets.—*Editors*

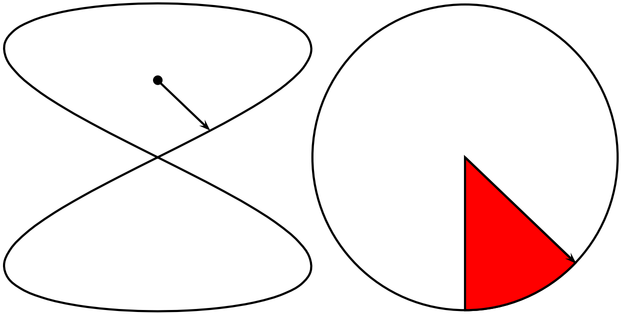
525

Prueba del teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

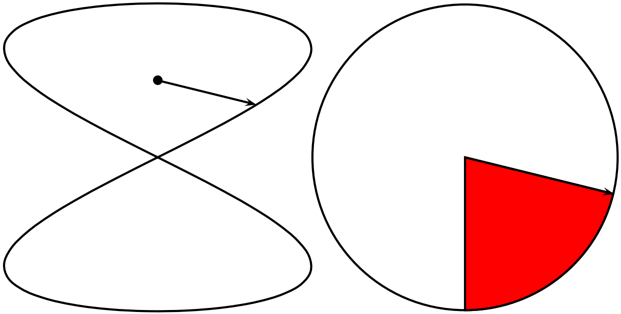
El teorema de Brouwer para n=2



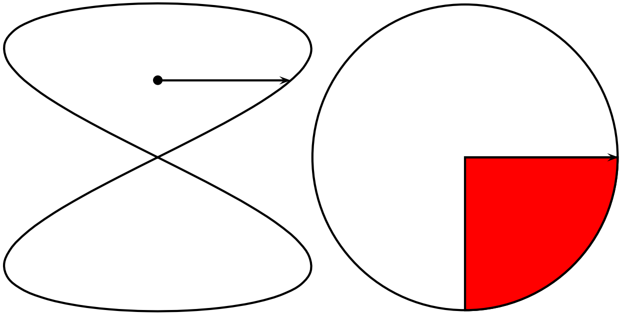
El teorema de Brouwer para n=2



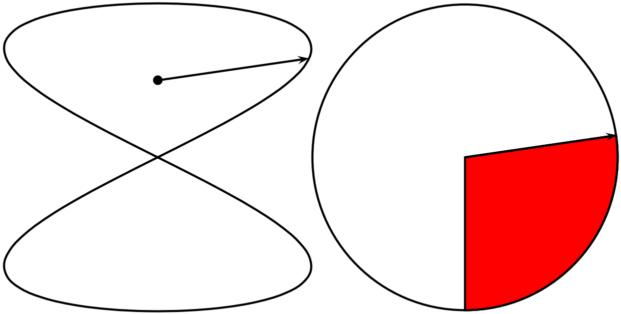
El teorema de Brouwer para n=2



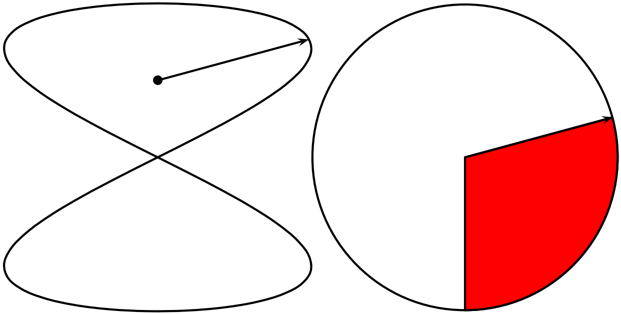
El teorema de Brouwer para n=2



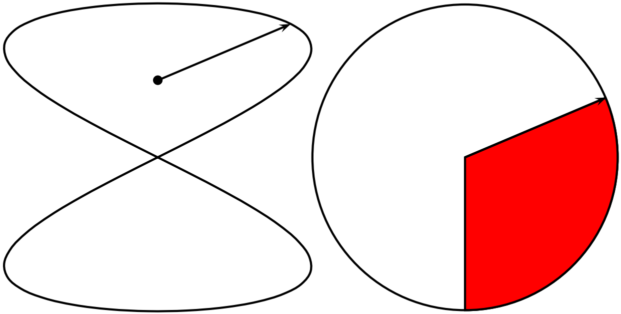
El teorema de Brouwer para n=2



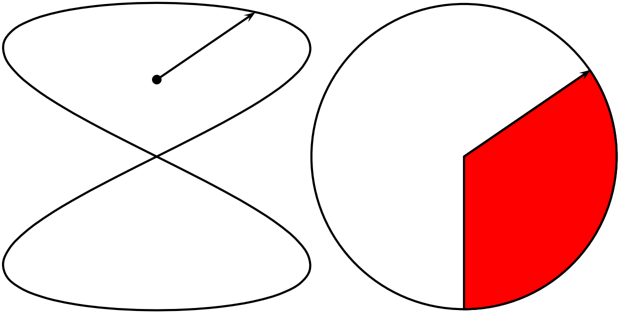
El teorema de Brouwer para n=2



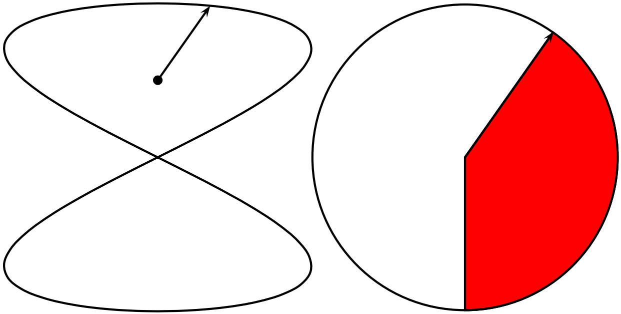
El teorema de Brouwer para n=2



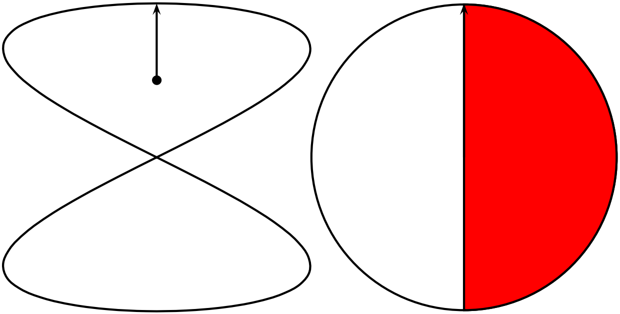
El teorema de Brouwer para n=2

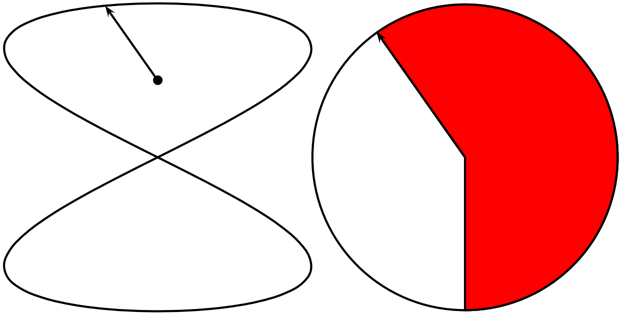


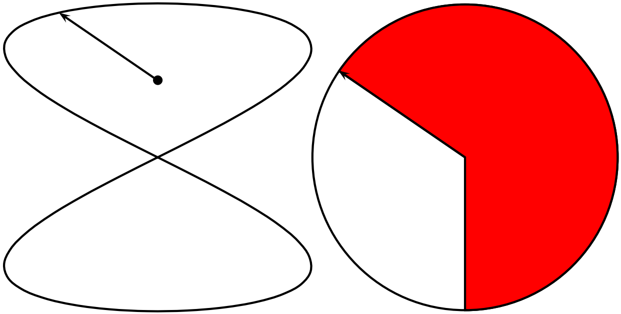
El teorema de Brouwer para n=2



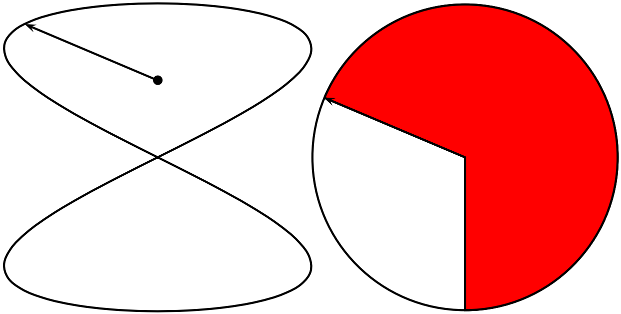
El teorema de Brouwer para n=2



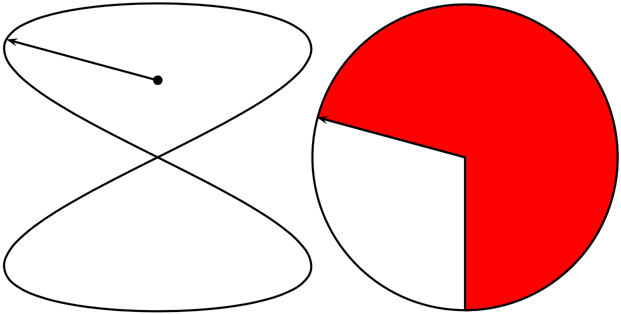




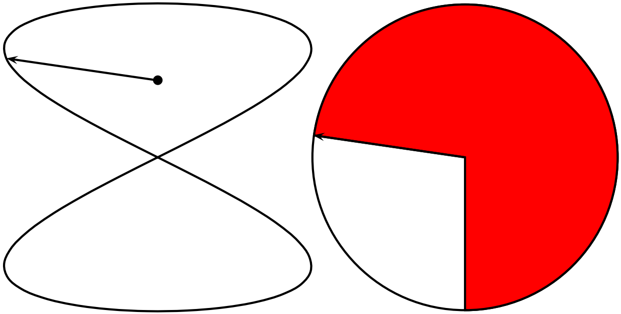
El teorema de Brouwer para n=2

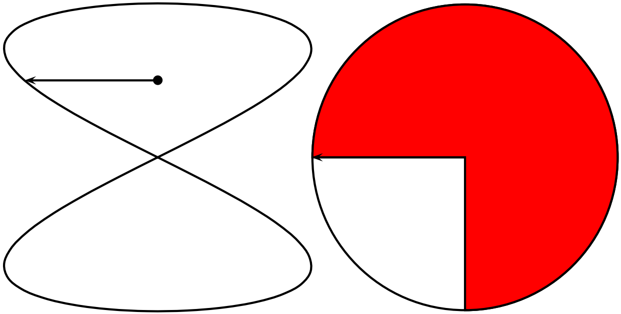


El teorema de Brouwer para n=2

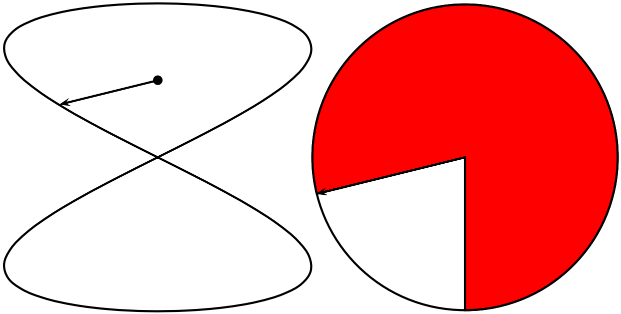


El teorema de Brouwer para n=2

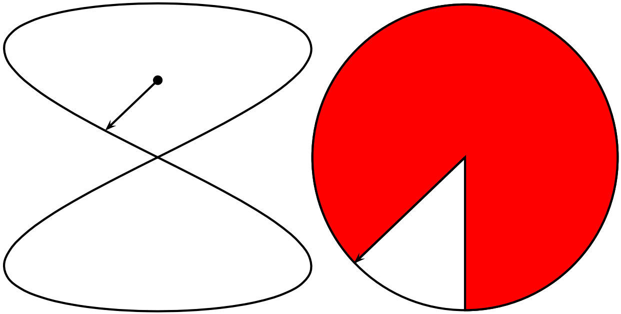




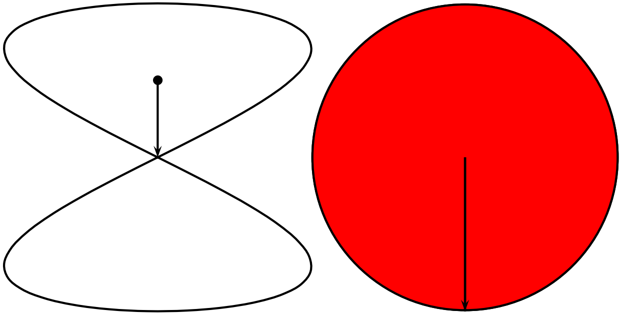
El teorema de Brouwer para n=2



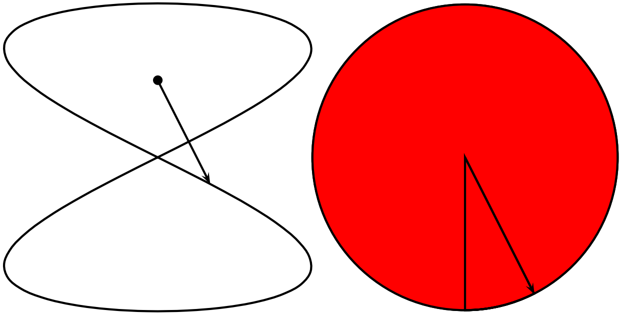
El teorema de Brouwer para n=2



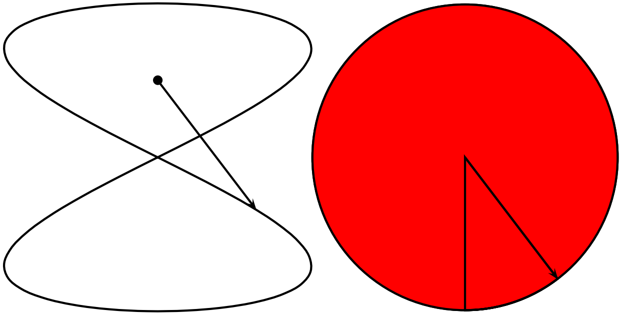
El teorema de Brouwer para n=2



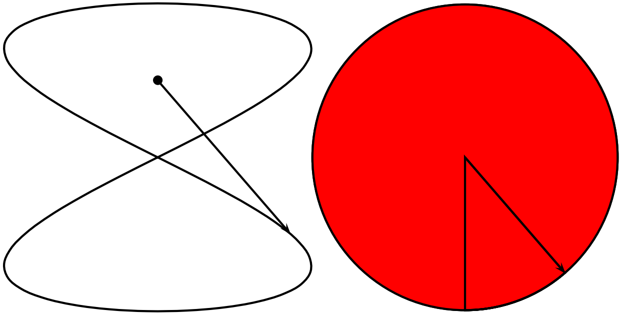
El teorema de Brouwer para n=2



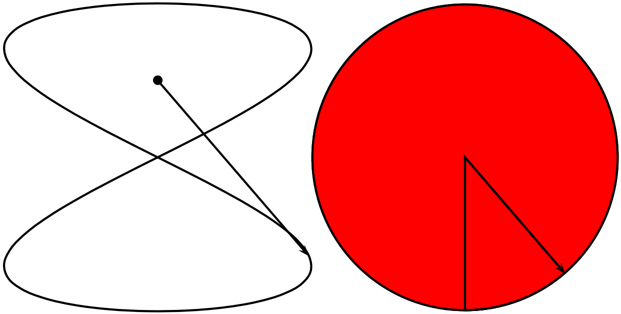
El teorema de Brouwer para n=2



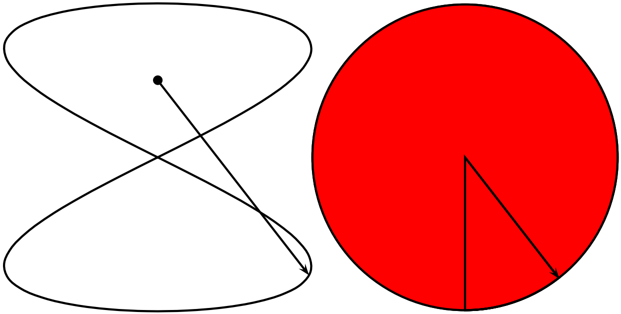
El teorema de Brouwer para n=2



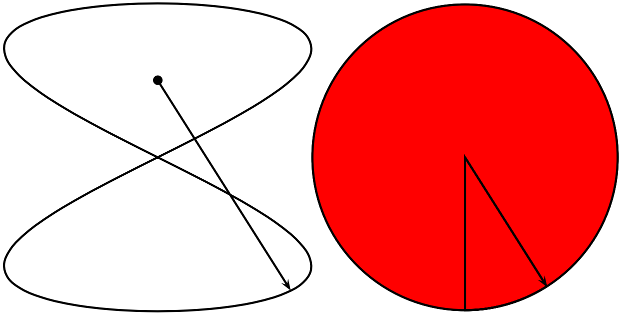
El teorema de Brouwer para n=2



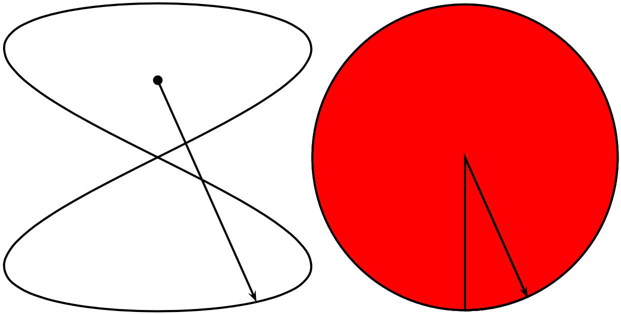
