SERIES DE FOURIER (y EDP)

Curso 2013-2014

B. Cascales.

I SISTEMAS DE STURM-LIOUVILLE.

Bibliografía:

(1) Análisis Funcional, B. Cascales et alt. e-Lectolibris (2013)
→ L^2-teoría; Sturm Liouville

(2) Fourier Analysis and its applications, G. B. Folland, Pure and Applied Undergraduate Text. AMS.

(3) Introduction to partial differential equations, from Fourier Series to boundary-value problems, Arne Broman, Dover.

B. Cascales

SERIES DE FOURIER ~~(y EDP)~~ Curso 2013-2014.

1. Definiciones y ejemplos.-

Sea $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función integrable (!ver debajo los comentarios sobre integrabilidad) y $n \in \mathbb{Z}$. Llamamos n-ésimo coeficiente de Fourier al número.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx$$

Nota sobre integrabilidad: algunos libros desarrolla el estudio de las series de Fourier para funciones integrables Riemann. Nosotros haremos uso de que en el nuevo grado los alumnos conocen la integral de Lebesgue y haremos uso continuado de las propiedades de la integral y espacios de funciones integrables $L^1([-\pi,\pi])$ y $L^2([-\pi,\pi])$. (ver apéndice del libro Análisis Funcional de B. Cascales, et alt. electolibris. 2013).

La serie de Fourier asociada a f se define como

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx} \qquad (1)$$

El problema fundamental de las series de Fourier es:

¿En que sentido y a quien converge la serie dada en (1)? (2)

Ejercicio.- Dada $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ integrable, probar

(i) $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$$

(ii) Si f toma valores reales, demostrar que $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Llamaremos N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f a la suma

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

Observar que $S_N(f)$ es un "polinomio trigonométrico": La pregunta anterior (2) puede reformularse

¿En que sentido $S_N(f)$ converge y a quien lo hace?

Analizamos varios casos:

(a) ¿Existe $\lim_N S_N(f)(x) = f(x)$ para todo $x \in [-\pi,\pi]$? La respuesta es no, pues si cambiamos f es un conjunto de medida nula los $\hat{f}(n)$ son los mismos y entonces no podría converger.

Así que nos replanteamos la pregunta:

(A) ¿Si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y 2π-periódica ($f(a+2\pi)=f(a)$) se tiene que $\lim_N S_N(f)(x)=f(x)$ para todo $x\in[-\pi,\pi]$?

(B) ¿si $f\in L^1([-\pi,\pi])$ se tiene que $\lim_N S_N(f)(x)=f(x)$ p.c.t. $x\in[-\pi,\pi]$?

La respuesta a ambas cuestiones es negativa: a (A) se dió respuesta a final del siglo XIX y a (B) al principio del siglo XX. Respecto de (A) se puede ver, utilizando técnicas de análisis funcional que el conjunto de funciones periódicas $(C_{per}([-\pi,\pi]),\|\cdot\|_\infty)$ cuya serie de Fourier es divergente en un G_δ-denso de $[-\pi,\pi]$ es de hecho un G_δ-denso.

En el curso daremos respuestas positivas a las cuestiones anteriores, de entre las que destacamos estos enunciados que se pueden comprender:

(1) $f\in L^2([-\pi,\pi])$, entonces $S_N(f)\xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

(2) $f\in C([-\pi,\pi])$ 2π-periódica $\dfrac{S_0(f)+S_1(f)+\cdots+S_N(f)}{N+1}\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

(3) $f\in C([0,2\pi])$ 2π-periódica de clase C^1 a trozos entonces $S_N(f)\longrightarrow f$ absoluta y uniformemente en $[-\pi,\pi]$

Se analizarán otros resultados importantes necesarios para llegar a (1), (2) y (3), que involucran un análisis fino de la convergencia puntual de la serie de Fourier.

1 clase

L^2-TEORÍA PARA SERIES DE FOURIER. ESPACIOS DE HILBERT

En esta sección trabajaremos sobre la estructura del espacio de Hilber $L^2([-\pi,\pi])$ y utilizando que $\{e^{int}: n\in\mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal completo demostraremos que para funciones $f\in L^2([-\pi,\pi])$ se tiene que

$$S_N(f)\longrightarrow f \text{ en } L^2([-\pi,\pi]).$$

$L^2([-\pi,\pi])$ es el espacio de las clases de equivalencia de funciones $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ medibles con $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt<+\infty$. En $L^2([-\pi,\pi])$ consideramos el producto escalar

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

que está bien definido gracias a la desigualdad de Hölder que nos dice que si $f\in L^p([-\pi,\pi])$ y $g\in L^q([-\pi,\pi])$ con $1/p+1/q=1$, entonces

$$f\cdot g\in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi]) \text{ y } \int_{-\pi}^{\pi}|f\cdot g|\,dt \le \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\right)^{1/p}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g|^q\right)^{1/q}$$

La desigualdad Holder para $p=2$, se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz y se escribe para $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$, entonces $f g \in L^1([-\pi,\pi])$ y

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Una alternativa a conocer las técnicas de integración para introducir ~~tal~~ el espacio $L^2([-\pi,\pi])$, es:

(a) Definir para $f, g \in C([-\pi,\pi])$ el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

(b) Demostrar que "como buen producto escalar" la fórmula $\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ define una norma. Por tanto $(C([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$ es un espacio normado.

(c) Manejar su compleción $H := \left(\overline{C([-\pi,\pi], \|\cdot\|_2)}, \|\cdot\|_2\right)$ a la que se le dota de estructura de espacio de Hilbert y el estudio allí de los desarrollos en serie es el desarrollo en serie de Fourier que andamos buscando.

Nosotros no utilizaremos esta aproximación, y partiremos de que el alumno conoce la integración de Lebesgue y por tanto manejaremos $L^2([-\pi,\pi])$ como espacios de funciones.

Los espacios de Hilbert constituyen un tipo especial de espacios de Banach y son la generalización más inmediata de los espacios euclídeos de dimensión finita.

Definición.- Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Un producto escalar sobre H es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow H$$

que verifica.

(i) $\langle ax+by, z \rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{K},\ x, y, z \in H$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in H$.

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $x=0$.

Un espacio prehilbertiano es un espacio H con un producto escalar.

Las tres propiedades de la definición precedente se expresan diciendo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma hermitiana definida positiva.

Proposición.- Si $(H, \langle , \rangle)$ es un espacio prehilbertiano entonces:

(i) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ para todo $x, y \in H$. (desigualdad de Cauchy-Schwarz). Dicha desigualdad es una igualdad si, y solo si, x e y son linealmente independientes.

(ii) La función $\|\ \| := +\sqrt{\langle x,x\rangle}$ define una norma en H. Además para cada x e y no nulos se da la igualdad $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si, y sólo si, $x = \alpha y$ con $a > 0$.

Demostración.– ver cualquier libro de AF en particular AF de B. Cascales et alt. Demostrado en clase: ~~Cauchy-Schwarz~~ y la desigualdad triangular.

Definición.– Se llama espacio de Hilbert a un espacio prehilbertiano H en el que el espacio normado asociado $(H, \|\cdot\|)$ es completo.

Ejemplos.–

(a) $\mathbb{K}^n$ con el producto escalar

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}$$

es un espacio de Hilbert.

