Integración vectorial y de multifunciones

B. Cascales

Universidad de Murcia

Seminario de Optimización y Análisis Variacional
Universidad Miguel Hernández de Elche
Elche 25-26 de octubre de 2007

Objetivos:

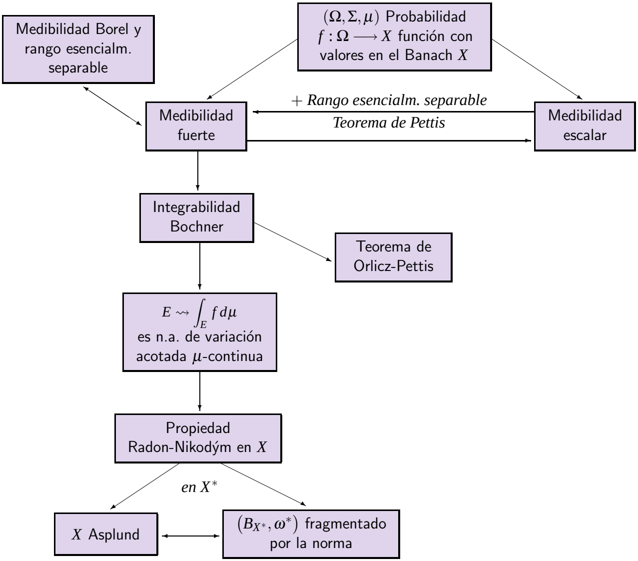
Integración vectorial y de multifunciones

- Introducirnos y familiarizarnos con técnicas de integración vectorial y de multifunciones.
- Dar aplicaciones de las técnicas introducidas.
- Establecer conexiones con cuestiones actuales de investigación.

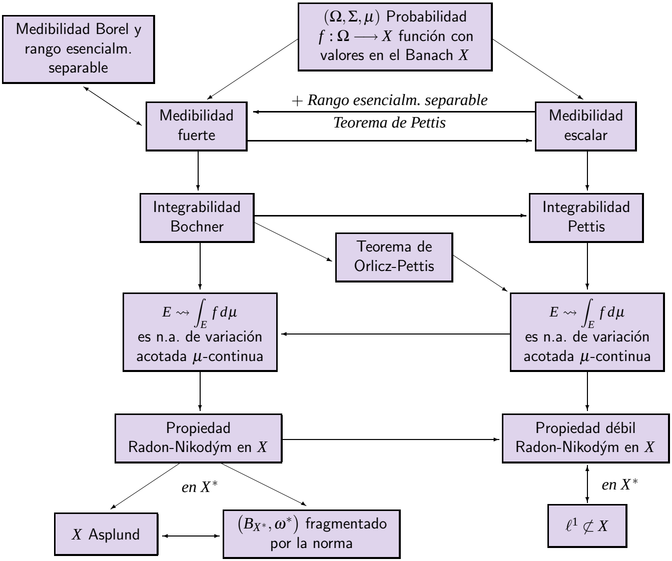
La notación

- X, Y, ... espacios de Banach; E un e.l.c.
- Dado un espacio de Banach X:
    - B_X es la bola unidad cerrada X;
    - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
    - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X,F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;
    - $\sigma(X,X^*) = w$ es la topología débil de X y $\sigma(X^*,X) = w^*$ es la topología débil* del X^*;
    - $\mathrm{Ext} B_{X^*}$ es el conjunto de puntos extremales de B_{X^*};
- K es siempre un espacio compacto y $C(K)$ espacio de funciones continuas dotado de la norma $\| \ \|_\infty$;
- (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad completo;
- $L^1(\mu)$ espacio de las funciones reales μ-integrables.

Integral de Bochner e Integral de Pettis



Integral de Bochner e Integral de Pettis



Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema de Separación (HB)

K, F subconjuntos convexos disjuntos de un espacio localmente convexo E, con K compacto y F cerrado. Entonces existe un hiperplano real cerrado que separa estrictamente K y F. Más aún, existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$f(y) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \ f(z)$$

para todo $y \in K$ y todo $z \in F$.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema de Grothendieck-Eberlein-Smulyan

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Para $A \subset X$ son equivalentes:

(i) A es w-relativamente compacto en X;

(ii) A es w-relativamente sucesionalmente compacto en X;

(iii) A es w-relativamente numerablemente compacto en X;

Bajo una (luego cualquiera) de las hipótesis anteriores sobre A si $x \in \overline{A}^{w} \subset X$ entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en A tal que $x = w - \lim_n x_n$.