El teorema de Brouwer para n=2



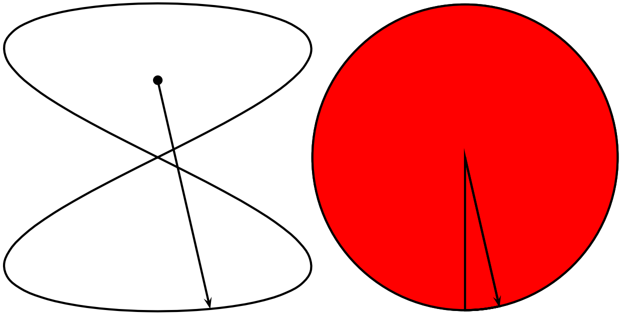
El teorema de Brouwer para n=2

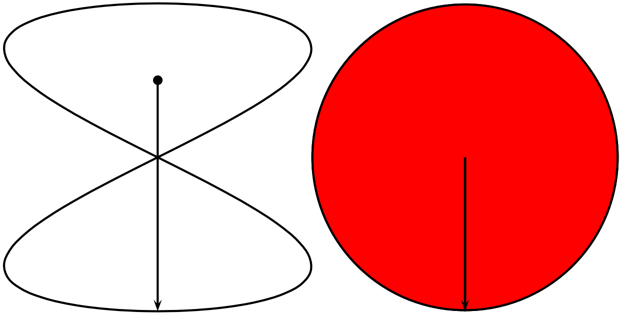


El teorema de Brouwer para n=2

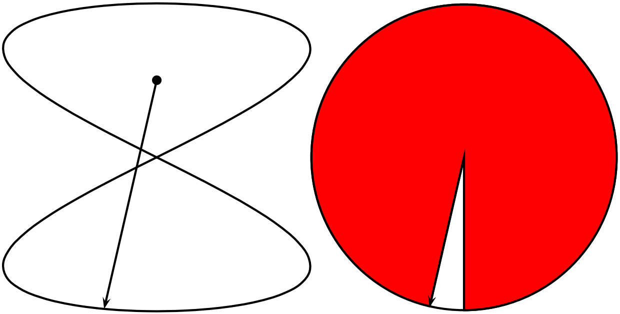


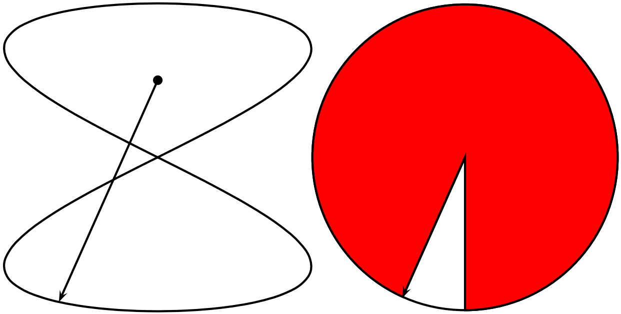
El teorema de Brouwer para n=2



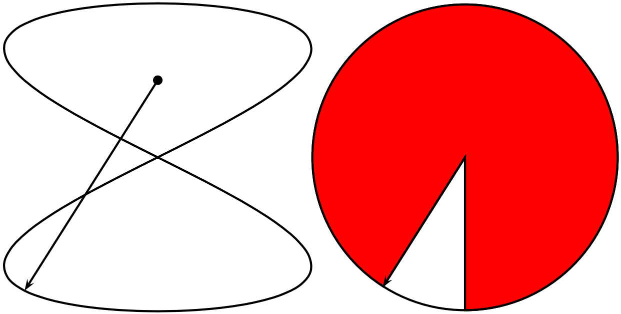


El teorema de Brouwer para n=2

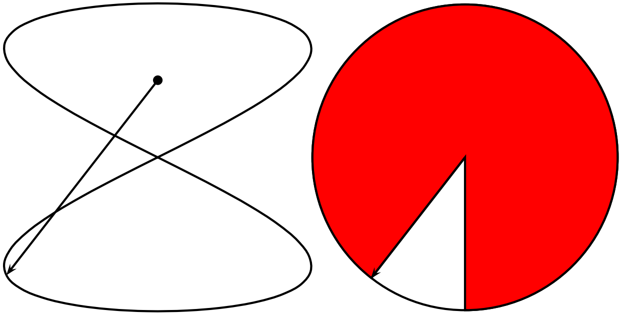




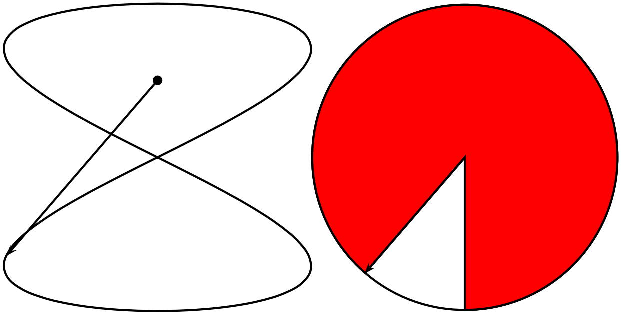
El teorema de Brouwer para n=2



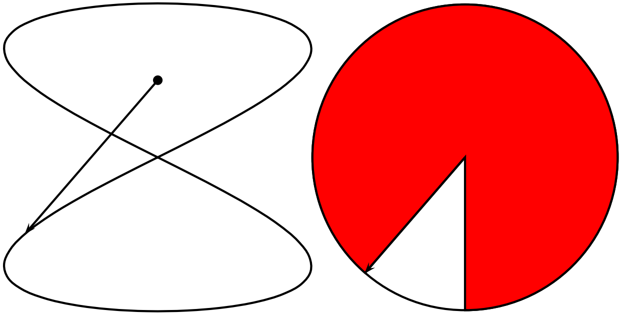
El teorema de Brouwer para n=2



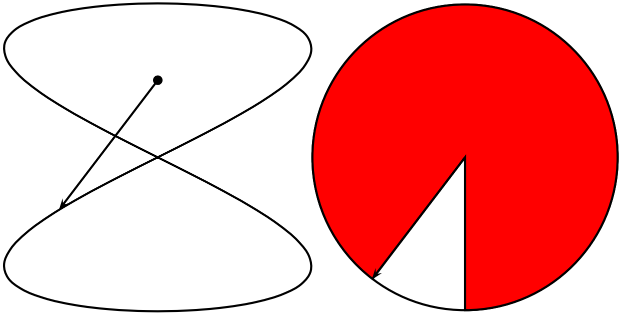
El teorema de Brouwer para n=2



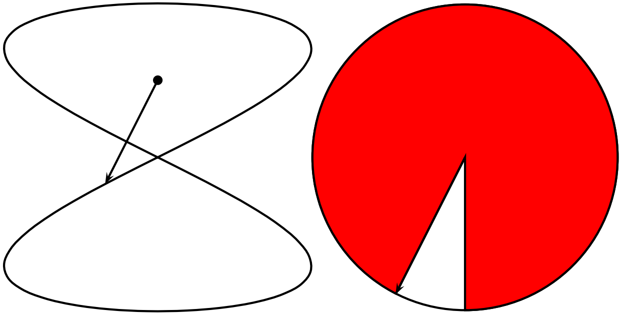
El teorema de Brouwer para n=2



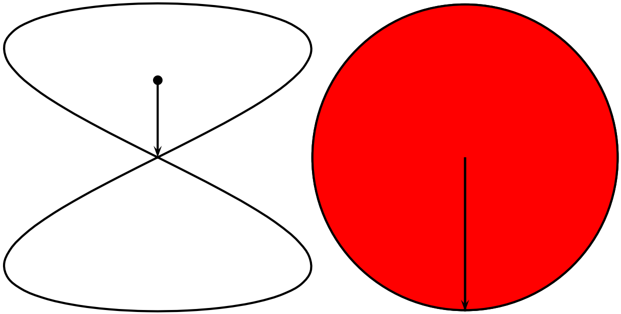
El teorema de Brouwer para n=2



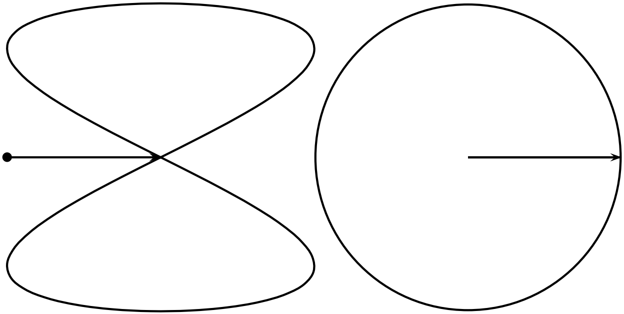
El teorema de Brouwer para n=2



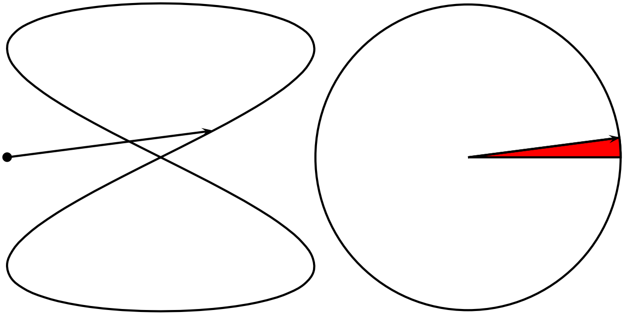
El teorema de Brouwer para n=2



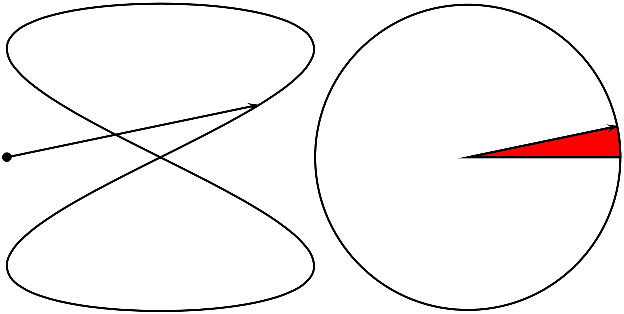
El teorema de Brouwer para n=2



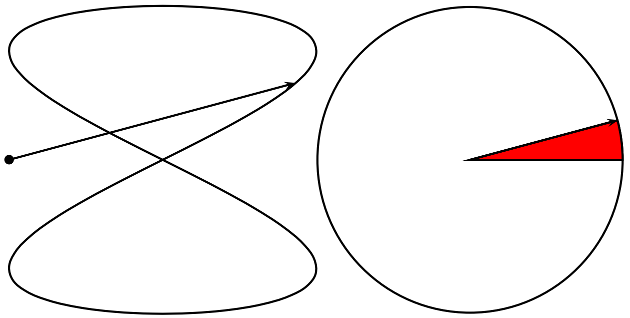
El teorema de Brouwer para n=2

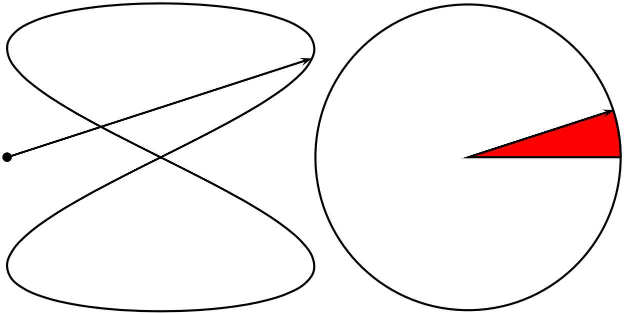


El teorema de Brouwer para n=2

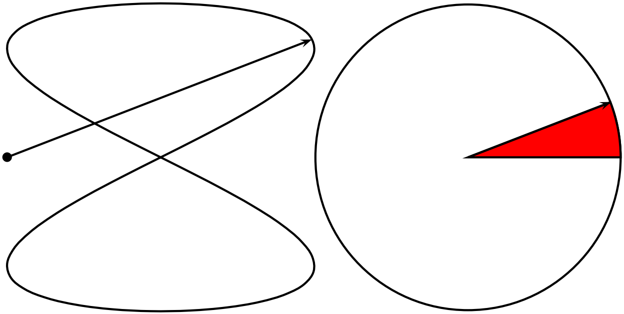


El teorema de Brouwer para n=2

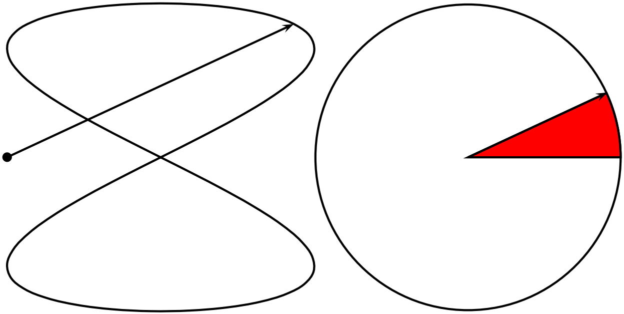




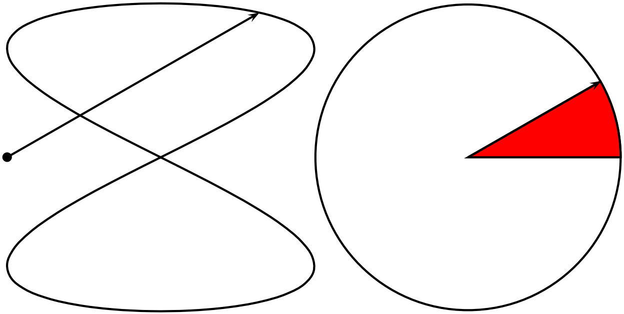
El teorema de Brouwer para n=2



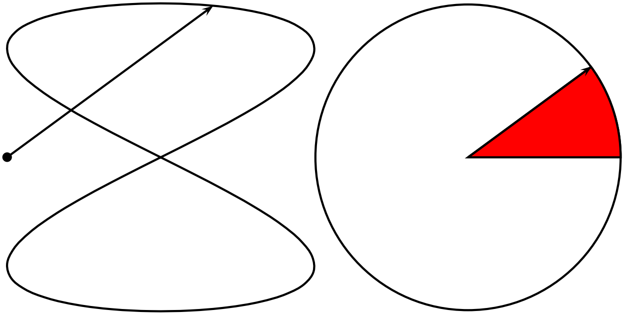
El teorema de Brouwer para n=2



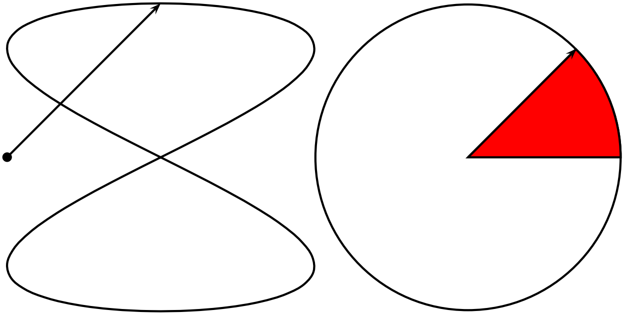
El teorema de Brouwer para n=2



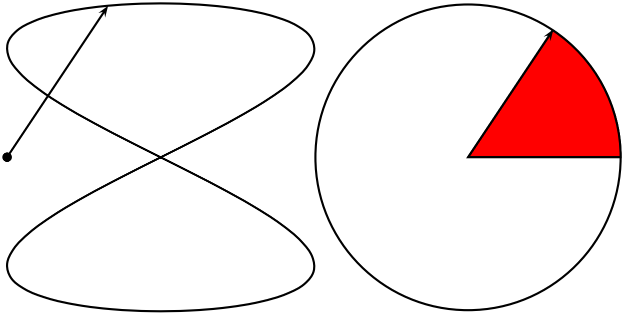
El teorema de Brouwer para n=2



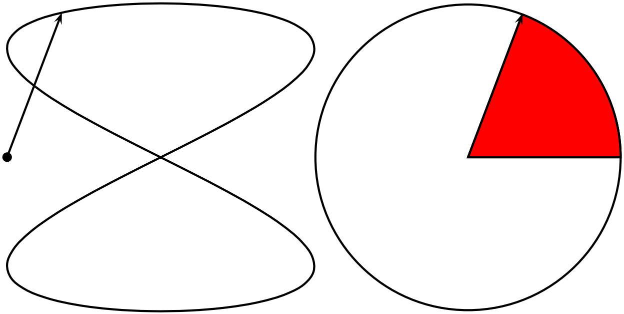
El teorema de Brouwer para n=2



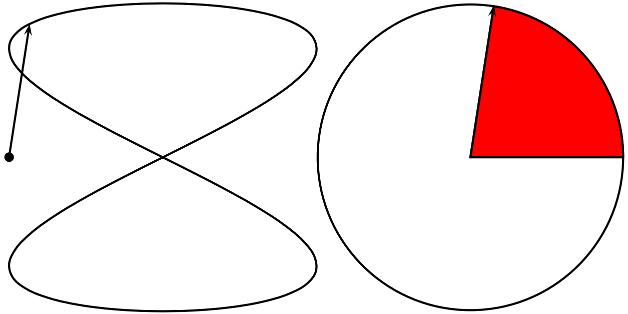
El teorema de Brouwer para n=2



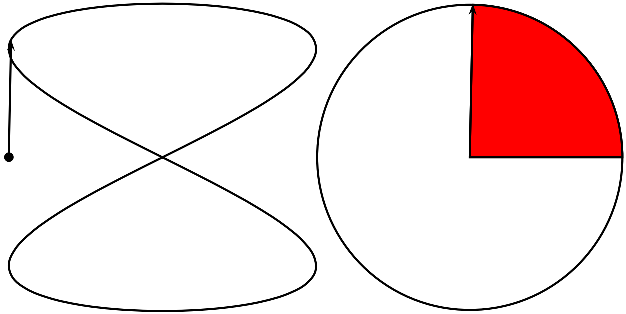