(b) $\ell^2 = \{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$ con el producto escalar

$$\langle (x_n)_n, (y_n)_n\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

es de Hilbert

(c) $L^2([-\pi,\pi])$ con el producto escalar $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$ dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

es de Hilbert, y la norma asociada es $\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Hay dos propiedades que distinguen a las normas de los espacios prehilbertianos que son.

Proposición.– Sea H un espacio prehilbertiano y $\|\cdot\|$ la norma asociada.

(i) Se verifica la siguiente ley del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ para todo } x, y \in H$$

(ii) (Identidad de polarización). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\}.$$

(iii) (Identidad de polarización real).– Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}.$$

Un famoso teorema de Jordan Von Neumann dice que una $\|\cdot\|$ deriva de un producto escalar si y solo si satisface la ley del paralelogramo, y en este caso la identidad de polarización permite definir el producto del que deriva la norma.

Las propiedades extraordinarias que tienen los espacios prehilbertianos se basan en que en ellos gracias a la noción de ortogonalidad podemos obtener "mejores aproximaciones" a subconjuntos convexos y cerrados.

Definición.- Sea H un espacio prehilbertiano.

(i) Los vectores $x, y \in H$ se dicen ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$. La notación $x \perp y$ significa que x e y son ortogonales

(ii) El vector $x \in H$ se dice ortogonal a un conjunto M, si $\langle x, y\rangle = 0$ para toda $y \in M$. Escribimos

$$M^{\perp} = \{x \in H \text{ tal que: } \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in M\}$$

(iii) Una familia $(x_i)_{i\in I}$ se dice ortogonal, si $x_i \perp x_j$ $i \neq j$, y se dice ortonormal si es ortogonal y $\|x_i\| = 1$ para cada $i \in I$.

Se cumple el teorema de Pitágoras $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si $x \perp y$; los conjuntos ON son LI y $M^{\perp}$ es cerrado.

(1) $e_i = (0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \ldots, 0)$ se tiene que $(e_i)_{i=1}^n$ es ortonormal en $(\mathbb{K}^n, \langle\, , \rangle)$

Observar que. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ entonces.

$$\langle x, e_i\rangle = e_i \rightsquigarrow \boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i} \quad (*)$$

(2) $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ es ORTOGONAL en $L^2([-\pi, \pi])$ observar que.

$$k \neq 0 \qquad (e^{ikt})' = ik(e^{ikt}) \rightsquigarrow \left(\frac{e^{ikt}}{ik}\right)' = e^{ikt}$$

(Si no se quiere hacer la derivación compleja, se puede derivar utilizando

$$(e^{ikt})' = (\cos kt + i \operatorname{sen} kt)' = k\cdot(-\operatorname{sen} kt + i\cos kt) = ki(\cos kt + i \operatorname{sen} kt) = ki\, e^{ikt}).$$

En cualquier caso a la vista de lo que estamos escriviendo. si

$$n \neq m \qquad \langle e^{int}, e^{imt}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \cdot e^{-imt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

$$n = m \qquad \|e^{int}\|_2^2 = \langle e^{int}, e^{int}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt = 2\pi.$$

En definitiva $\|e^{int}\|_2 = \sqrt{2\pi}$ y por lo tanto.

$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\right\}$. es un conjunto ORTORORMAL. El objetivo de las próximas páginas es demostrar que este conjunto en $L^2([-\pi, \pi])$ funciona como la base de $\mathbb{K}^n$, es decir, que analogo a $(*)$ podemos escribir para $f \in L^2([-\pi, \pi])$

$$\underset{\text{convergencia en } \|\cdot\|_2}{f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \cdot e^{int}.$$

#

Una herramienta muy útil al estudiar espacios con un producto escalar es ella proporcionada por el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, 1907.

<u>Lema</u>.- Sea $(x_n)_n$ una colección de vectores L.I del espacio prehilbertiano H. Si se define.

$$y_1 := x_1; \qquad u_1 := \frac{x_1}{\|y_1\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x, u_j \rangle u_j, \qquad u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad \text{si } n \geq 2$$

entonces $(u_n)_n$ es un conjunto ortonormal en H y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\operatorname{span}\{u_1, u_2, .., u_n\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2, .., x_n\}$$

<u>Demostración</u>.- La comprobación de que $(u_n)_n$ es ON se hace por inducción de forma inmediata: $n=1 \rightsquigarrow \{u_1\}$ es ON. $\operatorname{span}\{u_1\} = \operatorname{span}\{x_1\}$.

supuesto cierto $\{u_1, u_2, .., u_{n-1}\}$ es ON, y $\operatorname{span}\{u_1, .., u_{n-1}\} = \operatorname{span}\{x_1, .., x_{n-1}\}$

$$\langle y_n, u_i \rangle \underset{1 \leq i \leq n-1}{=} \langle x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x, u_j \rangle u_j, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \langle x, u_i \rangle = 0.$$

además $y_n \neq 0$ pues $x_n \notin \operatorname{span}\{x_1, x_2, .., x_{n-1}\} = \operatorname{span}\{u_1, .., u_{n-1}\}$. Observar que $\operatorname{span}\{u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_n\} = \operatorname{span}\{u_1, .., u_{n-1}, y_n\} \subseteq \operatorname{span}\{x_1, x_2, .., x_{n-1}, x_n\}$.

+ clases La otra inclusión también es clara. #

<u>COROLARIO</u>.- Sea H un espacio prehilbertiano y M un subespacio finito dimensional de H. Entonces:

(a) M tiene una base formada por vectores ortonormales;

(b) M es isomorfo a $\mathbb{K}^n$, siendo $n = \dim M$.

<u>Definición</u>.- Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano, $\|\cdot\|$ la norma asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d la métrica asociada a $\|\cdot\|$ y S un conjunto no vacío de H. Fijado $x \in H$, si la función $d(x, \cdot)$ alcanza un mínimo en S, es decir, si existe $y \in S$ tal que $d(x,y) = d(x,S)$, se dice que y es un vector de mejor aproximación de x a S.

<u>Teorema</u>.- Sea $Y \subseteq X$ un subespacio del espacio prehilbertiano H y $x \in H$. Entonces:

(i) si existe $y \in Y$ tal que $x - y \perp Y \rightsquigarrow$ entonces y es la mejor aproximación de $\underset{\sim}{x}$ sobre Y.

(ii) Si el vector mejor aproximación existe entonces es **único**.

<u>Demostración</u>.- supuesto que $x - y \perp Y$, para cada $z \in Y$ tenemos por el teorema de Pitágoras que,

$$\|x - z\|^2 = \|(x-y) + (y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$

Supongamos que hay dos puntos $y, z \in V$ tales que

$$\|x-y\| = \|x-z\| = \alpha = d(x, V)$$

Llamemos $u = x-y$ y $v = x-z$. La identidad del paralelogramo nos da que.

$$\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \rightsquigarrow$$

$$\|z-y\|^2 + \|2x-(y+z)\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-z\|^2 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left\|\frac{z-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \left\|x - \left(\frac{y+z}{2}\right)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow y = z \; \#$$

Proposición.- Sea M un subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano H y sea $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ una base ortonormal de M. Entonces:

(i) Para cada $x \in M$, existe un único vector de mejor aproximación y de x a M que se expresa como

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \quad (*)$$

(ii) $$d(x, M)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Demostración.- Vemos que y dado por $(*)$ es tal que $x-y \perp M$. Ahora bien
Para esto es suficiente ver que $x - y \perp e_j \quad 1 \leq j \leq n$.

$$\langle x-y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

Por otro lado, se tiene que

$$d(x, M)^2 = \|x-y\|^2 = \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle =$$

$$= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, x \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

→ pag. 278.