Medibilidad: $f : \Omega \to X$

Función simple $s : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ donde } \alpha_i \in X, A_i \in \Sigma.$$

Medibilidad: $f : \Omega \to X$

Función simple $s : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ donde } \alpha_i \in X, A_i \in \Sigma.$$

Función μ-medible Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ*-medible* si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples de Ω en X tal que

$$\lim_n \| s_n - f \| = 0, \quad \mu \text{ p.c.t. } w \in \Omega.$$

Medibilidad: $f : \Omega \to X$

Función simple $s : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ donde } \alpha_i \in X, A_i \in \Sigma.$$

Función μ-medible Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ-*medible* si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples de Ω en X tal que

$$\lim_n \| s_n - f \| = 0, \quad \mu \text{ p.c.t. } w \in \Omega.$$

Función débilmente medible Se dice que $f : \Omega \longrightarrow X$ es *débilmente medible* si, para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

- El conjunto de las funciones μ-medibles es un espacio vectorial.

Propiedades de las funciones medibles

- El conjunto de las funciones μ-medibles es un espacio vectorial.
- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$ es simple existe una partición $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ de Ω en Σ de forma que $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$. En particular:

$$\| s \| = \sum_{i=1}^{m} \| \alpha_i \| \chi_{A_i},$$

y por tanto, $\| s \|$ una función escalar simple.

Propiedades de las funciones medibles

- El conjunto de las funciones μ-medibles es un espacio vectorial.
- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$ es simple existe una partición $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ de Ω en Σ de forma que $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$. En particular:

$$\| s \| = \sum_{i=1}^{m} \| \alpha_i \| \chi_{A_i},$$

  y por tanto, $\| s \|$ una función escalar simple.
- Si g es una función vectorial μ-medible, entonces $\| g \|$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de Egoroff

Sea $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones μ-medibles, y sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que $(f_n)_n$ converge hacia f μ-p.c.t.p. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $E \subset \Omega$ con $\mu(E) < \varepsilon$ y tal que $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente en $\Omega \setminus E$.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de Egoroff

Sea $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones μ-medibles, y sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que $(f_n)_n$ converge hacia f μ-p.c.t.p. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $E \subset \Omega$ con $\mu(E) < \varepsilon$ y tal que $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente en $\Omega \setminus E$.

Corolario

El conjunto de las funciones μ-medibles con valores en un espacio de Banach es cerrado por límites de sucesiones convergentes en casi todo punto.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Medible$\neq$débilmente medible

Consideremos el espacio de Hilbert $\ell^2([0,1])$, y sea

$$f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$$

$$t \to e_t$$

donde $\{e_t : t \in [0,1]\}$ es la base ortonormal canónica del espacio de Hilbert $\ell^2([0,1])$. f es débilmente medible y no medible.

Consecuencias del teorema de Pettis

$\boxed{\text{Medibilidad Borel}}$ $f : \Omega \longrightarrow X$ es *medible Borel* cuando $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada subconjunto de Borel B en X.

Consecuencias del teorema de Pettis

Medibilidad Borel $f : \Omega \longrightarrow X$ es *medible Borel* cuando $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada subconjunto de Borel B en X.

Corolario

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. f es medible Borel y existe $E \in \Sigma$, con $\mu(E) = 0$, tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.

Consecuencias del teorema de Pettis

Medibilidad Borel $f:\Omega \longrightarrow X$ es *medible Borel* cuando $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada subconjunto de Borel B en X.

Corolario

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$ son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. f es medible Borel y existe $E \in \Sigma$, con $\mu(E) = 0$, tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.

Observación

Sea K un espacio compacto y μ una probabilidad de Radon en K. Si X es un espacio de Banach separable, entonces cada función continua $f : K \to X$ es medible.

Integral de Bochner

Integración de funciones simples

- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$

para cada $E \in \Sigma$.

Integral de Bochner

Integración de funciones simples

- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral
$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$
para cada $E \in \Sigma$.
- Se comprueba que la definición anterior es independiente de la representación elegida para la función simple s.