El teorema de Brouwer para n=2



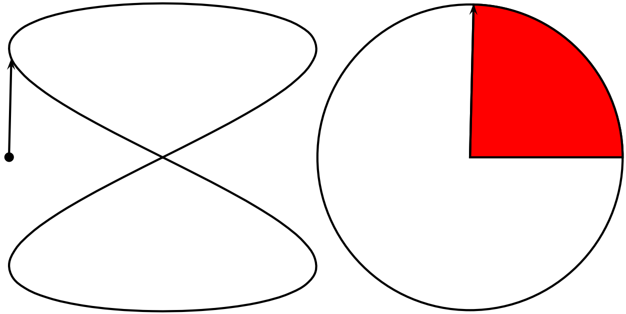
El teorema de Brouwer para n=2



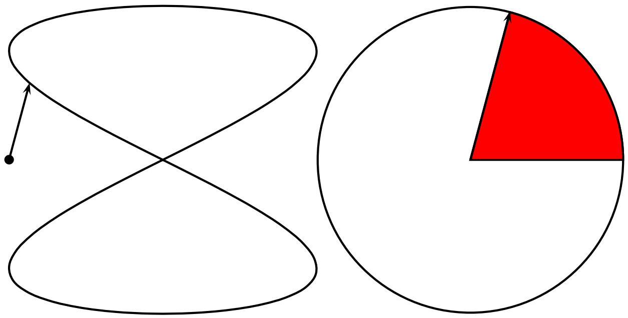
El teorema de Brouwer para n=2



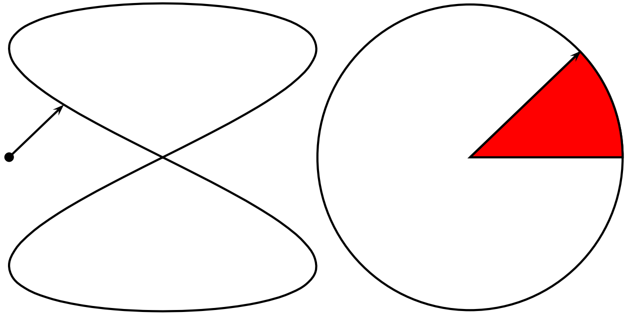
El teorema de Brouwer para n=2



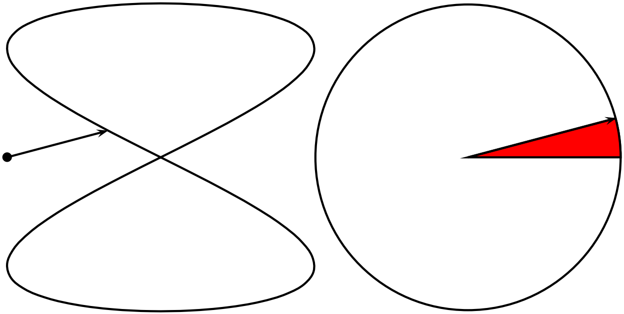
El teorema de Brouwer para n=2

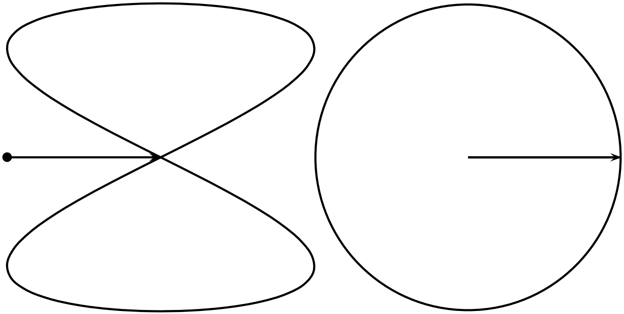


El teorema de Brouwer para n=2

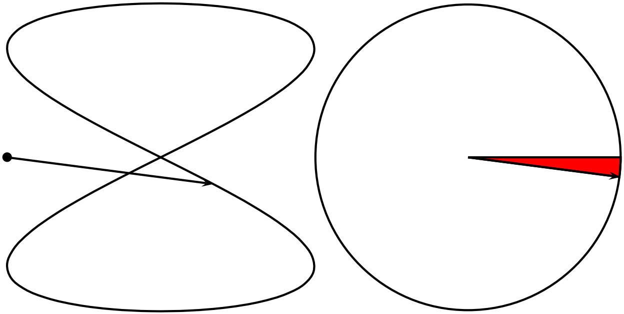


El teorema de Brouwer para n=2

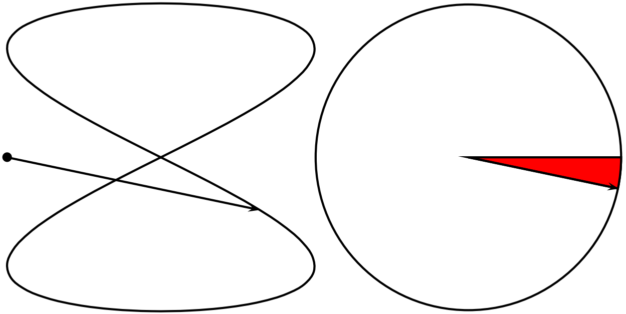




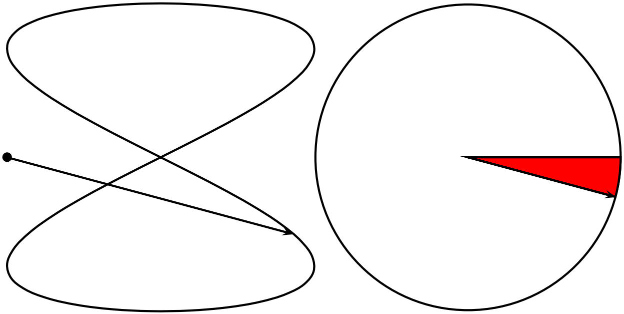
El teorema de Brouwer para n=2



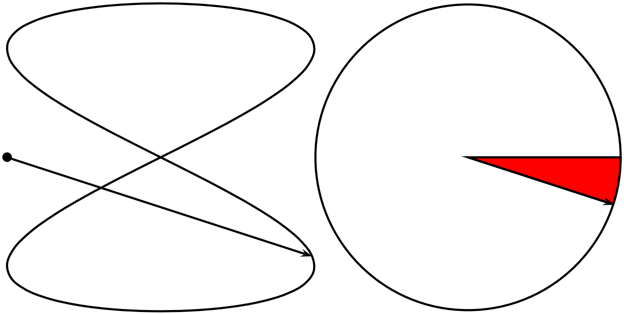
El teorema de Brouwer para n=2



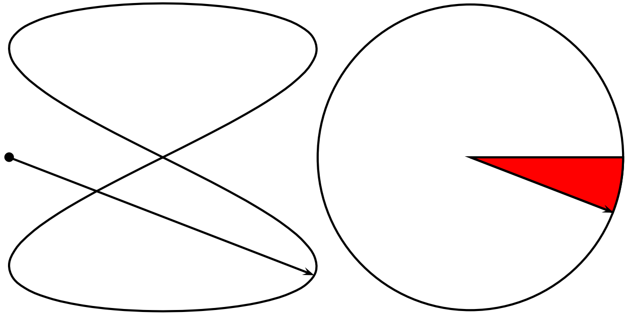
El teorema de Brouwer para n=2



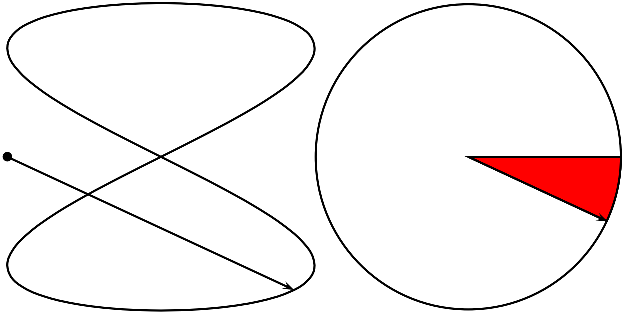
El teorema de Brouwer para n=2



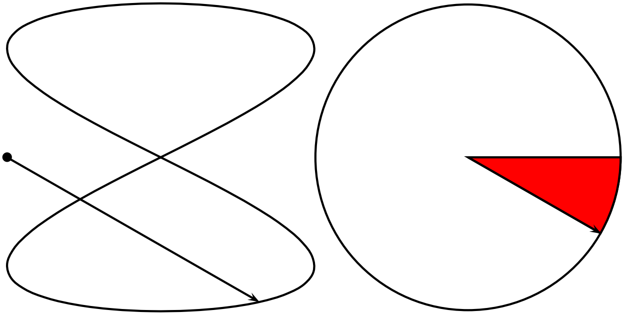
El teorema de Brouwer para n=2



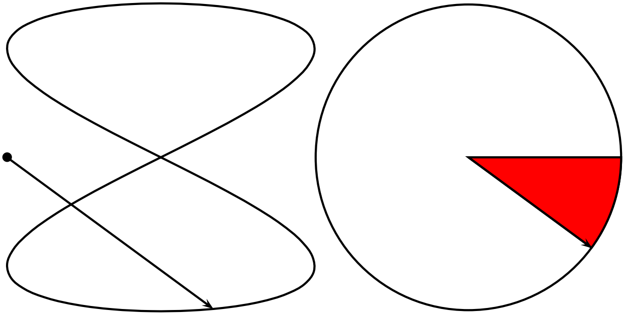
El teorema de Brouwer para n=2



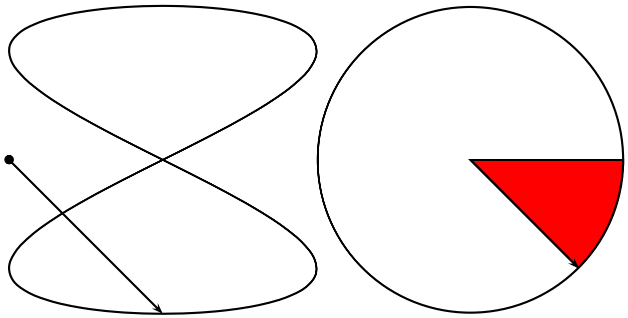
El teorema de Brouwer para n=2



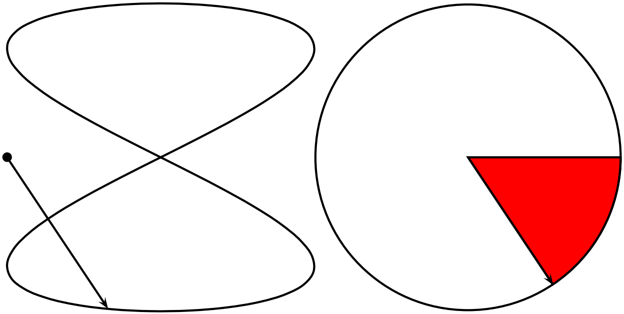
El teorema de Brouwer para n=2



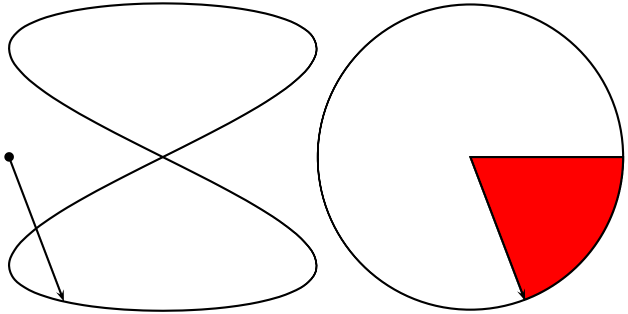
El teorema de Brouwer para n=2



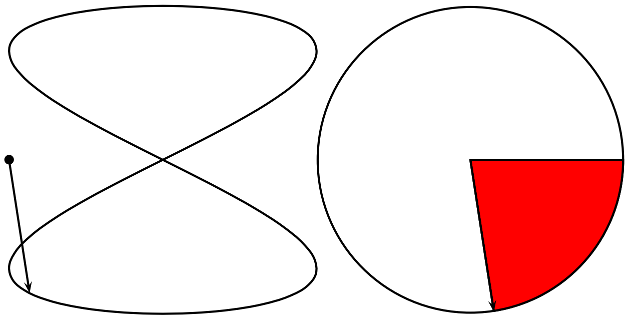
El teorema de Brouwer para n=2



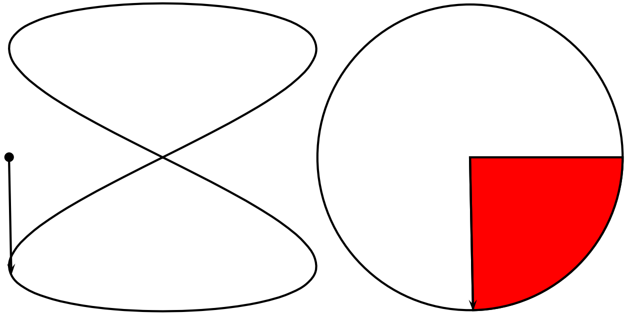
El teorema de Brouwer para n=2



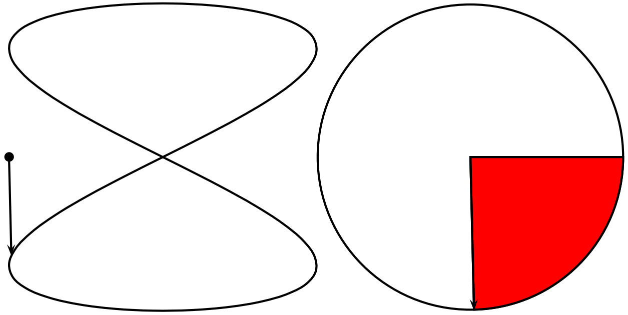
El teorema de Brouwer para n=2



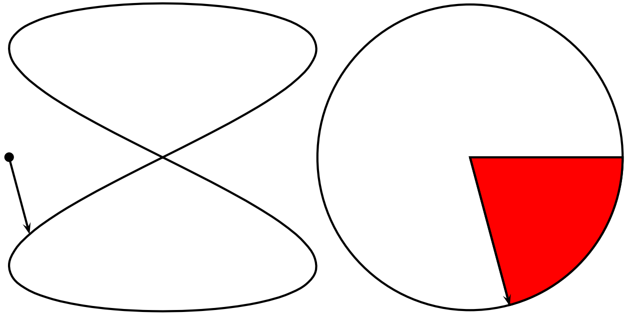
El teorema de Brouwer para n=2



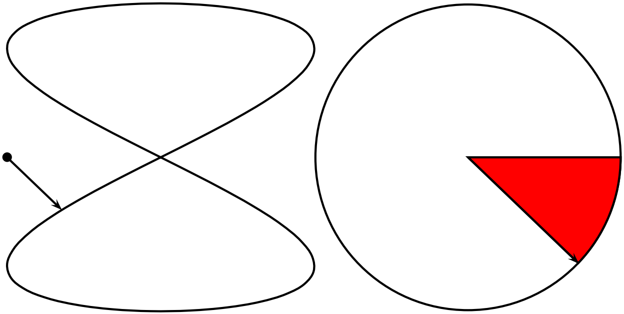
El teorema de Brouwer para n=2



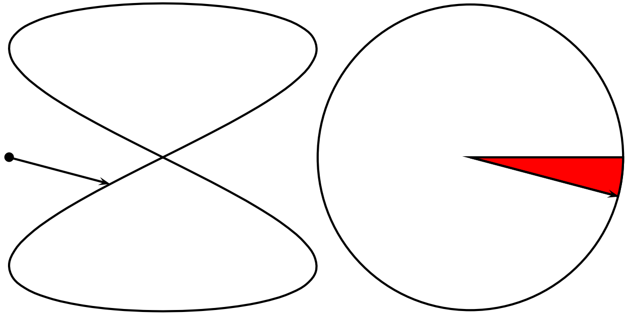
El teorema de Brouwer para n=2



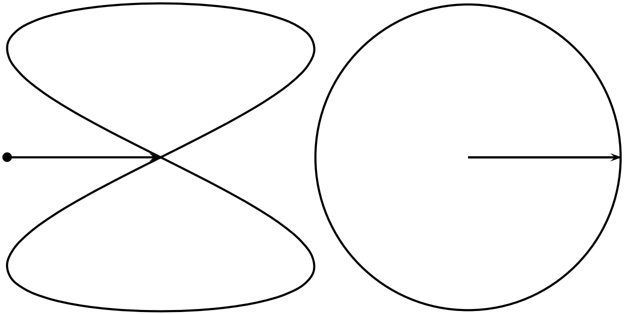
El teorema de Brouwer para n=2



El teorema de Brouwer para n=2

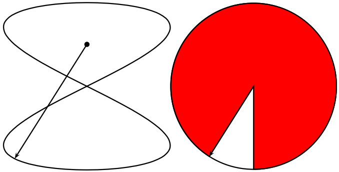