Proposición 1.12.20 (Desigualdad de Bessel).- Sea (H y $\langle , \rangle$) un espacio prehilbertiano, y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Para cada $x \in H$ se tiene:

(a) $$\sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < +\infty \text{ y se tiene}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2\right)^{1/2} \leq \|x\| \quad \text{(Desigualdad de Bessel).}$$

5 clases hasta aquí.

Teorema de Riesz-Fisher.– Sea H un espacio prehilbertiano y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal y sea

$$\wedge: H \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$
$$x \rightsquigarrow (\langle x,e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

Entonces: (i) La aplicación $\wedge$ tiene rango en ℓ^2;

(ii) Si H es de Hilbert $\wedge: H \longrightarrow \ell^2$ es sobreyectiva.

Demostración.– (i) Es consecuencia directa de la desigualdad de Bessel.

(ii) Sea $(a_n)_n \in \ell^2$. Si consideramos $\left(\sum_{n=1}^{m} a_m e_n\right)_m$, la sucesión es de Cauchy en H. Efectivamente,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n e_n - \sum_{n=1}^{m+k} a_n e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n e_n \right\|^2 \underset{\text{Pitagoras}}{=} \sum_{n=m+1}^{m+k} |a_n|^2 < \varepsilon \quad m \geq m_\varepsilon .$$

Así, existe $x = \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_m e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ y se tiene que,

$$\langle x, e_n\rangle = a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}. \quad \#$$

Teorema.– Sea H un espacio de Hilbert y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ON. Son equivalentes:

(i) $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}} = H$

(ii) $\wedge: H \longrightarrow \ell^2$ es inyectiva.

(iii) Para cada $x\in H$, $\quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x,e_n\rangle e_n$ (Des. de Fourier).

(iv) Para cada $x, y\in H$, $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x,e_n\rangle \overline{\langle y,e_n\rangle}$.

(v) Para cada $x\in H$, se tiene $\quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x,e_n\rangle|^2$.

Demostración.– (i) $\Rightarrow$ (ii) $\wedge$ es lineal y $\operatorname{Ker}(\wedge) = \{x\in H : \langle x,e_n\rangle = 0\}$

Ahora $\langle x,e_n\rangle = 0 \rightsquigarrow \langle x,y\rangle = 0 \ \forall y \in \operatorname{span}(e_n)$ y por paso al límite $\langle x,y\rangle = 0$ para todo $y\in H$, en particular $\langle x,x\rangle = \|x\|^2 = 0 \rightsquigarrow x = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x,e_n\rangle e_n = y$ converge por la prueba de Riesz-Fischer y $\langle x,e_n\rangle = \langle y,e_n\rangle$ para todo $n \rightsquigarrow x = y = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) son evidentes.

(v) $\Rightarrow$ (i) supongamos $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}} \subsetneq H$ $\not\exists$ existe $x\in H$ t.q. $x \notin \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$.

Sea $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x,e_n\rangle e_n$, entonces $x - y \perp \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$. Observar que $x - y = u \neq 0$ así $0 \neq \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle u,e_n\rangle|^2 = 0$ ↯ #

6 clases hasta aquí.-

Definición.- Si $(e_n)_n$ es un conjunto ortonormal que satisface una de las condiciones equivalentes en la proposición anterior, entonces $(e_n)_n$ se llama base Hilbertiana de H.

Proposición.- Si H es un espacio de Hilbert separable, entonces H tiene una base Hilbertiana $(e_n)_n$.

Ejemplo.- $(e_n)_n$ es una base Hilbertiana de ℓ^2:

$$e_n = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \dots)$$

Teorema.- $L^2_1([-\pi, \pi])$ con el producto escalar $<,>$ dado por

$$<f, g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{g(t)} \, dt$$

es un espacio de Hilbert, para el cual el conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base hilbertiana. Consecuentemente si para $f \in L^2([-\pi, \pi])$ escribimos

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

Entonces

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{en} \quad L^2([-\pi, \pi]) \quad \text{(Desarrollo en serie de Fourier)}.$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad \text{(Identidad de Parseval)}.$$ * dorso

Demostración.- Dado que hemos demostrado que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es O.N. es suficiente probar que $\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es denso. Observar que

$$\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \underbrace{\left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} : a_n \in \mathbb{C} \right\}}_{\text{polinomios trigonométricos}} = \operatorname{Pol\,Tri}[-\pi, \pi].$$

Ahora bien, un famoso teorema de Weierstrass dice que

$$\overline{\operatorname{Pol\,Tri}[-\pi, \pi]}^{\|\cdot\|_\infty} = (C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_\infty)$$

Es decir toda función continua 2π-periódica es límite uniforme de una sucesión de polinomios trigonométricos. De aquí sale que sabiendo

$$\overline{\operatorname{Pol\,Trig}([-\pi, \pi])} \subseteq \overline{C_{per}([-\pi, \pi])}^{\|\cdot\|_2} = (L^2([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$$

↳ de aquí se obtiene la densidad. #

(*)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right|^2 =$$

$$= 2\pi \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right|^2 = 2\pi \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

$$\curvearrowright \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2}$$

#

El teorema de Weierstrass se obtendrá en este curso como consecuencia del Teorema de Fejer (Las medias de Césaro de una función continua convergen a la función uniformemente) pero también puede obtenerse como consecuencia del siguiente teorema de Stone-Weierstrass:

<u>Teorema</u> (Stone-Weierstrass).- Sea K un compacto y sea $\mathcal{A} \subset (C(K), \|\ \|_\infty)$ una subálgebra. Si:

(i) para cada $x \in K$, existe $f \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) \neq 0$ (f distingue puntos de K);

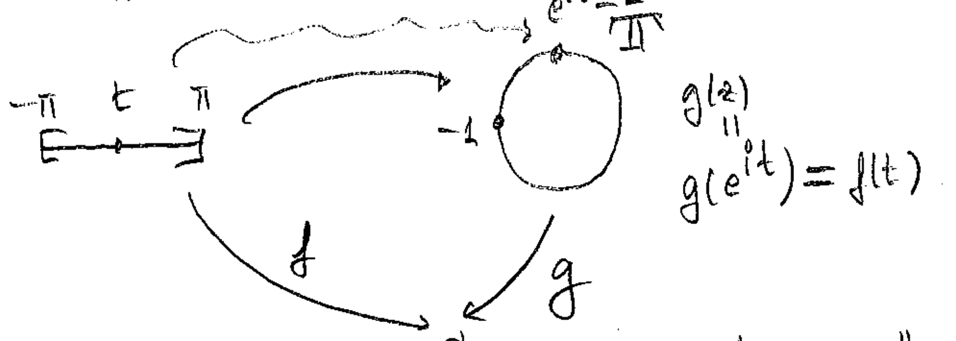
(ii) para cada $x, y \in K$, existe $f \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) \neq f(y)$ (f separa puntos de K);

(iii) $\mathcal{A}$ es auto-conjugada, i.e., $f \in \mathcal{A} \rightsquigarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$.