Integral de Bochner

Integración de funciones simples

- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral
$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$
para cada $E \in \Sigma$.
- Se comprueba que la definición anterior es independiente de la representación elegida para la función simple s.
- La integral es lineal, definida en el espacio de las funciones simples.

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu \right)_n$ es de Cauchy en X;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f:\Omega\longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E\in\Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu\right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu \right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;
- Al vector $\int_E f \, d\mu$ se le llama *integral de Bochner de f sobre E*;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu\right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;
- Al vector $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ se le llama *integral de Bochner de f sobre E*;
- $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ es independiente de la sucesión de simples;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu\right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;
- Al vector $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ se le llama *integral de Bochner de f sobre E*;
- $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ es independiente de la sucesión de simples;
- El conjunto de las funciones $f : \Omega \longrightarrow X$ integrables Bochner es un espacio vectorial.

Propiedades de Integral de Bochner

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Propiedades de Integral de Bochner

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Bochner, entonces, para todo $E \in \Sigma$, se tiene que

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \int_E \| f \| \, d\mu .$$

Teorema de convergencia Dominada

Teorema de Convergencia Dominada

Sea $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones integrables Bochner, que converge hacia una función μ-medible f en casi todo punto o en medida. Supongamos además que existe una función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, integrable Lebesgue, tal que $\| f_n \| \leq g$ p.c.t.p. en Ω. Entonces, f es integrable Bochner y

$$\lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu, \quad \text{para todo } E \in \Sigma.$$

De hecho, se tiene que

$$\lim_n \int_\Omega \| f_n - f \| \, d\mu = 0.$$

La integral indefinida

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner, y sea $F(E) = \int_E f \, d\mu$, $E \in \Sigma$. Entonces:

1. $\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0$.
2. F es una medida vectorial numerablemente aditiva de variación acotada y, para cada $E \in \Sigma$, se tiene que

$$|F|(E) = \int_E \| f \| \, d\mu.$$

Fórmula baricéntrica

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces:

1. Si Y es otro espacio de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ es lineal y continua, entonces Tf también es integrable Bochner y
$$T\left(\int_E f\,d\mu\right) = \int_E Tf\,d\mu, \quad \text{para cada} \quad E \in \Sigma.$$

2. Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^*f \in L^1(\mu)$, y se tiene que
$$x^*\left(\int_E f\,d\mu\right) = \int_E x^*f\,d\mu, \quad \text{para cada} \quad E \in \Sigma.$$

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo } w \in E. \qquad (1)$$

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo } \ w \in E. \qquad (1)$$
- La última desigualdad proporciona $\alpha\mu(E) \leq \int_E x^* f(w) \, d\mu$,

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo } \ w \in E. \qquad (1)$$
- La última desigualdad proporciona $\alpha\mu(E) \leq \int_E x^* f(w) \, d\mu$,
- Es decir $\alpha \leq x^* \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(w) \, d\mu \right)$,

Propiedad de la media

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo } \; w \in E. \qquad (1)$$
- La última desigualdad proporciona $\alpha\mu(E) \leq \int_E x^* f(w) \, d\mu$,
- Es decir $\alpha \leq x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(w) \, d\mu\right)$, lo que contradice la primera desigualdad de (1) y termina la prueba.

Aplicaciones: Teorema de Krein-Smulyan

Proposición

Sea X un espacio de Banach y sea H un subconjunto débilmente compacto de X. Entonces, la envoltura convexa y cerrada de H, $\overline{\mathrm{co}(H)}$, es débilmente compacta.

Otra mirada a la medibilidad: fragmentabilidad

Proposición

Para $f:\Omega \to X$ son equivalentes:

(α) f es medible;

(β) Para cada $\varepsilon > 0$ f existe una partición $B_0, B_1, \dots, B_m$ de Ω en Σ tal que:

i) $\| \; \| - \operatorname{diam}(f(B_i)) < \varepsilon, \; i = 1, 2, \dots, m$;

ii) $\mu(B_0) < \varepsilon$.

(γ) Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $\| \; \| \operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.