El teorema de Brouwer para n=2



Índice de un camino

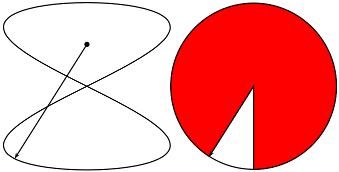
1. Un camino cerrado en $\mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

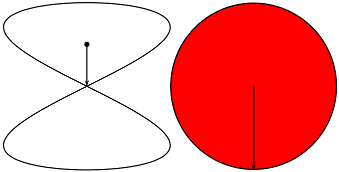


Índice de un camino

1. Un camino cerrado en $\mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.
2. Todo camino cerrado $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene un argumento continuo $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *i.e.*

$$\frac{\gamma(x)}{|\gamma(x)|} = e^{i\alpha(x)}.$$





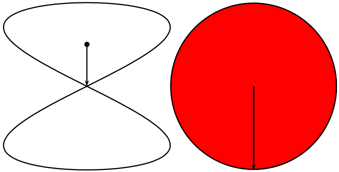
Índice de un camino

1. Un camino cerrado en $\mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.
2. Todo camino cerrado $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene un argumento continuo $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *i.e.*
$$\frac{\gamma(x)}{|\gamma(x)|} = e^{i\alpha(x)}.$$
3. Número de vueltas

$$I(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi}\big(\alpha(2\pi) - \alpha(0)\big) \in \mathbb{Z}$$

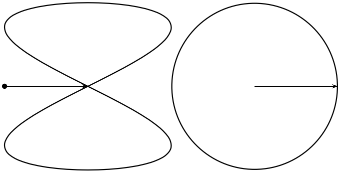
Índice de un camino

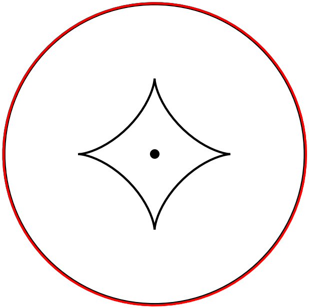
1. Un camino cerrado en $\mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.
2. Todo camino cerrado $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene un argumento continuo $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *i.e.*
$$\frac{\gamma(x)}{|\gamma(x)|} = e^{i\alpha(x)}.$$
3. Número de vueltas
$$I(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi}\big(\alpha(2\pi) - \alpha(0)\big) \in \mathbb{Z}$$
4. Si γ no pasa por z_0 se define $I(\gamma, z_0) := I(\gamma - z_0, 0)$.



$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

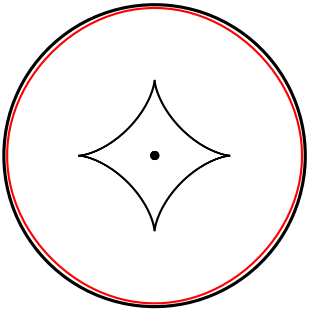
1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.