Se puede razonar como sigue para obtener el T$^{\underline{ma}}$ de Weierstrass de aproximación por pol. trigonometricos:

① $K = \mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$.

② Identificar las funciones 2π-periodicas continuas $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ con las funciones continuas en $\mathbb{T}$.



③ Teorema de Weierstrass aproximación por polinomios trigonométricos es lo mismo que probar que

$$\mathcal{A} = \Big\{ \sum_{n,m=1}^{N} a_{nm} z^n \cdot (\bar{z})^m : a_{nm} \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N} \Big\} \subset C(\mathbb{T})$$

es denso, y esto se sigue de Stone-Weierstrass.

7 clases - hasta aquí.

SISTEMAS DE STURM LIOUVILLE

Estudiamos el siguiente sistema

p. 561 $$-x''(t) + q(t)\,x(t) - \mu x(t) = y(t). \quad (*)$$

$q \in C([a,b])$ con valores reales, $y \in C([a,b])$ y $\mu \in \mathbb{C}$. Una solución de esta ecuación diferencial es una función $x \in C^2([a,b])$ con valores complejos que satisface $(*)$.

Problema regular de Sturm-Liouville es:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -x''(t) + q(t)x(t) - \mu x(t) = y(t) \\ (2) & B_a(x) = \alpha x(a) + \alpha_1 x'(a) = 0 \qquad |\alpha| + |\alpha_1| \neq 0 \\ (3) & B_b(x) = \beta x(b) + \beta_1 x'(b) = 0 \qquad |\beta| + |\beta_1| \neq 0 \end{array}\right\} [*]$$

El objetivo es resolver este problema. Consideremos

$$D_S = \{x \in C^2([a,b], \mathbb{C}) : B_a(x) = 0 = B_b(x)\} \subset L^2([a,b])$$

D_S es un subespacio vectorial de $L^2([a,b])$ y es el dominio natural donde debemos buscar las soluciones del problema de Sturm-Liouville. Llamaremos S al operador de Sturm-Liouville asociado a $[*]$ que no es otra cosa que

$$S : D_S \longrightarrow C([a,b])$$
$$x \rightsquigarrow -x'' + q \cdot x$$

Observar que S es un operador lineal y resolver el sistema de Sturm es para y dada encontrar para que $\mu \in \mathbb{C}$ existe $x \in D_S$ tal que

$$Sx - \mu x = (S - \mu I)(x) = y. \quad \text{donde } I : D_S \longrightarrow C([a,b]) \text{ es la identidad.}$$

IDEA: Se demostrará que si S es inyectivo existe un operador

$$G : C([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b]). \text{ (lineal continuo)}$$

que satisface:

(a) $G(C([a,b])) = D_S$

(b) G es el operador inverso de S y por lo tanto

$$Sx - \mu x = y \overset{\text{aplicamos } G \text{ a ambos lados}}{\Longleftrightarrow} x - \mu Gx = Gy \Leftrightarrow (I - \mu G)\,x = Gy \quad (**)$$

Esto es ventajoso hacerlo si para el operador G conocemos buenas propiedades y tenemos una técnica para abordar las soluciones de $(**)$ en la práctica, G es un operador que responde a la siguiente fórmula.

$$G : C([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$$
$$f \rightsquigarrow \left(t \longrightarrow \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds\right)$$

donde $k : [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

(a) continua en las dos variables;

(b) $k(s,t) = k(t,s)$ para toda $(s,t) \in [a,b]\times[a,b]$.

En la práctica podemos considerar G un operador; definido en todo $L^2([a,b])$ y utilizar los recursos de AF necesarios para estudiar el problema.

→ VER PAG: (498).- Teorema espectral de dimensión finita. #

→ ver PAG: (506 – Libro AF – Cascales, et alt.)

TEOREMA.- Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea $T : H \longrightarrow H$ un operador lineal que cumple:

(a) $T(\{x\in H : \|x\| \le 1\})$ es relativamente compacto en H;

(b) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para cada $x, y \in H$

Entonces existe una colección de vectores O.N. $(e_n)_n$ que y escalares $(\lambda_n)_n$ no nulos tal que para cada $x \in H$ se tiene

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

$(\lambda_n)_n$ son los valores propios asociados al operador con vectores propios asociados $(e_n)_n$ y si hay infinitos entonces $\lambda_n \longrightarrow 0$.

→ ver pag: (523).

COROLARIO.- Sea H un espacio de Hilbert y sea $T : H \longrightarrow H$ un operador lineal como en el teorema. Entonces:

(i) Si $\lambda \ne \lambda_n$ y $\lambda \ne 0$ la ecuación

$$(\lambda I - T)x = y$$

tiene una única solución que viene dada por

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(y + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n\right).$$

(ii) $\lambda = \lambda_m$ la ecuación $(\lambda I - T)x = y$ tiene solución sii $y \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T)^{\perp}$ en cuyo caso la solución es

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(y + \sum_{\lambda_n \ne \lambda} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n\right) + z$$

donde $z \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ es arbitrario.

(iii) La ecuación $Tx = y$ tiene solución sii $y \in (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$ y $\sum |\langle y, e_n\rangle|^2 \frac{1}{|\lambda_n|^2} < +\infty$ en cuyo caso la soluciones $x = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n$, $z \in \mathrm{Ker}\, T$.

Demostración.- Supongamos que $\lambda \neq 0$ y que tenemos la ecuación $(\lambda I - T)x = y \Leftrightarrow (I - \frac{1}{\lambda}T)x = \frac{1}{\lambda} y \Leftrightarrow$

$$x = \frac{1}{\lambda}(Tx+y) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n + y\right) \rightsquigarrow$$

$$\langle x, e_n\rangle = \frac{1}{\lambda}\lambda_n \langle x, e_n\rangle + \langle y, e_n\rangle \rightsquigarrow (\lambda - \lambda_n)\langle x, e_n\rangle = \langle y, e_n\rangle$$

Observamos que si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq \lambda_n$, entonces $\lambda \neq \lambda_n \rightsquigarrow$ observamos que si x existe se cumplirá, $\langle x, e_n\rangle = \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle$, así un tal $\underline{\underline{x}}$ lo podremos definir si la serie

$$x := \frac{1}{\lambda}\left(\sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n + y\right) \quad (***)$$

converge; observar que para que la serie converga es suficiente que:

$$\sum_n \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 |\langle y, e_n\rangle|^2 < +\infty.$$

Ahora bien, como $\sum |\langle y, e_n\rangle|^2 < +\infty$, basta ver que $\left(\left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2\right)$ está acotada pero esto es consecuencia de que $\lambda_n \to 0$.