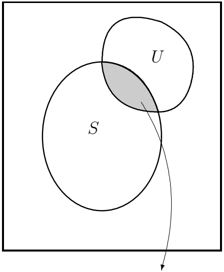
Fragmentabilidad vs. medibilidad

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $\| \ \| \operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.

Fragmentabilidad vs. medibilidad

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $\| \; \|\operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.

(T, τ)



$d\!-\!\operatorname{diam}(S \cap U) \leq \varepsilon$

Fragmentabilidad

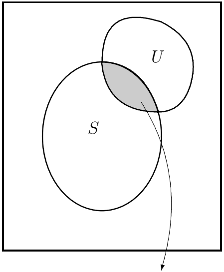
(T, τ) espacio topológico y d una métrica en T.

- ε-fragmentado.

Fragmentabilidad vs. medibilidad

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $\| \ \| \operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.

(T, τ)



$d\text{–}\operatorname{diam}(S \cap U) \leq \varepsilon$

Fragmentabilidad

(T, τ) espacio topológico y d una métrica en T.

- ε-fragmentado.
- fragmentado$\equiv$ ε-fragmentado, para todo ε.

La propiedad de Radon-Nikodým

La propiedad de Radon-Nikodým X se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (brevemente, PRN) respecto de μ si, para cada medida vectorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ de variación acotada que es absolutamente continua respecto de μ, existe una función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que $F(E) = \int_E f \, d\mu$, para todo $E \in \Sigma$.

- El clásico teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares, establece que $X = \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.
- Los espacios de Banach reflexivos tienen la PRN; c_0 no tiene la PRN; ningún $C(K)$ con K compacto infinito tiene la PRN.

La propiedad de Radon-Nikodým

La propiedad de Radon-Nikodým X se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (brevemente, PRN) respecto de μ si, para cada medida vectorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ de variación acotada que es absolutamente continua respecto de μ, existe una función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que $F(E) = \int_E f \, d\mu$, para todo $E \in \Sigma$.

- El clásico teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares, establece que $X = \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.
- Los espacios de Banach reflexivos tienen la PRN; c_0 no tiene la PRN; ningún $C(K)$ con K compacto infinito tiene la PRN.

Teorema Namioka-Phelps-Stegall

Para un espacio de Banach X son equivalentes:

1. X es Asplund, *i.e.*, cada función convexa definida en un abierto convexo de X is Fréchet derivable en los puntos de un $\mathscr{G}_\delta$ denso de su dominio;
2. cada subespacio separable de X tiene dual separable;
3. (B_{X^*}, w^*) está fragmentada por la norma;
4. X^* tiene la PRN.

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MathSciNet Mathematical Reviews on the Web

Publications results for "Author=(Mordukhovich)"

MR2191744 (2007b:49003a)
Mordukhovich, Boris S.(1-WYNS-SC)
Variational analysis and generalized differentiation. I.
Basic theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 330. *Springer-Verlag, Berlin,* 2006. xxii+579 pp. ISBN: 978-3-540-25437-9; 3-540-25437-4
49-02 (49J52 49J53 49K27 49K40 90C31)

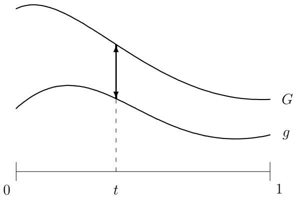
Citations
From References: 32
From Reviews: 3

MR2191745 (2007b:49003b)
Mordukhovich, Boris S.(1-WYNS-SC)
Variational analysis and generalized differentiation. II.
Applications. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 331. *Springer-Verlag, Berlin,* 2006. i--xxii and 1--610. ISBN: 978-3-540-25438-6; 3-540-25438-2
49-02 (49J52 49J53 49K27 49K40 90C31)

The necessity of dealing with nondifferentiable functions and sets with

La integral para una multifunción

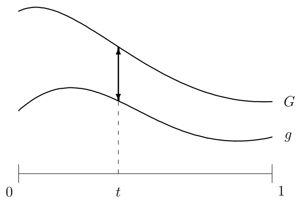
$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos

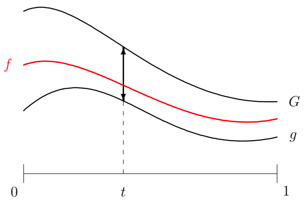


Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



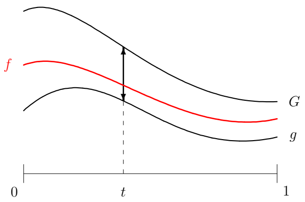
Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(= \ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F \, d\mu = \left\{ \int f \, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

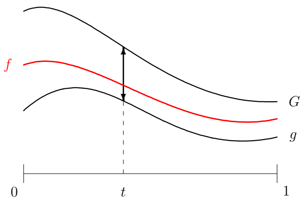
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F \, d\mu = \left\{ \int f \, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu, [Deb67], usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

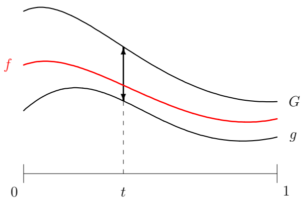
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\, d\mu = \left\{ \int f\, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu, [Deb67], usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;
2. Aumann, [Aum65], uso la técnica de los selectores;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F \, d\mu = \left\{ \int f \, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu, [Deb67], usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;
2. Aumann, [Aum65], uso la técnica de los selectores;
3. Ambos utilizaron las definiciones en modelos de economía: ambos son premios Nobel de economía de 1983 y 2005.

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Teorema Mackey, [Köt69]

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y sea τ_M la topologia en X^* de convergencia uniforme sobre los conjuntos w-compactos de X. Entonces τ_M es la topología en X^* localmente convexa más fina que tiene la propiedad $(X^*, \tau_M)' = X$.

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Teorema Mackey, [Köt69]

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y sea τ_M la topologia en X^* de convergencia uniforme sobre los conjuntos w-compactos de X. Entonces τ_M es la topología en X^* localmente convexa más fina que tiene la propiedad $(X^*, \tau_M)' = X$.

Corolario

Si X es un espacio de Banach y $A \subset X^*$ es convexo entonces:

$$\overline{A}^{\tau_M} = \overline{A}^{w^*}$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \ C$ es convexo y $\| \ \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \; C$ es convexo y $\| \; \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
4. $cwk(X) = \{C \subset \mathscr{C} : \; C$ es convexo y $w - compacto\}$, entonces $ck(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \ C \text{ es convexo y } \| \ \| - \text{compacto en norma}\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
4. $cwk(X) = \{C \subset \mathscr{C} : \ C \text{ es convexo y } w - compacto\}$, entonces $ck(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
5. X es separable si, y sólo si, $(ck(X), h)$ es separable.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \; C$ es convexo y $\| \; \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
4. $cwk(X) = \{C \subset \mathscr{C} : \; C$ es convexo y $w - compacto\}$, entonces $ck(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
5. X es separable si, y sólo si, $(ck(X), h)$ es separable.
6. Si $C_n \xrightarrow{h} C$ en $\mathscr{C}$ entonces

$$C := \{x \in X : \text{existe } x_n \in C_n \text{ con } x = \lim_n x_n\}$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Dados un conjunto acotado $C \subset X$ y $x^* \in X^*$, escribimos

$$\delta^*(x^*, C) := \sup\{x^*(x) : \ x \in C\}.$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Dados un conjunto acotado $C \subset X$ y $x^* \in X^*$, escribimos

$$\delta^*(x^*, C) := \sup\{x^*(x) : \; x \in C\}.$$

Teorema Rådström [Råd52]

La aplicación $j : cwk(X) \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ definida por $j(C)(x^*) = \delta^*(x^*, C)$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $j(C+D) = j(C) + j(D)$ para cada $C, D \in cwk(X)$;

(ii) $j(\lambda C) = \lambda j(C)$ para cada $\lambda \geq 0$ y cada $C \in cwk(X)$;

(iii) $h(C, D) = \|j(C) - j(D)\|_\infty$ para cada $C, D \in cwk(X)$;

(iv) $j(cwk(X))$ es cerrado en $\ell_\infty(B_{X^*})$.