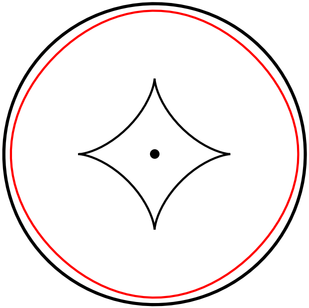
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrados y continuos

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



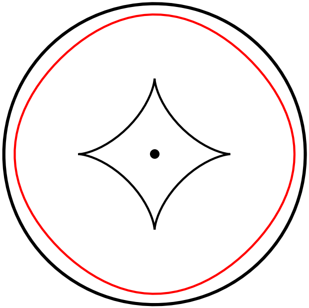
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



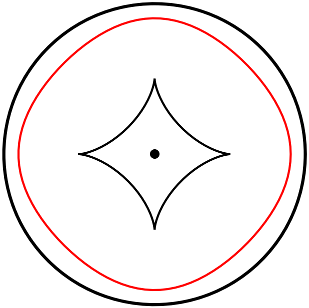
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



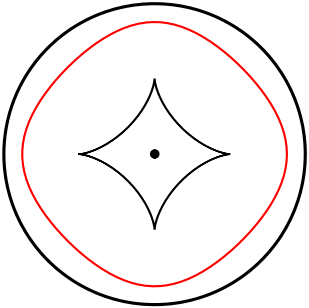
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



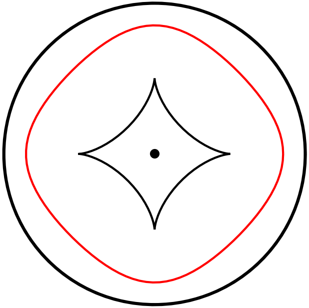
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



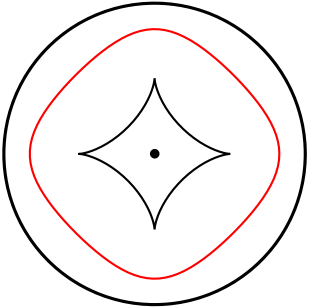
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrados y continuos

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



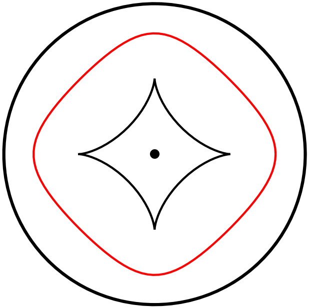
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



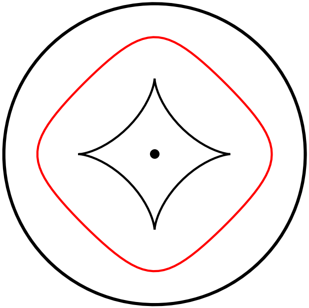
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



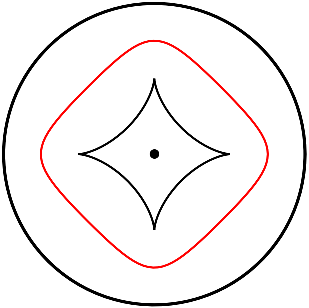
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrados y continuos

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



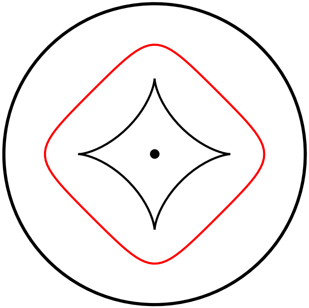
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



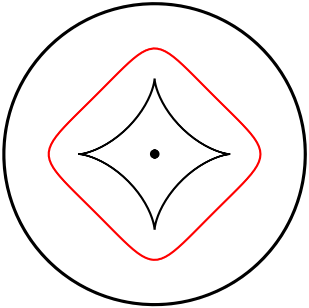
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



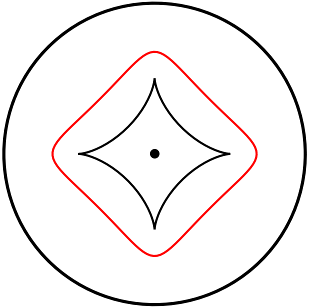
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



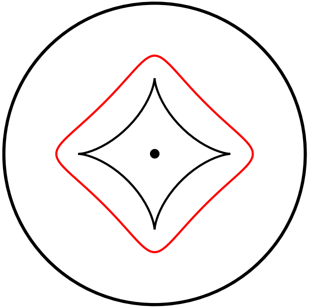
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



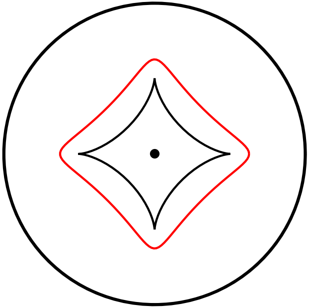
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



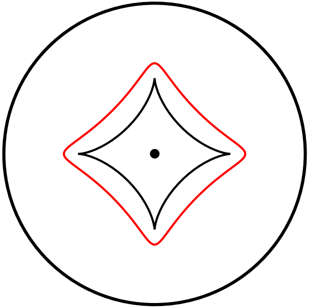
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



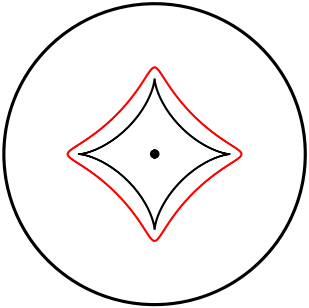
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



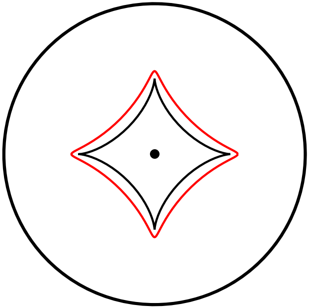
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



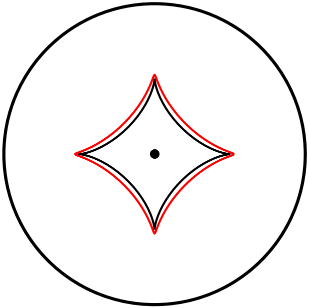
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrados y continuos

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



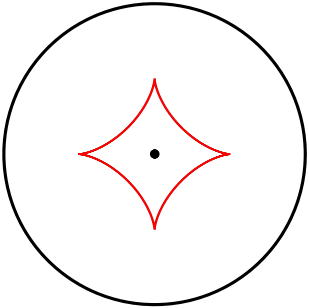
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



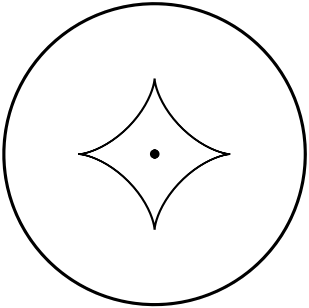
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.



$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.

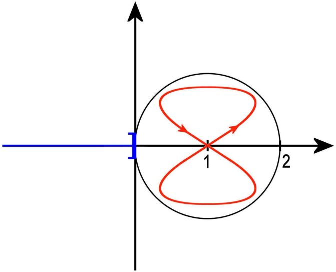
$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrados y continuos

El producto de dos complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.
3. $I(\gamma_0\gamma_1, 0) = I(\gamma_0, 0) + I(\gamma_1, 0)$.

$\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **cerrados y continuos**



1. La función $z \to I(\gamma, z)$, definida en el abierto $V := \mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$, permanece constante en cada componente conexa de V, y vale 0 en la componente conexa no acotada.
2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicos por caminos cerrados mediante una homotopía que no pasa por 0, entonces $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0)$.
3. $I(\gamma_0\gamma_1, 0) = I(\gamma_0, 0) + I(\gamma_1, 0)$.
4. Si $\big|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)\big| \leq \big|\gamma_1(t)\big|$, para todo $t \in [0, 2\pi]$,

$$I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_0, 0).$$

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

- Si $a \notin f(D)$, $\Gamma(r, t) := f(re^{it})$, $r, t \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, es una homotopía que no pasa por a entre γ y el camino constante $f(0) \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$;

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

- Si $a \notin f(D)$, $\Gamma(r, t) := f(re^{it})$, $r, t \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, es una homotopía que no pasa por a entre γ y el camino constante $f(0) \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$;
- Un punto fijo de f en $\overline{D}$ es un cero de $g(z) = f(z) - z$;

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma([0, 2\pi])$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

- Si $a \notin f(D)$, $\Gamma(r, t) := f(re^{it})$, $r, t \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, es una homotopía que no pasa por a entre γ y el camino constante $f(0) \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$;
- Un punto fijo de f en $\overline{D}$ es un cero de $g(z) = f(z) - z$;
- Si g se anula en $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ ya hemos terminado;

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

- Si $a \notin f(D)$, $\Gamma(r, t) := f(re^{it})$, $r, t \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, es una homotopía que no pasa por a entre γ y el camino constante $f(0) \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$;
- Un punto fijo de f en $\overline{D}$ es un cero de $g(z) = f(z) - z$;
- Si g se anula en $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ ya hemos terminado;
- Si g no se anula en $\mathbb{T} \Rightarrow \gamma_0(t) = g(e^{it}) \neq 0$, para $t \in [0, 2\pi]$;

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

- Si $a \notin f(D)$, $\Gamma(r, t) := f(re^{it})$, $r, t \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, es una homotopía que no pasa por a entre γ y el camino constante $f(0) \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$;
- Un punto fijo de f en $\overline{D}$ es un cero de $g(z) = f(z) - z$;
- Si g se anula en $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ ya hemos terminado;
- Si g no se anula en $\mathbb{T} \Rightarrow \gamma_0(t) = g(e^{it}) \neq 0$, para $t \in [0, 2\pi]$;
- Llamando $\gamma_1(t) = -e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\big|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)\big| = \big|f(e^{it})\big| \leq 1 = |\gamma_1(t)|, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi];$$

Teorema de Brouwer en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{D}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{C}$, sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se verifica:

1. Si $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, y $a \notin \gamma\big([0, 2\pi]\big)$ satisface que $I(\gamma, a) \neq 0$, entonces existe $z \in D$ tal que $f(z) = a$.
2. Si $f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{D}$, entonces existe $z \in \overline{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración.-

- Si $a \notin f(D)$, $\Gamma(r, t) := f(re^{it})$, $r, t \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, es una homotopía que no pasa por a entre γ y el camino constante $f(0) \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$;
- Un punto fijo de f en $\overline{D}$ es un cero de $g(z) = f(z) - z$;
- Si g se anula en $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ ya hemos terminado;
- Si g no se anula en $\mathbb{T} \Rightarrow \gamma_0(t) = g(e^{it}) \neq 0$, para $t \in [0, 2\pi]$;
- Llamando $\gamma_1(t) = -e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\big|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)\big| = \big|f(e^{it})\big| \leq 1 = |\gamma_1(t)|, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi];$$

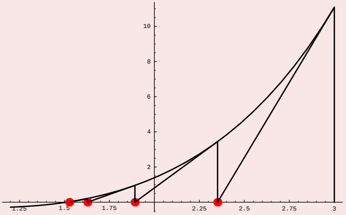
- $I(\gamma_0, 0) = I(\gamma_1, 0) = -1 \Rightarrow$ existe $z \in D$ tal que $g(z) = 0$.

Aplicaciones del teorema de Banach

Aplicaciones del teorema de Banach

1. El teorema de la función implícita;

E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1986, Fixed-point theorems.



$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge –bajo condiciones de *suavidad* de f– a un cero de f que es punto fijo de la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;

Aplicaciones del teorema de Banach

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, encontrar una solución de

$$Ax = b$$

se transforma en encontrar un punto fijo de cierta ecuación

$$x = Tx + c$$

Si para alguna norma de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\|T\| < 1$ entonces un método iterativo conduce a la solución.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;

Aplicaciones del teorema de Banach

La solución de una ecuación de Fredholm

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b k(t,s)\, f(s) ds, t \in [a,b],$$

existe (como un punto fijo) cuando $|\mu| < \frac{1}{\|k\|_2}$.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;

- Los sistemas de Sturm-Liouville se reducen a una ecuación integral de Fredholm via la función de Green.
- Con un método de separación de variables se puede ahora resolver el problema de Dirichlet en un cuadrado.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;

Problema de de Cauchy.

Determinar $x \in C^1([0,b])$:

- $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$, $t \in [0,b]$;
- $x(0) = \xi$.

donde $f : [0,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Teorema de Picard-Lindelöf

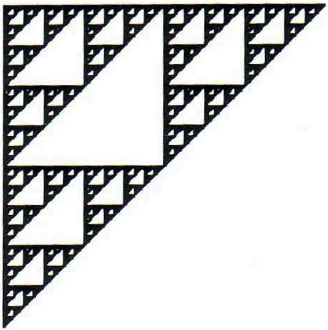
Si f es lipschitziana con respecto a x, *i.e.*, si existe un $L > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\big|f(t,x) - f(t,y)\big| \le L|x - y|, \qquad t \in [0,b],$$

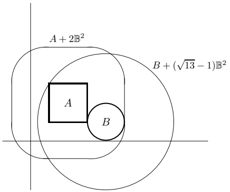
entonces la solución del problema de Cauchy existe y es única.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;

Aplicaciones del teorema de Banach



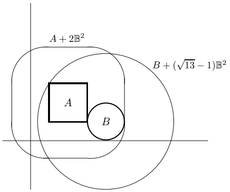
1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. ...
9. ...
10. ...



Definición

La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos acotados C y D de $\mathbb{R}^2$ se define como

$$h(C, D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_{\mathbb{R}^2}, \; D \subset C + \eta B_{\mathbb{R}^2}\}.$$



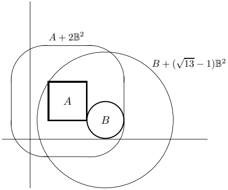
Definición

La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos acotados C y D de $\mathbb{R}^2$ se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_{\mathbb{R}^2}, \ D \subset C + \eta B_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de $\mathbb{R}^2$.



Definición

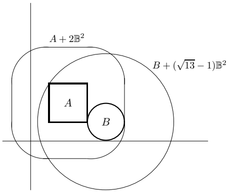
La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos acotados C y D de $\mathbb{R}^2$ se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_{\mathbb{R}^2}, \ D \subset C + \eta B_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de $\mathbb{R}^2$.
2. $(\mathcal{C}, h)$ es completo, gracias a que $\mathbb{R}^2$ es completo.