- Observar ahora, que para el x dado por (***) se tiene que.

$$(\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T)\left(\frac{1}{\lambda}\left[y + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n\right]\right) = \quad \text{, si}$$

$$= y + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n - \frac{1}{\lambda}\sum \lambda_n \langle y, e_n\rangle e_n - \frac{1}{\lambda}\sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle Te_n =$$

$$= y + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n - \sum \frac{\lambda_n}{\lambda}\langle y, e_n\rangle e_n - \sum \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda - \lambda_n)}\langle y, e_n\rangle e_n =$$

$$= y + \sum \left(\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} - \frac{\lambda_n}{\lambda} - \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda - \lambda_n)}\right)\langle y, e_n\rangle e_n =$$

$$= y + \sum \Big(\underbrace{\frac{\lambda \cdot \lambda_n - \lambda_n(\lambda - \lambda_n) - \lambda_n^2}{(\lambda - \lambda_n)\lambda}}_{=\,0}\Big)\langle y, e_n\rangle e_n = y.$$

El otro caso, cuando $\lambda = \lambda_m$. Si la ecuación $(\lambda I - T)x = y$ tiene solución $\rightsquigarrow$, $y \in \mathrm{Im}(\lambda I - T) \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda I - T)^{\perp}$. Recíprocamente, es una comprobación elemental que el vector

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(y + \sum_{\lambda_n \neq \lambda_m} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n + z\right)$$

es solución. #

Lema.— (i) Para cada par de números reales x_a, x_a' el problema de valores iniciales.

$$\begin{cases} -x'' + qx = 0 \\ x(a) = x_a \\ x'(a) = x_a' \end{cases}$$

tiene solución única. Además si $(x_a, x_a') \in \mathbb{R}$ recorre la recta de ecuación $\alpha x_a + \alpha_1 x_a' = 0$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$ las correspondientes soluciones recorren un subespacio vectorial de $C^2([a,b])$ de dimensión 1.

ejercicio

(ii) Existen soluciones reales no idénticamente nulas de los problemas

$$(P_a) = \begin{cases} -x'' + qx = 0 \\ B_a(x) = 0 \end{cases} \qquad (P_b) = \begin{cases} -x'' + qx = 0 \\ B_b(x) = 0 \end{cases}$$

que denotaremos por u_a y u_b.

(iii) Si u_a, u_b son como en el apartado anterior, entonces

$$W(u_a, u_b)(t) = \begin{vmatrix} u_a(t) & u_b(t) \\ u_a'(t) & u_b'(t) \end{vmatrix}$$

es constante en $[a,b]$. Si S es inyectivo en D_S, entonces $W(u_a, u_b)(t) \neq 0$ y en consecuencia u_a y u_b son L.I.

Definición.— Sea S el operador de Sturm-Liouville asociado al problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -x''(t) + q(t)x(t) - \mu x(t) = y(t) \\ B_a(x) = 0 = B_b(x) \end{cases}$$

Si S es inyectivo y u_a, u_b son funciones como en el lema anterior entonces se llama función de Green asociada a S a la función definida mediante la fórmula

$$k(t,s) := \begin{cases} -\dfrac{u_a(t) \cdot u_b(s)}{W(u_a, u_b)(a)} & a \leq t \leq s \leq b \\ -\dfrac{u_a(s)\, u_a(t)}{W(u_a, u_b)(a)} & a \leq s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Observaciones; se puede demostrar:

(a) k no depende u_a, u_b;

(b) k es continua y simétrica. ($k(s,t) = \overline{k(t,s)}$).

Con la función k anterior podemos definir el operador de Green asociado que es:

<u>Definición.</u>- Sea S el operador de Storm-Liouville que suponemos que es inyectivo. y k la función asociada. Se llama operador de Green asociado al operador:

$$G: L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$$
$$f \rightsquigarrow G(f)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds.$$

<u>EJERCICIO.</u>- G satisface:

(i) $\langle Gf, g\rangle = \langle f, Gg\rangle \quad \forall f, g \in L^2([a,b])$

(ii) $\{G(f) : \|f\|_2 \leq 1\} \subseteq L^2([a,b])$ es un conjunto relativamente compacto. (G es un operador compacto).

<u>PROPOSICION.</u>- Sea S el operador de Sturm-Liouville que suponemos que es inyectivo. Si $G: L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$ es el operador de Green asociado entonces:

(i) $G(C([a,b])) = D_S$.

(ii) $G \circ S = I_{D_S} \quad S \circ G|_{C([a,b])}$

(iii) $Sx - \mu x = y$ sii $x - Gx = Gy \qquad x \in D_S,\ y \in C([a,b])$.

<u>Lema.</u>- Supongamos que el operador de Sturm-Liouville S es inyectivo y consideremos el operador de Green $G: L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$. Entonces

(i) G es un operador compacto autoadjunto;

(ii) Existe un sistema de autovalores/autovectores (u_n) $(\lambda_n) \to 0$, $\lambda_n \neq 0$, en $L^2([a,b])$ que permite escribir
$$G(f) = \sum_n \lambda_n \langle f, u_n\rangle u_n.$$

(iii) $u_k \in C([a,b], \mathbb{C})$ para cada $k \in \mathbb{N}$

(iv) de hecho $u_k \in D_S$; (v) El conjunto de valores propios $(\lambda_n)_n$ es infinito

Demostración.- (i) es consecuencia del ejercicio anterior y (ii) es consecuencia del teorema espectral

(iii) Si u_k corresponde al autovalor $\lambda_k \neq 0$. Entonces $G(u_k) = \lambda_k u_k$.

$$u_k(t) = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b k(t,s)\, u_k(s)\, ds = \frac{1}{\lambda_k}\langle k_t, \overline{u}_k\rangle$$

$t_n \to t_0 \rightsquigarrow k_{t_n} \to k_t$ en $\|\cdot\|_\infty$ en $C([a,b]) \rightsquigarrow k_{t_n} \to k_{t_0}$ en $\|\cdot\|_2 \rightsquigarrow$
$\langle k_{t_n}, \overline{u}_k\rangle \longrightarrow \langle k_{t_0}, \overline{u}_k\rangle$ i.e. $u_k(t_n) \to u_k(t) \quad \forall t \in [a,b]$

y por lo tanto u_k es una función continua.

(iv) como $u_k \in C([a,b])$ $\quad u_k = \frac{1}{\lambda_k} G(u_k) \in D_S$ $\quad$ #

(v) $G(f) = \sum \lambda_n \langle f, u_n\rangle u_n = \sum \langle f, \lambda_n u_n\rangle u_n = \sum \langle f, Gu_n\rangle u_n = \sum \langle Gf, u_n\rangle u_n$

$\leadsto S \subset \operatorname{span}(u_n)^{-} \subset L^2([a,b]) \leadsto D_S \subset \operatorname{span}(u_n)^{-\|\cdot\|} \subset L^2([a,b])$, para $D_S = L^2$ (*).

Teorema.- Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\left.\begin{array}{ll} -x'' + qx - \mu x = y & \\ B_a(x) = \alpha \cdot x(a) + \alpha_1 x'(a) = 0 & |\alpha| + |\alpha_1| \neq 0 \\ B_b(x) = \beta \cdot x(b) + \beta_1 x'(b) = 0 & |\beta| + |\beta_1| \neq 0 \end{array}\right\}$$

y consideremos el operador de Sturm-Liouville S y su dominio D_S. Entonces existe una sucesión de escalares

$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$ y funciones $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ de $L^2([a,b])$.

tales que:

(a) cada $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\mu_n \neq \mu_m$ si $n \neq m$ y se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu_n}\right]^2 < +\infty$;

(b) cada $u_n \in D_S$, toma valores reales cumpliendose

$$S(u_n) = \mu_n \cdot u_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Además $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana de $L^2([a,b])$.

(c) Para cada $u \in D_S$ se tiene:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, u_n \rangle u_n(t)$$

con convergencia en $L^2([a,b])$ (de hecho absoluta y uniforme).