Pre-requisitios. . . selectores. . . teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t \in \Omega : \; F(t) \cap F \neq \emptyset\} \in \Sigma \quad \text{para cada cerrado } F \subset X.$$

Pre-requisitios. . . selectores. . . teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t \in \Omega : \; F(t) \cap F \neq \emptyset\} \in \Sigma \quad \text{para cada cerrado } F \subset X.$$

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow 2^X$ una multi-función. Un selector para F es una aplicación $f : \Omega \to X$ tal que

$$f(w) \in F(w), \; \text{para cada } w \in \Omega.$$

Pre-requisitios. . . selectores. . . teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F:\Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t\in\Omega:\ F(t)\cap F\neq\emptyset\}\in\Sigma \quad \text{para cada cerrado } F\subset X.$$

Definición

Sea $F:\Omega\longrightarrow 2^X$ una multi-función. Un selector para F es una aplicación $f:\Omega\to X$ tal que

$$f(w)\in F(w), \text{ para cada } w\in\Omega.$$

Teorema y Ryll-Nardzewski [KRN65]

Si X es un espacio de Banach separable, toda multi-función $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(X)$ medible tiene un selector medible.

La integral para una multifunción

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ se dice integrable Debreu si la composición $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ es integrable Bochner.

Observación

En las condiciones de la definición existe un único $C \in ck(X)$ que cumple $j(C) = (\text{Bochner}) \int_\Omega j \circ F \, d\mu$. Por definición:

$$(De) \int_\Omega F \, d\mu := C.$$

Debreu=Auman

Proposición

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable, entonces F es medible y tiene selectores integrables Bochner.

Debreu=Auman

Proposición

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable, entonces F es medible y tiene selectores integrables Bochner.

Teorema

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable entonces

$$(D) \int_\Omega F d\mu = \{ \int_\Omega f d\mu : f \text{ selector medible de } F \}.$$

Theorem (Cascales-Namioka, Fund. Math. 2003. Cascales-Namioka-Orihuela, Studia Math. 2003)

Let K be compact subspace of M^D, (M,ρ) metric space. TFAE:

(a) *The space (X,τ_p) is fragmented by d.*

(c) *For each $A\in\mathscr{C}$, the pseudo-metric space (K,d_A) is separable.*

(d) *$(K,\gamma(D))$ is Lindelöf.*

(e) *$(K,\gamma(D))^{\mathbb{N}}$ is Lindelöf.*

Theorem (Cascales-Namioka, Fund. Math. 2003. Cascales-Namioka-Orihuela, Studia Math. 2003)

Let K be compact subspace of M^D, (M,ρ) metric space. TFAE:

(a) *The space (X,τ_p) is fragmented by d.*

(c) *For each $A \in \mathscr{C}$, the pseudo-metric space (K,d_A) is separable.*

(d) *$(K,\gamma(D))$ is Lindelöf.*

(e) *$(K,\gamma(D))^{\mathbb{N}}$ is Lindelöf.*

- Es la version topológica abstracta de la caracterización de los espacios de Asplund dada Namioka-Phelps-Stegall

Theorem (Cascales-Namioka, Fund. Math. 2003. Cascales-Namioka-Orihuela, Studia Math. 2003)

Let K be compact subspace of M^D, (M,ρ) metric space. TFAE:

(a) *The space (X,τ_p) is fragmented by d.*

(c) *For each $A \in \mathscr{C}$, the pseudo-metric space (K,d_A) is separable.*

(d) *$(K,\gamma(D))$ is Lindelöf.*

(e) *$(K,\gamma(D))^{\mathbb{N}}$ is Lindelöf.*

- Es la version topológica abstracta de la caracterización de los espacios de Asplund dada Namioka-Phelps-Stegall
- Como aplicación se resolvieron problemas abiertos planteados por Corson y Talagrand en el contexto de los espacios de Banach.

Theorem (Cascales-Rodriguez, Math. Ann. 2005)

Let $f : \Omega \to X$ be a bounded function. The following statements are equivalent:

(i) *f is Birkhoff integrable;*

(ii) *for every $\varepsilon > 0$ there is a countable partition $\Gamma = (A_n)$ of Ω in Σ such that for each $t_k, t'_k \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$, we have*

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \langle x^*, f\rangle(t_k)\mu(A_k) - \sum_{k=1}^{m} \langle x^*, f\rangle(t'_k)\mu(A_k) \right| < \varepsilon$$

for every $m \in \mathbb{N}$ and every $x^* \in B_{X^*}$;

(iii) *$Z_f = \{\langle x^*, f\rangle : \ x^* \in B_{X^*}\}$ has Bourgain property.*