El espacio donde viven los fractales



Definición

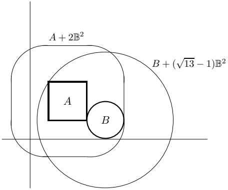
La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos acotados C y D de $\mathbb{R}^2$ se define como

$$h(C,D)=\inf\{\eta>0:\ C\subset D+\eta B_{\mathbb{R}^2},\ D\subset C+\eta B_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de $\mathbb{R}^2$.
2. $(\mathcal{C},h)$ es completo, gracias a que $\mathbb{R}^2$ es completo.
3. $k(\mathbb{R}^2)=\{C\subset\mathbb{R}^2:\ C \text{ compacto en}\}$ es cerrado en $(\mathcal{C},h)$ (por tanto completo con la métrica inducida).

El espacio donde viven los fractales



Definición

La distancia de Hausdorff entre dos conjuntos acotados C y D de $\mathbb{R}^2$ se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_{\mathbb{R}^2}, \ D \subset C + \eta B_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de $\mathbb{R}^2$.
2. $(\mathcal{C}, h)$ es completo, gracias a que $\mathbb{R}^2$ es completo.
3. $k(\mathbb{R}^2) = \{C \subset \mathbb{R}^2 : \ C$ compacto en$\}$ es cerrado en $(\mathcal{C}, h)$ (por tanto completo con la métrica inducida).
4. Si $C_n \xrightarrow{h} C$ en $\mathcal{C} \Rightarrow C := \{x \in \mathbb{R}^2 :$ existe $x_n \in C_n$ con $x = \lim_n x_n\}$.

Aplicaciones contractivas en $k(\mathbb{R}^2)$

1. Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua entonces, lleva compactos a compactos;

Aplicaciones contractivas en $k(\mathbb{R}^2)$

1. Si $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es continua entonces, lleva compactos a compactos;
2. Si $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es continua, entonces puede mirarse como aplicación $w : k(\mathbb{R}^2) \longrightarrow k(\mathbb{R}^2)$;

Aplicaciones contractivas en $k(\mathbb{R}^2)$

1. Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua entonces, lleva compactos a compactos;
2. Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua, entonces puede mirarse como aplicación $w : k(\mathbb{R}^2) \to k(\mathbb{R}^2)$;
3. Si $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una familia finita de aplicaciones contractivas, entonces $w : k(\mathbb{R}^2) \to k(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$w(K) = \bigcup_i w_i(K)$$

es contractiva para la distancia de Hausdorff h;

1. Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua entonces, lleva compactos a compactos;
2. Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua, entonces puede mirarse como aplicación $w : k(\mathbb{R}^2) \to k(\mathbb{R}^2)$;
3. Si $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una familia finita de aplicaciones contractivas, entonces $w : k(\mathbb{R}^2) \to k(\mathbb{R}^2)$ dada por
$$w(K) = \bigcup_i w_i(K)$$
es contractiva para la distancia de Hausdorff h;
4. Si $w : k(\mathbb{R}^2) \to k(\mathbb{R}^2)$ es contractiva y empezamos con un conjunto compacto A entonces
$$w^n(A) \to F \in \text{ en } (k(\mathbb{R}^2), h).$$
F es un *fractal*: algunos los llaman *deterministico*.

Ejemplos

Tomamos aplicaciones afines:

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

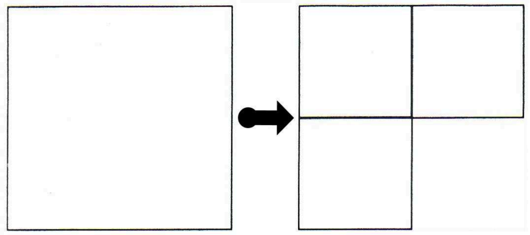
Fabricamos

$$w(A) = w_1(A) \cup w_2(A \cup w_3(A)$$

y construimos $w(A), w^2(A), w^3(A), \dots$ para cierto A compacto no vacío.

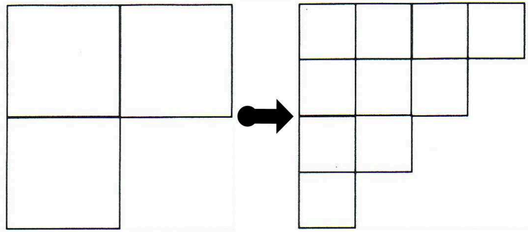
Iteradas a partir de un cuadrado

Primera iteración



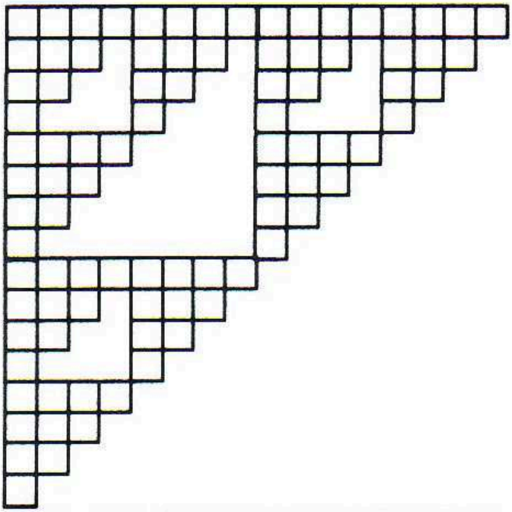
Iteradas a partir de un cuadrado

Segunda iteración



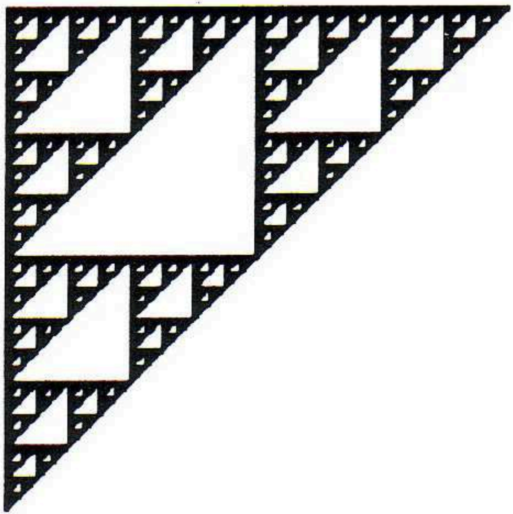
Iteradas a partir de un cuadrado

Tercera iteración



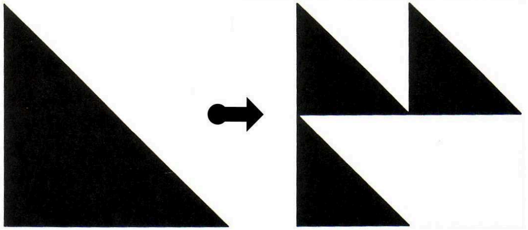
Iteradas a partir de un cuadrado

Sexta iteración



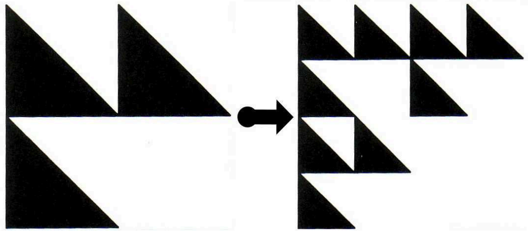
Iteradas a partir de un triángulo

Primera iteración



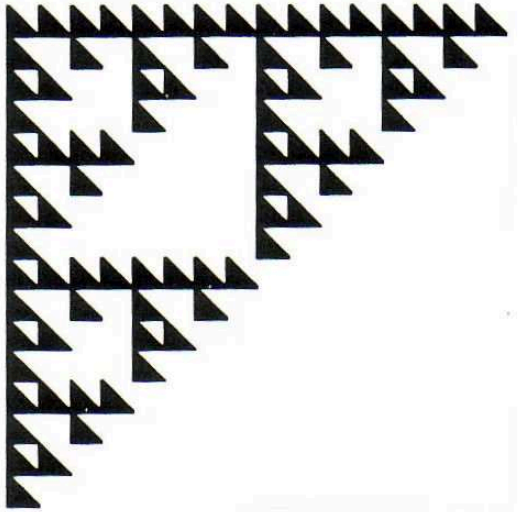
Iteradas a partir de un triángulo

Segunda iteración



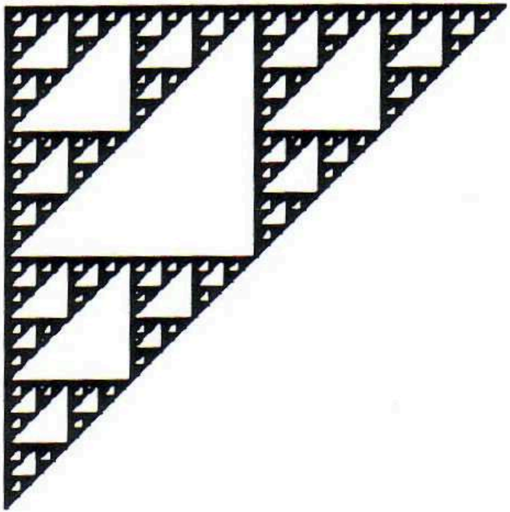
Iteradas a partir de un triángulo

Tercera iteración

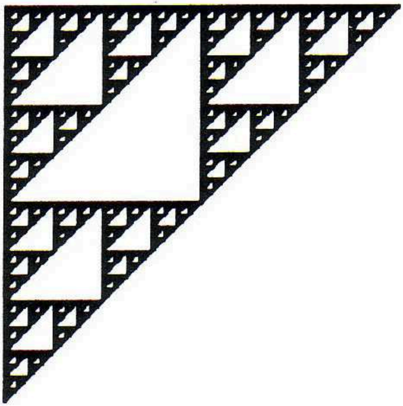


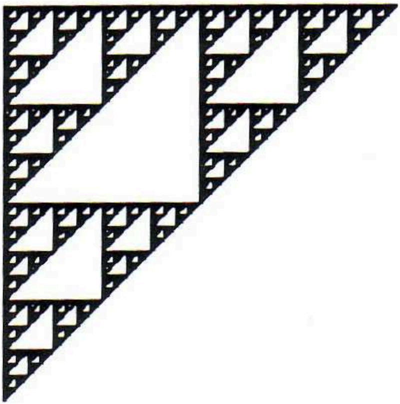
Iteradas a partir de un triángulo

Sexta iteración



Sexta iteración





Es lo mismo?

La conjetura de Feigenbaum de 1978

Sea $f : [-1,1] \to [-1,1]$ una función de clase C^2 que verifique

1. tiene un único máximo en 0
2. $f(0) = 1$
3. $f''(0) = 1$ y $f''(0) < 0$
4. $f'(x) > 0$ para $x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $x > 0$

Sea $f_\lambda(x) = \lambda f(x)$ con $0 < \lambda < 1$. Entonces para λ pequeño, f_λ tiene un solo punto fijo ($f_\lambda(x_0) = x_0$) estable (en el sentido de que puntos cercanos convergen a él por iteraciones de f_λ). Incrementando λ se puede probar fácilmente que cuando se alcanza un cierto valor λ_1 el punto fijo estable se convierte en inestable y da lugar a un par de puntos estables de período dos. Incrementando λ se alcanza un valor λ_2 este ciclo de período dos se convirte en uno estable de período cuatro, en λ_3 se alcanza un ciclo de período ocho y así sucesivamente.

Trabajando con la función $f(x) = 1-2x^2$ y usando para haer las operaciones una calculadora de bolsillo, M.J.Feigenbaum, de una manera completamente heurística, descubrió la siguiente importante propiedad de la sucesión $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$. La sucesión crece y tiene como límite un valor λ_∞ cumpliéndose que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}} = \delta$$

donde $\delta = 4{,}669...$ es una constante universal para la clase de funciones descritas al principio, es decir, no depende de la forma de la función elegida (conjetura de Feigenbaum).

En 1981, Campanino y Epstein demostraron con enorme dificultad dos cosas, que el comportamiento de la iteradas de la función f_{λ_∞} es cualitativamente semejante al de la función g que es la única solucion en $[-1,1]$ de la ecuación funcional

$$g(g(\frac{x}{\alpha})) = -\frac{g(x)}{\alpha}, \quad g(0) = 1$$

conocida como la *ecuación de renormalización* y que la única solución de esta ecuación es una función g par, analítica real para el valor del parámetro $\alpha = 2{,}50290...$(la solución es localmente única y no se conoce ninguna otra solución para otro valor distinto de α). La función g viene dada (con cuatro cifras decimales en los coeficientes) por

$$g(x) = 1-1{,}5276x^2+0{,}1048x^4+0{,}0267x^6-0{,}0035x^8+0{,}0008x^{10}+0{,}0003x^{12}+....$$

y su gráfica es semejante a la de una parábola invertida.

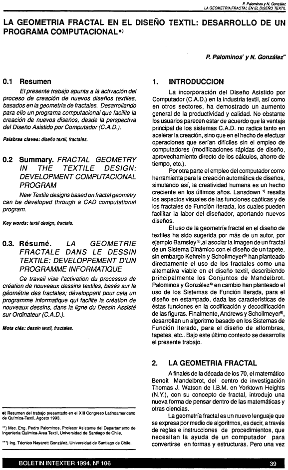
1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. Conjetura de Feigenbaum;

Aplicaciones del teorema de Banach

?

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. Conjetura de Feigenbaum;
9. ...

Aplicaciones del teorema de Banach



P. Palominos y N. González
LA GEOMETRIA FRACTAL EN EL DISEÑO TEXTIL

LA GEOMETRIA FRACTAL EN EL DISEÑO TEXTIL: DESARROLLO DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL•)

P. Palominos* y N. González**

0.1 Resumen

El presente trabajo apunta a la activación del proceso de creación de nuevos diseños textiles, basados en la geometría de fractales. Desarrollando para ello un programa computacional que facilite la creación de nuevos diseños, desde la perspectiva del Diseño Asistido por Computador (C.A.D.).

Palabras claves: *diseño textil, fractales.*

0.2 Summary. *FRACTAL GEOMETRY IN THE TEXTILE DESIGN: DEVELOPMENT COMPUTACIONAL PROGRAM*

New Textile designs based on fractal geometry can be developed through a CAD computational program.