(d) Si $\mu \neq \mu_n$ para todo n, dad $y \in C([a,b], \mathbb{C})$ el problema de Sturm-Liouville tiene una solución única definida por:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n - \mu} \left(\int_a^b y(t) u_n(t)\, dt \right) \cdot u_n$$

Si $\mu = \mu_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el problema de Sturm-Liouville tiene solución si $y \in C([a,b], \mathbb{C})$ cumple que $\int_a^b y(t) \cdot u_m(t)\, dt = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$, siendo la solución general en este caso

$$x = \alpha \cdot u_m + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n - \mu)} \left(\int y(t) u_n(t)\, dt \right) u_n \quad \alpha \in \mathbb{C} \text{ arbitrario.}$$

(convergencias absoluta y unif.)

__Demostración.-__ Sea S el operador de Sturm-Liouville con dominio

$$D_S := \{ x \in C^2([a,b]) : B_a(x) = 0 = B_b(x) \}.$$

Supongamos que S es inyectivo, y consideremos el operador de Green asociado $G : C([a,b]) \longrightarrow D_S$ y sean $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ autovectores y autovalores asociados, i.e.,

$$G(u_n) = \lambda_n u_n \qquad \lambda_n \neq 0.$$

$$\curvearrowright \quad u_n = \lambda_n S u_n \leadsto \boxed{S u_n = \frac{1}{\lambda_n} u_n}$$

(*) __Ejercicio.-__ Sean $b_0, b_1, \ldots$ $c_0, c_1, \ldots$ sucesiones en $\mathbb{K}$ y $[a,b]$ un intervalo fijo. Probar que el conjunto de funciones $f \in C^{\infty}([a,b])$ t.q. $f^{(m)}(a) = b_m$, $f^{(m)}(b) = c_m$ $m = 0, 1, 2, \ldots$ es denso en $L^2([a,b])$

Es facil ver que $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $\left[\lambda_n < Gu_n, u_n> = <u_n, Gu_n> = \underset{\lambda_n}{<Gu_n, u_n>}\right]$.

Llamando μ_n a los $\frac{1}{\lambda_n}$ tenemos que:

$$Su_n = \mu_n \cdot u_n.$$

Se puede demostrar que:

✓ u_n se pueden tomar con valores reales;

✓ $\dim(\ker(S-\mu_n I)) = 1 \rightsquigarrow$ así los valores propios son distintos;

✓ sabemos $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ base ortonormal de $L^2([a,b])$.

✓ El operador G es lo que se llama un operador Hilbert-Schmidth y estos satisfacen para sus valores propios que $\left[\sum_n{}' \left[\frac{1}{\mu_n}\right]^2 < +\infty\right]$. (*)

(c) es consecuencia de que $(u_n)_n$ es base Hilbertiana de $L^2([a,b])$.

(d) $\mu \neq \mu_n$ dada $y \in C([a,b])$ una solución

$$Sx - \mu x = y \quad x \in D_S \iff x - \mu Gx = Gy \iff (*)$$

$\mu = 0 \overset{(*)}{\rightsquigarrow} x = Gy = \sum{}' \lambda_n <y, u_n> u_n = \sum{}' \frac{1}{\mu_n} <y, u_n> u_n$.

$\mu \neq 0 \overset{(*)}{\rightsquigarrow} 1/\mu\, x - Gx = 1/\mu\, Gy \rightsquigarrow 1/\mu \neq 1/\mu_n = \lambda_n \to$ valor asociado a G

por la alternativa de Fredholm tal x existe y viene dado por la fórmula

$$x = \mu\, 1/\mu\, Gy + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{1/\mu - \lambda_n} <1/\mu\, Gy, u_n> u_n =$$

$$= Gy + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{1-\mu\lambda_n} <Gy, u_n> u_n = Gy + \mu \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\mu_n}}{1 - \mu\frac{1}{\mu_n}} <Gy, u_n> u_n =$$

$$= Gy + \mu \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n - \mu} <Gy, u_n> u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n <y, u_n> u_n +$$

$$\mu \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n - \mu} <\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m <y, u_m> u_m, u_n> = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n \cdot \mu}{\mu_n - \mu}\right) <y, u_n> u_n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}{}' \frac{1}{\mu_n}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_n - \mu}\right) <y, u_n> u_n = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}{}' \frac{1}{\mu_n - \mu} <y, u_n> u_n}$$

#

---

* EJERCICIO.- Si $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ es un núcleo simétrico y K es el operador asociado y $(e_n)_n$ una base Hilbertiana de $L^2([a,b])$ formada por vectores propios, valores propios λ_n entonces $\sum_n \lambda_n^2 = \int_a^b \int_a^b (k(t,s))^2\, dt\, ds < +\infty$.

El caso en el que $\mu=\mu_m$ se razona de forma similar utilizando la alternativa de Fredholm.

En el caso en el que S no es inyectivo; como S tiene a lo sumo una cantidad numerable de valores propios (ver ejercicio (*) debajo y tener en cuenta que si $\lambda\neq\mu$ $\langle Su,v\rangle=\langle u,Sv\rangle \leadsto Ker(S-\mu I)\perp Ker(S-\lambda I)$) existe un c que no es valor propio para S; entonces si S está asociado a la función q el operador de Sturm S_1 asociado a $q-c$ es inyectivo:

$$S_1 x = -x'' + (q-c)x = (S-cI)(x) = 0 \leadsto x=0.$$

$$Sx - cx = 0 \quad c \text{ no es valor propio}$$

Es claro que los valores propios de S se obtienen sumando c a los de S_1 ($\lambda u = S_1 u = Su - cu \leadsto Su=(\lambda+c)u$) y que los vectores propios son los mismos; así se reduce el caso no inyectivo al inyectivo #

Ejercicio.- Resolver el problema de Sturm-Liouville en $[0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l} -x''-\mu x = y \\ x(0)=0=x(1) \end{array}\right\}$$

Resolución:= $Sx=-x''$. $\quad D_S=\{x\in C^2([a,b]) : x(0)=0=x(1)\}$

↳ Buscamos los autovalores μ_n y autovectores $u_n\in D_S$ que satisfacen:

$$-u_n'' = Su_n = \mu_n \cdot u_n$$

Esto es lo mismo que encontrar los valores $\mu\neq 0$ tales que.

$$\left.\begin{array}{l} -x''-\mu x = 0 \\ x(0)=0=x(1) \end{array}\right\} \iff \mu=(n\pi)^2 \text{ con vector propio asociado. } u_n(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, n\pi t$$

Ejercicio.- Si $S: H \longrightarrow H$ es un operador $\lambda\neq\mu$ valor propios $x_\lambda \perp x_\mu$

↪ si H es separable entonces $\#\{\lambda : \lambda \text{ valor propio}\}\leq \aleph_0$.