Theorem (Cascales-Rodriguez, Math. Ann. 2005)

Let $f:\Omega\to X$ be a bounded function. The following statements are equivalent:

(i) *f is Birkhoff integrable;*

(ii) *for every $\varepsilon>0$ there is a countable partition $\Gamma=(A_n)$ of Ω in Σ such that for each $t_k,t'_k\in A_k$, $k\in\mathbb{N}$, we have*

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k)\mu(A_k)-\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t'_k)\mu(A_k)\right|<\varepsilon$$

for every $m\in\mathbb{N}$ and every $x^*\in B_{X^*}$;

(iii) *$Z_f=\{\langle x^*,f\rangle:\ x^*\in B_{X^*}\}$ has Bourgain property.*

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann.

Theorem (Cascales-Rodriguez, Math. Ann. 2005)

Let $f:\Omega\to X$ be a bounded function. The following statements are equivalent:

(i) *f is Birkhoff integrable;*

(ii) *for every $\varepsilon>0$ there is a countable partition $\Gamma=(A_n)$ of Ω in Σ such that for each $t_k,t_k'\in A_k$, $k\in\mathbb{N}$, we have*

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k)\mu(A_k)-\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k')\mu(A_k)\right|<\varepsilon$$

for every $m\in\mathbb{N}$ and every $x^*\in B_{X^*}$;

(iii) *$Z_f=\{\langle x^*,f\rangle:\ x^*\in B_{X^*}\}$ has Bourgain property.*

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann.
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, Fréchet 1915.

Theorem (Cascales-Rodriguez, Math. Ann. 2005)

Let $f:\Omega\to X$ be a bounded function. The following statements are equivalent:

(i) *f is Birkhoff integrable;*

(ii) *for every $\varepsilon>0$ there is a countable partition $\Gamma=(A_n)$ of Ω in Σ such that for each $t_k,t_k'\in A_k$, $k\in\mathbb{N}$, we have*

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k)\mu(A_k)-\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k')\mu(A_k)\right|<\varepsilon$$

for every $m\in\mathbb{N}$ and every $x^*\in B_{X^*}$;

(iii) *$Z_f=\{\langle x^*,f\rangle:\ x^*\in B_{X^*}\}$ has Bourgain property.*

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann.
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, Fréchet 1915.
- Para espacios de Banach separables: **Birkhoff = Pettis**. Así, la integral de Pettis *puede* calcularse como un límite.

Theorem (Cascales-Rodriguez, Math. Ann. 2005)

Let $f:\Omega\to X$ be a bounded function. The following statements are equivalent:

(i) *f is Birkhoff integrable;*

(ii) *for every $\varepsilon>0$ there is a countable partition $\Gamma=(A_n)$ of Ω in Σ such that for each $t_k,t_k'\in A_k$, $k\in\mathbb{N}$, we have*

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k)\mu(A_k)-\sum_{k=1}^{m}\langle x^*,f\rangle(t_k')\mu(A_k)\right|<\varepsilon$$

for every $m\in\mathbb{N}$ and every $x^*\in B_{X^*}$;

(iii) *$Z_f=\{\langle x^*,f\rangle:\ x^*\in B_{X^*}\}$ has Bourgain property.*

- La integral de Birkhoff involucra sumas y límites de Riemann.
- En $\mathbb{R}$, las integrales de Birkhoff y Lebesgue coinciden, Fréchet 1915.
- Para espacios de Banach separables: **Birkhoff = Pettis**. Así, la integral de Pettis *puede* calcularse como un límite.
- Caracterización de la WRNP en espacios de Banach duales vía densidades de Radon-Nikodým integrables Birkhoff, en lugar de integrables Pettis.

Theorem, Cascales-Kadets-Rodriguez, 2007

Let X be an Banach space and $F : \Omega \to cwk(X)$ a Pettis integrable multi-function. Then:

- every scalarly measurable selector is Pettis integrable;
- F admits a scalarly measurable selector.

Furthermore, F admits a collection $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathrm{dens}(X^*,w^*)}$ of Pettis integrable selectors such that

$$F(\omega) = \overline{\{f_\alpha(\omega) : \ \alpha < \mathrm{dens}(X^*, w^*)\}} \quad \text{for every } \omega \in \Omega.$$

Moreover, $\int_A F \, d\mu = \overline{IS_F(A)}$ for every $A \in \Sigma$.