Key words: *textil design, fractals.*

0.3. Résumé. *LA GEOMETRIE FRACTALE DANS LE DESSIN TEXTILE: DEVELOPPEMENT D'UN PROGRAMME INFORMATIQUE*

Ce travail vise l'activation du processus de création de nouveaux dessins textiles, basés sur la géométrie des fractales; développant pour cela un programme informatique qui facilite la création de nouveaux dessins, dans la ligne du Dessin Assisté sur Ordinateur (C.A.D.).

Mots clés: *dessin textil, fractales.*

1. INTRODUCCION

La incorporación del Diseño Asistido por Computador (C.A.D.) en la industria textil, así como en otros sectores, ha demostrado un aumento general de la productividad y calidad. No obstante los usuarios parecen estar de acuerdo que la ventaja principal de los sistemas C.A.D. no radica tanto en acelerar la creación, sino que en el hecho de efectuar operaciones que serían difíciles sin el empleo de computadores (modificaciones rápidas de diseño, aprovechamiento directo de los cálculos, ahorro de tiempo, etc.).

Por otra parte el empleo del computador como herramienta para la creación automática de diseños, simulando así, la creatividad humana es un hecho creciente en los últimos años. Lansdown [1] resalta los aspectos visuales de las funciones caóticas y de los fractales de Función Iterada, los cuales pueden facilitar la labor del diseñador, aportando nuevos diseños.

El uso de la geometría fractal en el diseño de textiles ha sido sugerida por más de un autor, por ejemplo Barnsley [2],al asociar la imagen de un fractal de un Sistema Dinámico con el diseño de un tapete, sin embargo Kehrein y Schollmeyer[3] han planteado directamente el uso de los fractales como una alternativa viable en el diseño textil, describiendo principalmente los Conjuntos de Mandelbrot. Palominos y González[4] en cambio han planteado el uso de los Sistemas de Función Iterada, para el diseño en estampado, dada las características de éstas funciones en la codificación y decodificación de las figuras. Finalmente, Andrews y Schollmeyer[5], desarrollan un algoritmo basado en los Sistemas de Función Iterado, para el diseño de alfombras, tapetes, etc.. Bajo este último contexto se desarrolla el presente trabajo.

2. LA GEOMETRIA FRACTAL

A finales de la década de los 70, el matemático Benoit Mandelbrot, del centro de investigación Thomas J. Watson de I.B.M. en Yorktown Heights (N.Y.), con su concepto de fractal, introdujo una nueva forma de pensar dentro de las matemáticas y otras ciencias.

La geometría fractal es un nuevo lenguaje que se expresa por medio de algoritmos, es decir, a través de reglas e instrucciones de procedimientos, que necesitan la ayuda de un computador para convertirse en formas y estructuras. Pero una vez

•) Resumen del trabajo presentado en el XIII Congreso Latinoamericano de Química-Textil, Agosto 1993.

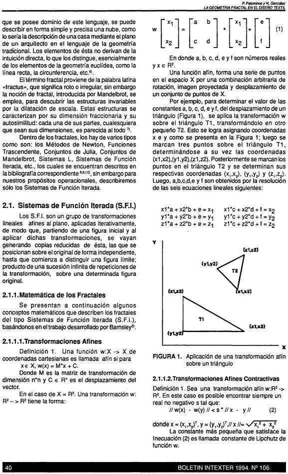
**) Msc. Eng. Pedro Palominos, Profesor Asistente del Departamento de Ingeniería Química-Area Textil, Universidad de Santiago de Chile.

***) Ing. Técnico Nayarett González, Universidad de Santiago de Chile.

BOLETIN INTEXTER 1994. Nº 106 39

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. Conjetura de Feigenbaum;
9. ...
10. Diseño de alfombras y ropa.

Aplicaciones del teorema de Banach



que se posee dominio de este lenguaje, se puede describir en forma simple y precisa una nube, como lo sería la descripción de una casa mediante el plano de un arquitecto en el lenguaje de la geometría tradicional. Los elementos de ésta no derivan de la intuición directa, lo que los distingue, esencialmente de los elementos de la geometría euclídea, como la línea recta, la circunferencia, etc.[6)].

El término fractal proviene de la palabra latina «fractus», que significa roto o irregular, sin embargo la noción de fractal, introducida por Mandelbrot, se emplea, para descubrir las estructuras invariables por la dilatación de escala. Estas estructuras se caracterizan por su dimensión fraccionaria y su autosimilitud: cada una de sus partes, cualesquiera que sean sus dimensiones, es parecida al todo [7)].

Dentro de los fractales, los hay de varios tipos como son: los Métodos de Newton, Funciones Trascendente, Conjuntos de Julia, Conjuntos de Mandelbrot, Sistemas L, Sistemas de Función Iterada, etc., los cuales se encuentran descritos en la bibliografía correspondiente [8,9,10)], sin embargo para nuestros propósitos operacionales, describiremos sólo los Sistemas de Función Iterada.

2.1. Sistemas de Función Iterada (S.F.I.)

Los S.F.I. son un grupo de transformaciones lineales afines al plano, aplicadas iterativamente, de modo que, partiendo de una figura inicial y al aplicar dichas transformaciones, se vayan generando copias reducidas de ésta, las que se posicionan sobre el original de forma independiente, hasta que comienza a distinguir una figura límite; producto de una sucesión infinita de repeticiones de la transformación, sobre una determinada figura original.

2.1.1. Matemática de los Fractales

Se presentan a continuación algunos conceptos matemáticos que describen los fractales del tipo Sistemas de Función Iterada (S.F.I.), basándonos en el trabajo desarrollado por Barnsley[2)].

2.1.1.1. Transformaciones Afines

Definición 1. Una función w:X -> X de coordenadas cartesianas es llamada afín si para $x \in X$, $w(x) = M^*x + C$.

Donde M es la matriz de transformación de dimensión n*n y $C \in R^n$ es el desplazamiento del vector.

En el caso de $X = R^2$. Una transformación w: $R^2 \to R^2$ tiene la forma:

$$w\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (1)$$

En donde a, b, c, d, e y f son números reales y $x \in R^2$.

Una función afín, forma una serie de puntos en el espacio X por una combinación arbitraria de rotación, imagen proyectada y desplazamiento de un conjunto de puntos de X.

Por ejemplo, para determinar el valor de las constantes a, b, c, d, e y f, del desplazamiento de un triángulo (Figura 1), se aplica la transformación w sobre el triángulo T1, transformándolo en otro pequeño T2. Esto se logra asignando coordenadas x e y como se presenta en la Figura 1; luego se marcan tres puntos sobre el triángulo T1, determinándose a su vez las coordenadas (x1,x2),(y1,y2),(z1,z2). Posteriormente se marcan los puntos en el triángulo T2 y se determinan sus respectivas coordenadas (x_1,x_2), (y_1,y_2) y (z_1,z_2). Luego, a,b,c,d,e y f son obtenidos por la resolución de las seis ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{array}{ll} x1^*a + x2^*b + e = x_1 & x1^*c + x2^*d + f = x_2 \\ y1^*a + y2^*b + e = y_1 & y1^*c + y2^*d + f = y_2 \\ z1^*a + z2^*b + e = z_1 & z1^*c + z2^*d + f = z_2 \end{array}$$

FIGURA 1. Aplicación de una transformación afín sobre un triángulo

2.1.1.2. Transformaciones Afines Contractivas

Definición 1. Sea una transformación afín w:R^2 -> R^2. En este caso es posible encontrar siempre un real no negativo s tal que:

$$// w(x) - w(y) // < s * // x - y // \quad (2)$$

donde $x = (x_1,x_2)^T$, $y = (y_1,y_2)^T$, $// x // = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

La constante más pequeña que satisface la Inecuación (2) es llamada constante de Lipchutz de función w.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. Conjetura de Feigenbaum;
9. . . .
10. Diseño de alfombras y ropa.

Aplicaciones del teorema de Banach

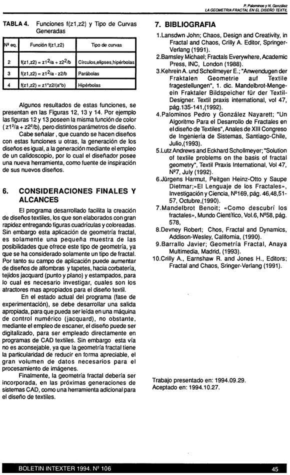


TABLA 4. Funciones f(z1,z2) y Tipo de Curvas Generadas

Nº eq.	Función f(z1,z2)	Tipo de curvas
2	$f(z1,z2) = z1^2/a + z2^2/b$	Círculos,elipses,hipérbolas
3	$f(z1,z2) = z1^2/a - z2/b$	Parábolas
4	$f(z1,z2) = z1*z2/(a*b)$	Hipérbolas

Algunos resultados de estas funciones, se presentan en las Figuras 12, 13 y 14. Por ejemplo las figuras 12 y 13 poseen la misma función de color ($z1^2/a + z2^2/b$), pero distintos parámetros de diseño.

Cabe señalar , que cuando se hacen diseños con estas funciones u otras, la generación de los diseños es igual, a la generación mediante el empleo de un calidoscopio, por lo cual el diseñador posee una nueva herramienta, como fuente de inspiración de sus nuevos diseños.

6. CONSIDERACIONES FINALES Y ALCANCES

El programa desarrollado facilita la creación de diseños textiles, los que son elaborados con gran rapidez entregando figuras cuadrículas y coloreadas. Sin embargo esta aplicación de geometría fractal, es solamente una pequeña muestra de las posibilidades que ofrece este tipo de geometría, ya que se ha considerado solamente un tipo de fractal. Por tanto su campo de aplicación puede aumentar de diseños de alfombras y tapetes, hacia corbatería, tejidos jacquard (punto y plano) y estampados, para lo cual es necesario investigar, cuales son los atractores mas apropiados para el diseño textil.

En el estado actual del programa (fase de experimentación), se debe desarrollar una salida apropiada, para que pueda ser leída en una máquina de control numérico (jacquard), no obstante, mediante el empleo de escaner, el diseño puede ser digitalizado, para ser empleado directamente en programas de CAD textiles. Sin embargo esta vía no es aconsejable, ya que la geometría fractal tiene la particularidad de reducir en forma apreciable, el gran volumen de datos necesarios para el procesamiento de imágenes.

Finalmente, la geometría fractal debería ser incorporada, en las próximas generaciones de sistemas CAD, como una herramienta adicional para el diseño de textiles.

7. BIBLIOGRAFIA

1.Lansdwn John; Chaos, Design and Creativity, in Fractal and Chaos, Crilly A. Editor, Springer-Verlang (1991).
2.Barnsley Michael; Fractals Everywhere, Academic Press, INC, London (1988).
3.Kehrein A. und Schollmeyer E.; "Anwendugen der Fraktalen Geometrie auf Textile fragestellungen", 1. dic. Mandelbrot-Menge-ein Fraktaler Bildspeicher für der Textil-Designer. Textil praxis international, vol 47, pág.135-141,(1992).
4.Palominos Pedro y González Nayarett; "Un Algoritmo Para el Desarrollo de Fractales en el diseño de Textiles", Anales de XIII Congreso de Ingènieria de Sistemas, Santiago-Chile, Julio,(1993).
5.Lutz Andrews and Eckhard Schollmeyer; "Solution of textile problems on the basis of fractal geometry", Textil Praxis International, Vol 47, Nº7, July (1992).
6.Jürgens Harmut, Peitgen Heinz-Otto y Saupe Dietmar;»El Lenguaje de los Fractales», Investigación y Ciencia, Nº169, pág. 46,48,51-57, Octubre,(1990).
7.Mandelbrot Benoit; «Como descubrí los fractales», Mundo Científico, Vol.6, Nº58, pág. 578,
8.Devney Robert; Chos, Fractal and Dynamics, Addison-Wesley, California, (1990).
9.Barrallo Javier; Geometría Fractal, Anaya Multimedia, Madrid, (1993).
10.Crilly A., Earnshaw R. and Jones H., Editors; Fractal and Chaos, Sringer-Verlang (1991).

Trabajo presentado en: 1994.09.29.
Aceptado en: 1994.10.27.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. Conjetura de Feigenbaum;
9. . . .
10. Diseño de alfombras y ropa.

1. El teorema de la función implícita;
2. El método de Newton;
3. Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales;
4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales;
5. Sistemas de Sturm-Liouville;
6. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
7. Fractales;
8. Conjetura de Feigenbaum;
9. ...
10. Diseño de alfombras y ropa.

Aplicaciones del teorema de Brouwer

Aplicaciones del teorema de Brouwer

1. Cada convexo compacto de $\mathbb{R}^n$ tiene la p.p.f.;
2. S^{n-1} no es un retracto de B^n;
3. Teorema de la *Bola Peluda*;
4. Existencia de Equilibrio Walrasiano;
5. Aplicaciones de tipo KKM; Teorema de Ky Fan sobre existencia de puntos fijos de multifunciones; existencia del equilibrio de Nash;
6. Teorema de Schauder del punto fijo;
7. Teorema de Tijonov del punto fijo;
8. Teorema de Cauchy-Peano de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales;
9. Teorema de Markov-Kakutani sobre puntos fijos comunes de familias aplicaciones afines;
10. Teorema de Ryll-Nardzeski sobre puntos fijos comunes de semigrupos de aplicaciones afines;
11. Existencia de la medida de Haar en un grupo compacto;
12. Teorema de Lomonosov sobre existencia de subespacios invariantes.

Aplicaciones del teorema de Brouwer

1. Cada convexo compacto de $\mathbb{R}^n$ tiene la p.p.f.;
2. S^{n-1} no es un retracto de B^n;
3. Teorema de la *Bola Peluda*;
4. Existencia de Equilibrio Walrasiano;
5. Aplicaciones de tipo KKM; Teorema de Ky Fan sobre existencia de puntos fijos de multifunciones; existencia del equilibrio de Nash;

The best application of (6) I can think of is the proof of an invariant subspace theorem by Lomonosov. There are several generalizations of this, but what Lomonosov proved was this: Let E be a Banach space and let T be a bounded operator of E into E such that TK=KT for some compact linear operator K of E into E. Then some closed proper subspace V of E is invariant under T, i.e. $TV \subset V$.