Por lo tanto se tiene que la ecuación

$$-x'' - \mu x = \mu \qquad x(0) = 0 = x(1)$$

• si $\mu \neq n^2\pi^2$ para $n = 1, 2, \dots$

$$x(t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - \mu} \left(\int_0^1 (y(s) \cdot \operatorname{sen} n\pi s)\, ds \right) \cdot \operatorname{sen} n\pi t$$

• si $\mu = m^2\pi^2$ para algún $m = 1, 2, \dots$ el sistema de Sturm tiene solución sii $\int_0^1 y(s) \cdot \operatorname{sen} m s \, ds = 0$ y la solución viene dada por

$$x(t) = \lambda \cdot \operatorname{sen} m\pi t + 2 \sum_{n \neq m} \frac{1}{\pi^2(n^2 - m^2)} \left(\int_0^1 (y(s) \operatorname{sen} n\pi s)\, ds \right) \operatorname{sen} n\pi t.$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es arbitrario #

$\boxed{\text{Sobre la ecuación homogenea:}}$

$$\left.\begin{array}{l} -x'' - \mu x = 0 \\ x(0) = 0 = x(1) \end{array}\right\}$$

La resolvemos utilizando el "Teorema" de la página siguiente. El polinomio característico es:

$$-t^2 - \mu = 0 \rightsquigarrow t = \pm\sqrt{-\mu}. \qquad (\text{buscamos } \mu \text{ reales})$$

$\rightsquigarrow$ $\mu < 0$ las soluciones son de la forma $x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$ con $\lambda = \pm\sqrt{-\mu}$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0$$
$$x(1) = C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda} = 0 \rightsquigarrow C_1 (e^{\lambda} - e^{-\lambda}) = 0 \rightsquigarrow C_1 = 0$$

$\rightsquigarrow$ la solucion es nula;

$\rightsquigarrow$ $\mu = 0$ $\rightsquigarrow$ la solución es de la forma

$$x(t) = C_1 + C_2 \cdot t$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \rightsquigarrow C_1 = 0 \\ x(1) = 0 \rightsquigarrow C_2 = 0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \text{la única solución es la solucion } x \equiv 0;$$

$\rightsquigarrow$ $\mu > 0$ entonces las soluciones son: de la forma

$$x(t) = \cancel{e^{0t}}^{=1} \cdot (C_1 \cos\sqrt{\mu}\, t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\mu}\, t);$$

$\lambda = \pm\sqrt{-\mu} = \pm\sqrt{\mu} \cdot i$

$$0 = x(0) = C_1 = 0$$
$$0 = x(1) = C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\mu} \rightsquigarrow \sqrt{\mu} = n\pi \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow \mu = (n\pi)^2$ con $n = 1, 2, \dots$ #

2011

We find that

$$s'(t) = (-C_1 + C_2)e^{-t} - C_2te^{-t}.$$

From the initial conditions in (5) we get, setting $t = 0$ in the last two formulas

$$C_1 = 1,$$

$$-C_1 + C_2 = 2.$$

Hence $C_2 = 3$ and the solution to (5) is

$$s(t) = e^{-t} + 3te^{-t}.$$

The reader may verify that this actually is a solution to (5)!

The final case to consider is that when λ_1, λ_2 are nonreal complex conjugate numbers. Suppose $\lambda_1 = u + iv$, $\lambda_2 = u - iv$. Then we get a solution (as in Chapter 3):

$$y_1(t) = e^{ut}(K_1 \cos vt - K_2 \sin vt),$$

$$y_2(t) = e^{ut}(K_1 \sin vt + K_2 \cos vt).$$

Thus we obtain $s(t)$ as a linear combination of $y_1(t)$ and $y_2(t)$, so that finally,

$$s(t) = e^{ut}(C_1 \cos vt + C_2 \sin vt)$$

for sóme constants C_1, C_2.

A special case of the last equation is the "harmonic oscillator":

$$s'' + b^2 s = 0;$$

the eigenvalues are $\pm ib$, and the general solution is

$$C_1 \cos bt + C_2 \sin bt.$$

We summarize what we have found.

Theorem *Let λ_1, λ_2 be the roots of the polynomial $\lambda^2 + a\lambda + b$. Then every solution of the differential equation*

(1) $$s'' + as' + bs = 0$$

is of the following type:

Case (a). λ_1, λ_2 *are real distinct:* $s(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$;
Case (b). $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *is real:* $s(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$;
Case (c). $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = u + iv$, $v \neq 0$: $s(t) = e^{ut}(C_1 \cos vt + C_2 \sin vt)$.

In each case C_1, C_2 are (real) constants determined by initial conditions of the form

$$s(t_0) = \alpha, \qquad s'(t_0) = \beta.$$

The nth order linear equation (3) can also be solved by changing it to an equivalent first order system. First order systems that come from nth order equations

SUMABILIDAD CÉSARO DE LAS SERIES DE FOURIER

Las sumas parciales de la serie de Fourier de una función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{K}$ son

$$S_N(f)(x)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}=\sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-N}^{N}e^{in(x-t)}\right)f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x-t)f(t)\,dt. \quad (*)$$

Donde hemos escrito

$$D_N(y)=\sum_{n=-N}^{N}e^{iny} \qquad N\in\mathbb{N}.$$

NOTACIÓN.- Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ son funciones integrables, se denota por

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\,g(x-t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

y A la función $f*g$ se le llama convolución de f y g. #

Con esta terminología, lo que tenemos escrito en $(*)$ es que

$$S_N(f)(x)=\frac{1}{2\pi}f*D_N(x)$$

¿Para que sirve la convolución de funciones?

1. para regularizar funciones;
2. para aproximar funciones vía convoluciones con núcleos.

DEFINICIÓN.-(NUCLEOS DE SUMABILIDAD).- Si denotamos por $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$ las funciones definidas en $\mathbb{T}$ corresponden a las funciones 2π-periódicas en $\mathbb{R}$. Así cuando damos una función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{K}$ que es 2π-periódica, la podemos extender por periodicidad a toda la recta, y mirada allí podemos tambien mirarla como una función en $\mathbb{T}$. Dicho esto para nosotros será sinónimo decir f es definida en $\mathbb{T}$ o f es definida en $\mathbb{R}$ y es 2π-periódica.

"Un núcleo de sumabilidad, es una sucesión $\{K_n\}$ de funciones en $\mathbb{T}$ con valores reales que cumple:

(a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,dx=1$ (b) $\exists M>0$ t.q. para todo $n\geq 1$ $\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,dx\leq M$.

(c) Para cada $\delta>0$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}|K_n(x)|\,dx=0$.

Nota:

- Obsérvese que si $K_N(x) \geq 0$ para todo $x \in [-\pi,\pi]$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (b) se sigue de (a).
- La parte (c) nos dice que $K_n(x) \longrightarrow \delta_0$ cuando $n \to +\infty$.

Ejercicio.- Sea $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$, $N \in \mathbb{N}$. Utilizando la igualdad

$$D_N(x) = \frac{\operatorname{sen}(N+1/2)x}{\operatorname{sen} x/2}$$

demostrar que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \geq \frac{\pi}{\pi^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ [*]

y que en consecuencia $\{D_N\}_N$ falla la propiedad (b) para ser un núcleo de sumabilidad.

Resolución.- $D_N(x) = w^{-N} + w^{-N+1} + \dots + w^{-1} + 1 + w + \dots + w^N \overset{[*]}{=}$ $w = e^{ix}$

$$1 + w + \dots + w^N = \frac{w^N \cdot w - 1}{w - 1} = \frac{w^{N+1} - 1}{w-1}$$

$$w^{-1} + w^{-2} + \dots + w^{-N} = \frac{w^{-N} \cdot w^{-1} - w^{-1}}{w^{-1} - 1} = \frac{w^{-N} - 1}{1 - w} = \frac{1 - w^{-N}}{w - 1}$$

$$[*] = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{(e^{i(N+1/2)x} - e^{-i(N+1/2)x})/2i}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})/2i} = \frac{\operatorname{sen}(N+1/2)x}{\operatorname{sen} x/2} \#$$

Como se ha comentado para funciones incluso continuas, su serie de Fourier puede ser divergente puntualmente. Y la razón hay que encontrarla en [*].