Theorem, Cascales-Kadets-Rodriguez, 2007

Let X be an Banach space and $F:\Omega \to cwk(X)$ a Pettis integrable multi-function. Then:

- every scalarly measurable selector is Pettis integrable;
- F admits a scalarly measurable selector.

Furthermore, F admits a collection $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathrm{dens}(X^*,w^*)}$ of Pettis integrable selectors such that

$$F(\omega) = \overline{\{f_\alpha(\omega) : \ \alpha < \mathrm{dens}(X^*, w^*)\}} \quad \text{for every } \omega \in \Omega.$$

Moreover, $\int_A F \, d\mu = \overline{IS_F(A)}$ for every $A \in \Sigma$.

- Se extiende al caso no separable la teoría de integración de multifunciones.

Theorem, Cascales-Kadets-Rodriguez, 2007

Let X be an Banach space and $F:\Omega \to cwk(X)$ a Pettis integrable multi-function. Then:

- every scalarly measurable selector is Pettis integrable;
- F admits a scalarly measurable selector.

Furthermore, F admits a collection $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathrm{dens}(X^*,w^*)}$ of Pettis integrable selectors such that

$$F(\omega) = \overline{\{f_\alpha(\omega) : \ \alpha < \mathrm{dens}(X^*,w^*)\}} \quad \text{for every } \omega\in\Omega.$$

Moreover, $\int_A F\,d\mu = \overline{IS_F(A)}$ for every $A\in\Sigma$.

- Se extiende al caso no separable la teoría de integración de multifunciones.
- Se obtienen resultados sobre selectores medibles de multifunciones medibles fuera del caso separable.

Gracias

http://misuma.um.es/beca

References

R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 1–12. MR 0185073 (32 #2543)

Michael F. Barnsley, *Fractals everywhere*, second ed., Academic Press Professional, Boston, MA, 1993, Revised with the assistance of and with a foreword by Hawley Rising, III. MR MR1231795 (94h:58101)

G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 2, 357–378. MR 1 501 815

B. Cascales and G. Godefroy, *Angelicity and the boundary problem*, Mathematika **45** (1998), no. 1, 105–112. MR 99f:46019

B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *The pettis integral for multi-valued functions via single-valued ones*, J. Math. Anal. Appl. (2007), no. To appear.

B. Cascales, W. Marciszesky, and M. Raja, *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), no. 13, 2303–2319. MR MR2238732

B. Cascales, G. Manjabacas, and G. Vera, *A Krein-Smulian type result in Banach spaces*, Publicaciones del Departamento de Matematicas. Universidad de Murcia **11** (1994), 1–13.

______, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), no. 190, 161–167. MR 99c:46009

B. Cascales and A. J. Pallarés, *La propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach duales*, Collect. Math. **45** (1994), no. 3, 263–270. MR 96i:46019

B. Cascales and J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 259–279. MR 2115456

References

- B. Cascales and R. Shvydkoy, *On the Krein-Šmulian theorem for weaker topologies*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 957–976. MR MR2036985 (2004m:46044)
- B. Cascales and S. Troyanski, *Fundamentos de análisis matemático*, Curso de doctorado Universidad de Murcia, 2004.
- B. Cascales and G. Vera, *Topologies weaker than the weak topology of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **182** (1994), no. 1, 41–68. MR 95c:46017
- C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580. MR 0467310 (57 #7169)
- G. Debreu, *Integration of correspondences*, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1, Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967, pp. 351–372. MR 0228252 (37 #3835)
- J. Diestel and J. J. Uhl Jr, *Vector measures*, Mathematical Surveys, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis. MR 56 #12216
- K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001
- G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750
- K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **13** (1965), 397–403. MR 0188994 (32 #6421)

References

- E. Klein and A. C. Thompson, *Theory of correspondences*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, Including applications to mathematical economics, A Wiley-Interscience Publication. MR 752692 (86a:90012)
- B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 2, 277–304. MR 1 501 970
- R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 114–145. MR 2,103c
- H. Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 165–169. MR 0045938 (13,659c)