A bit of history about this theorem. It was reported that v. Neumann proved this theorem for a single compact operator in a Hilbert space, but he never published the proof. In 1951 or 1952, Aronszajn at Kansas proved this independently and showed the proof to K.T. Smith. That evening Smith went home and tried to reproduce Aronszajn's proof, but he found a different proof that works in Banach spaces. (I know all this because I was a student at K.U. then.) So they wrote a joint paper. At the end of the paper they posed a question: Does an operator T such that T2 is compact admit a proper invariant subspace? (I forgot if the space was Hilbet or Banach.) Much later, in 1963 I think, Robinson and Bernstein proved by non-standard analysis that if T is an operator with the property that p(T) is compact, where p is a polynomial of positive degree, then T has a proper invariant subspace. This was originally proved for Hilbert spaces but then it was generalized to Banach spaces again using non-standard analysis. Now please note that Lomonosov's theorem generalizes all the above and the proof is so simple and beautiful! I remember just about that time Lindenstrauss visited here from Berkeley. He pulled out from his pocket a crumpled sheet (one sheet!) of paper which has a Xeroxed copy of the complete hand-written proof of Lomonosov's theorem. Joram said then that "This proof is making many people in Berkeley unhappy.Ï read the proof once, and I could never forget the proof!

Best, Isaac.

Teorema de Lomonosov

Teorema de Lomonosov

J. B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

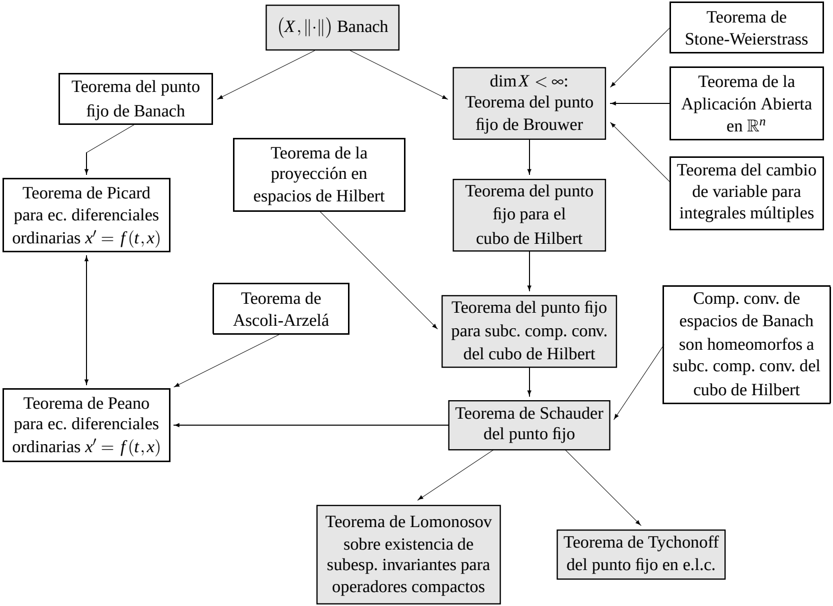
1. Demostración Teorema Lomonosov.

Teorema de Lomonosov

http://webs.um.es/beca

1. Demostración Teorema Lomonosov.
2. Prueba *reescrita* por Namioka e Historia

En resumen


$(X, \|\cdot\|)$ Banach
Teorema de Stone-Weierstrass
Teorema del punto fijo de Banach
$\dim X < \infty$: Teorema del punto fijo de Brouwer
Teorema de la Aplicación Abierta en $\mathbb{R}^n$
Teorema de la proyección en espacios de Hilbert
Teorema de Picard para ec. diferenciales ordinarias $x' = f(t,x)$
Teorema del punto fijo para el cubo de Hilbert
Teorema del cambio de variable para integrales múltiples
Teorema de Ascoli-Arzelá
Teorema del punto fijo para subc. comp. conv. del cubo de Hilbert
Comp. conv. de espacios de Banach son homeomorfos a subc. comp. conv. del cubo de Hilbert
Teorema de Peano para ec. diferenciales ordinarias $x' = f(t,x)$
Teorema de Schauder del punto fijo
Teorema de Lomonosov sobre existencia de subesp. invariantes para operadores compactos
Teorema de Tychonoff del punto fijo en e.l.c.

Un poco de historia sobre Banach

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

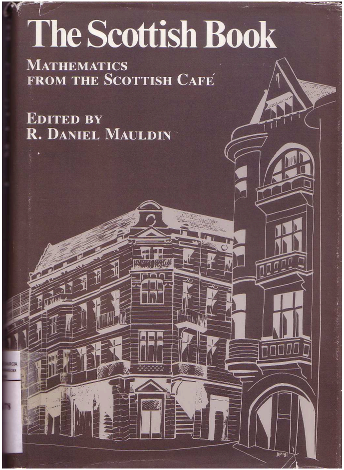
1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;



S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.

151

WAVRE

PRIZE: *A "fondue" in Geneva*

November 6, 1936

Original manuscript in French

DOES THERE EXIST A HARMONIC function defined in a region which contains a cube in its interior, which vanishes on all the edges of the cube? One does not consider $f \equiv 0$.

Addendum. Does there exist an algebraic function $f(z)$ homomorphic in every point of a curve traced on a surface of Riemann and such that one has

$$\int_{\ell} \frac{f(x)}{z-x} dz = 0, \qquad f(z) \not\equiv 0,$$

the point x being contained in a certain domain? The curve ℓ will be open. One should find $f(z)$ and ℓ.

PRIZE: *A "fondant" in Lwów*

152

STEINHAUS

PRIZES:

For computation of the frequency: 100 grammes of caviar

For proof of existence of frequency: A small beer

For counterexample: A demitasse

November 6, 1936

A DISC OF RADIUS 1 COVERS at least two points with integer coordinates (x,y) and at most 5. If we translate this disc through vectors nw ($n = 1,2,3 \ldots$), where w has both coordinates irrational and their ratio is irrational, then the numbers 2,3,4 repeat infinitely many times. What is the frequency of these events for $n \to \infty$?

Does it exist?

Commentary

By the 2-dimensional equipartition theorem (see J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen,* repr. Chelsea 1936) the frequencies exist, 2 has the frequency $4 - \sqrt{3} - (2/3)\pi$, 3 has the frequency $2\sqrt{3} - 4 + (\pi/3)$, and 4 has the frequency $1 - \sqrt{3} + (\pi/3)$. These frequencies are the areas of the three parts P_2, P_3, and P_4 of the square $[0,1] \times [0,1]$ such that if the center of a circle of radius 1 is in P_i then the circle covers i lattice points (Figure 152.1).

JAN MYCIELSKI

230 THE SCOTTISH BOOK

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.
8. Para alguno de los problemas propuestos se ofrecía un premio por su solución.

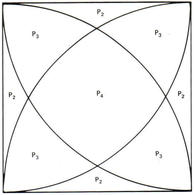


Figure 152.1

153

MAZUR

PRIZE: *A live goose*

November 6, 1936

GIVEN IS A CONTINUOUS function $f(x,y)$ defined for $0 \le x,y \le 1$ and the number $\epsilon > 0$; do there exist numbers $a_1, \dots, a_n$; $b_1, \dots, b_n$; $c_1, \dots, c_n$ with the property that

$$\left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(a_k,y) f(x,b_k) \right| \le \epsilon$$

in the interval $0 \le x,y \le 1$?

Remark: The theorem is true under the additional assumption that the function $f(x,y)$ possesses a continuous first derivative with respect to x or y.

Commentary

Grothendieck proved, in his thesis [3], that Problem 153 is equivalent to the approximation problem—a problem which was considered to be one of the central open problems of functional analysis. The statement of the approximation

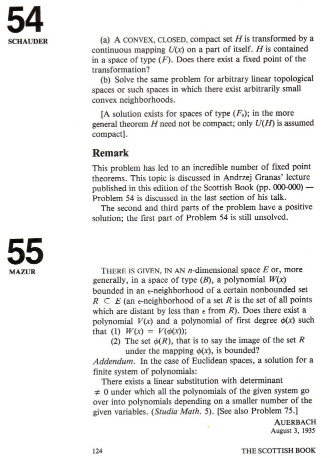
PROBLEM 153 231

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.
8. Para alguno de los problemas propuestos se ofrecía un premio por su solución.
9. Grothendieck trabajó en el problema 153: lo reformuló en términos de la propiedad de aproximación. Lo resolvió Enflo, 1972. Curiosamente Enflo también dio el primer ejemplo de un operador sin subespacio invariante en un espacio de Banach.

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.
8. Para alguno de los problemas propuestos se ofrecía un premio por su solución.
9. Grothendieck trabajó en el problema 153: lo reformuló en términos de la propiedad de aproximación. Lo resolvió Enflo, 1972. Curiosamente Enflo también dio el primer ejemplo de un operador sin subespacio invariante en un espacio de Banach.



54

SCHAUDER

(a) A CONVEX, CLOSED, compact set H is transformed by a continuous mapping $U(x)$ on a part of itself. H is contained in a space of type (F). Does there exist a fixed point of the transformation?

(b) Solve the same problem for arbitrary linear topological spaces or such spaces in which there exist arbitrarily small convex neighborhoods.

[A solution exists for spaces of type (F_0); in the more general theorem H need not be compact; only $U(H)$ is assumed compact].

Remark

This problem has led to an incredible number of fixed point theorems. This topic is discussed in Andrzej Granas' lecture published in this edition of the Scottish Book (pp. 000-000) — Problem 54 is discussed in the last section of his talk.

The second and third parts of the problem have a positive solution; the first part of Problem 54 is still unsolved.

55

MAZUR

THERE IS GIVEN, IN AN n-dimensional space E or, more generally, in a space of type (B), a polynomial $W(x)$ bounded in an ϵ-neighborhood of a certain nonbounded set $R \subset E$ (an ϵ-neighborhood of a set R is the set of all points which are distant by less than ϵ from R). Does there exist a polynomial $V(x)$ and a polynomial of first degree $\phi(x)$ such that (1) $W(x) = V(\phi(x))$;

(2) The set $\phi(R)$, that is to say the image of the set R under the mapping $\phi(x)$, is bounded?

Addendum. In the case of Euclidean spaces, a solution for a finite system of polynomials:

There exists a linear substitution with determinant $\neq 0$ under which all the polynomials of the given system go over into polynomials depending on a smaller number of the given variables. (*Studia Math.* 5). [See also Problem 75.]

AUERBACH

August 3, 1935

124 THE SCOTTISH BOOK

S. Banach, 1892 Krakow-1945 Lvov

1. Lista de referencias: 21 libros y artículos;
2. Coexistió con: Mazur, Steinhaus, Nikodym, Sierpinski, Kuratowski, Ulam, etc.
3. Con Steinhaus inicia *Studia Mathematica*;
4. Monografía *Théorie des Opérations linéaires* pronto se convirtió en un clásico e impulsó el crecimiento del AF;
5. Los tres pilares del AF llevan su nombre: *Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus y Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach*;
6. Banach le gustaba trabajar de forma no convencional: en los cafes;
7. En el *Scottish Cafe* de Lvov se empezó *Scottish book*. El *Scottish book (1935)* recoge los problemas que fueron discutidos por Banach, Mazur, Ulam, von Neumann, etc.
8. Para alguno de los problemas propuestos se ofrecía un premio por su solución.
9. Grothendieck trabajó en el problema 153: lo reformuló en términos de la propiedad de aproximación. Lo resolvió Enflo, 1972. Curiosamente Enflo también dio el primer ejemplo de un operador sin subespacio invariante en un espacio de Banach.
10. Problema 54 todavía abierto: Teorema del punto fijo en general.

¿Qué es lo bonito de todo esto?

¿Qué es lo bonito de todo esto?

It's a common theme of mathematics that when one mixes various diverse mathematical endeavors, like topology (geometry), algebra and analysis the end product is oftentimes much greater than a simple sum of the individual parts…

Respectfully yours Joe Diestel
Kent State University.

Un último dato relevante


CALLE
PUNTO FIJO


PARIS
SALON DE PARIS

Gracias.

Prehistoria no documentada

- (1982) Gilles Pisier: *Geometría de los espacios de Banach.*
- Eduardo Rodeja: *Algebristas famosos.*
- Alexander Pelcynsky: *Geometría de los espacios de Banach.*
- Georges Reeb: *El Análisis No-standard.*
- Van East
- Jesús Bastero
- (1983) Luis Vigil: *Sociologia de las Matemáticas.*
- (1983) M. Valdivia: *El teorema de la gráfica cerrada.*
- (1983) F. Bombal: *Propiedades de operadores entre espacios de Banach.*
- (1985) Frolik
- (1986) Mariano Martínez (UCM) : *La Matemática griega.*
- (1987) Luis Alsedá (UAB): *El teorema de Sharkovsky.*
- (1987) Manuel Valdivia (UV): *Paradoja de Banach-Tarski.*
- . . .

Seminario del Departamento de Matemáticas 1994-

El **Seminario del Departamento de Matemáticas** ha nacido con la idea de ser un punto de encuentro mensual para las personas amantes de las Ciencias Matemáticas. Nuestro Departamento, formado por las áreas de Álgebra, Análisis Matemático y Geometría y Topología, viene desarrollando desde su nacimiento una intensa actividad investigadora que conlleva la impartición de numerosas charlas y conferencias especializadas dentro de los **Seminarios** que mantienen los Grupos de Investigación. Nos ha parecido interesante que al lado de estas charlas especializadas el Departamento patrocine otras, de carácter más general, que puedan ser de interés para mas personas y que sirvan tanto para estimular a nuestros alumnos como para reforzar los lazos con el profesorado de otros centros de enseñanza. Fruto de esta intención hemos iniciado el **Seminario del Departamento de Matemáticas** que esperamos poder mantener durante muchos años.

Historia del *Seminario del Departamento de Matemáticas*

1. 14 Diciembre 1994, J. L. Gómez Pardo, *El último teorema de Fermat.*
2. . . .