Para evitar esta patología vamos a considerar las medias de Césaro de la serie de Fourier que las definimos como:

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0 f(x) + S_1 f(x) + \dots + S_{N-1}(f)(x)}{N} \quad (*) \quad \#$$

y probaremos:

TEOREMA.- Si f es una función continua en $\mathbb{T}$ entonces $\sigma_N(f)(x) \longrightarrow f(x)$ uniformemente en $x \in [a,b]$.

La demostración de este teorema la vamos a hacer demostrando que [*] se puede escribir como la convolución de f con un núcleo de sumabilidad, $\sigma_N(f) = \frac{1}{2\pi} f * F_N$, y demostrando que

$$\frac{1}{2\pi} f * F_N \longrightarrow f \quad \text{uniformemente,}$$

gracias a las propiedades del núcleo.

Veamos primero que σ_N se expresa como la convolución de f con otra función. Para ello es suficiente recordar, que si $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi} f * D_n$$

Así,

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\left[S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_{N-1}(f)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\left[f * D_0 + f * D_1 + \dots + f * D_{N-1}\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N} f * \left[D_0 + D_1 + \dots + D_{N-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} f * \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right] = \frac{1}{2\pi} f * F_N$$

Donde hemos definido $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$

DEFINICION.- A la sucesión de funciones $\{F_N\}_{N=1}^{+\infty}$ se le llama núcleo de Fejér.

Lema.- Para $F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$ se tiene:

(a) $F_N(x) = \frac{1}{N}\,\frac{\operatorname{sen}^2(Nx/2)}{\operatorname{sen}^2(x/2)}$.

(b) $(F_N)_{N=1}^{+\infty}$ es un núcleo de sumabilidad.

Demostración.-

(a) $$N F_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \overset{w=e^{ix}}{=} \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-n}^{n} w^k\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{w^n \cdot w - w^{-n}}{w-1} =$$

$$= \frac{1}{w-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} w^{n+1} - \sum_{n=0}^{N-1} w^{-n}\right] = \frac{1}{w-1}\left[\frac{w^N \cdot w - w}{w-1} - \frac{w^{-N+1}\cdot w^{-1} - 1}{w^{-1}-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{w-1}\left[\frac{w^{N+1} - w}{w-1} - \frac{w^{-N+1} - w}{1-w}\right] = \frac{1}{(w-1)^2}\left[w^{N+1} - w + w^{-N+1} - w\right] =$$

$$= \frac{1}{(w-1)^2}\left[w^{N+1} - 2w + w^{-N+1}\right] = \frac{e^{i(N+1)x} - 2e^{ix} + e^{i(-N+1)x}}{(e^{ix}-1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{ix}}\left[e^{iNx} - 2 + e^{-iNx}\right]}{\cancel{e^{ix}}\left(e^{ix/2} - e^{ix/2}\right)^2} = \frac{\left(e^{iN/2x} - e^{-iN/2x}\right)^2}{\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{Nx}{2}}{\operatorname{sen}^2 x/2}.$$

(b) Para ver que es un núcleo de sumabilidad probamos:

1.- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)\right)dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx}_{= 2\pi} = 1.$

2.- Como $F_N(x)\geq 0$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}|F_N(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = 2\pi,$

y por lo tanto $\quad \sup_N \int_{-\pi}^{\pi}|F_N(x)|\,dx < +\infty.$

3.- $0 \leq \lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}|F_N(x)|\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}\frac{1}{N}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{Nx}{2}}{\operatorname{sen}^2 x/2}\,dx \leq$

$\leq \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\delta/2} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N\cdot\operatorname{sen}^2\delta/2}2\pi = 0$ #

Teorema.- Sea $\{K_n\}_{n=1}^{+\infty}$ un núcleo de sumabilidad y sea f en $\mathbb{T}$ una función integrable y acotada. Si,

(a) f es continua en x_0, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}f*K_n(x_0)=f(x_0)$.

(b) si f es es continua en $\mathbb{T}$, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}f*K_n(x)=f(x)$ uniformemente para $x\in[a,b]$.

Demostración.- Si f es continua en x_0, existe $\epsilon>0$ tal que

$$|f(x_0-y)-f(x_0)|<\epsilon \text{ si } |y|<\delta$$

$$\frac{1}{2\pi}f*K_n(x_0)-f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(x_0-t)\,dt - f(x_0) \underset{\substack{t=x_0-y\\ dt=-dy}}{\overset{x_0-t=y}{=}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_0+\pi}^{x_0-\pi} f(x_0-y)\,K_n(y)(-dy) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x_0-y)K_n(y)\,dy - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x_0-y)-f(x_0)\right)K_n(y)\,dy$$

$$\rightsquigarrow \left|\frac{1}{2\pi}f*K_n(x_0)-f(x_0)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x_0-y)-f(x_0)|\,|K_n(y)|\,dy \leq$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\leq\delta}|f(x_0-y)-f(x_0)||K_n(y)|\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|f(x_0-y)-f(x_0)|\,|K_n(y)|\,dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\epsilon\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy + \frac{1}{2\pi}2B\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,dy \leq \frac{1}{2\pi}\epsilon\cdot 2\pi\cdot M + \frac{2B}{2\pi}\epsilon$$

si $n\geq n_0$ utilizando

la propiedad (a) de los nucleos de convolución, donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\,dy \leq M \quad \forall n \qquad y \qquad B \geq \sup_{y \in \mathbb{T}} |f(y)|.$$

La convergencia uniforme cuando f es continua, se razona utilizando la continuidad uniforme de f en $\mathbb{T}$ en la prueba anterior. #

COROLARIO.- Sea f integrable en $\mathbb{T}$ y acotada.

(1) Si f es continua en $x_0 \in [-\pi,\pi]$, entonces

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N f(x_0) = f(x_0)$$

(2) Si f es continua en $[-\pi,\pi]$, entonces

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x) = f(x) \quad \text{uniformemente en } x \in [-\pi,\pi]$$

Demostración.- Basta utilizar que $\{F_N\}_{N=1}^{+\infty}$ es un nucleo de sumabilidad y el teorema anterior, teniendo en cuenta que $\sigma_N(f) = \frac{1}{2\pi} f * F_N$. #

COROLARIO.- (Teorema de Weierstrass).- Los polinomios trigonométricos

$$\left\{ \sum_{|k|\leq N} a_k e^{itk} : N=0,1,2,\dots, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

son densos en $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, es decir en el espacio de las funciones continuas 2π-periódicas $(C^{per}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$.

Demostración.- Después del corolario anterior para $f \in C^{per}([-\pi,\pi])$ tenemos que

$$\sigma_N(f)(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{uniformemente en } x \in [-\pi,\pi].$$

Observar que $\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x)$ y que $S_n(f)(x) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k) e^{ikt}$ #

Ejercicio.- Probar que para $1 \leq p < +\infty$, los polinomios trigonométricos en $[-\pi,\pi]$ son densos en $(L^p([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_p)$

Sugerencia.- Concentrarse en el caso $L^1([-\pi,\pi])$ a $L^2([-\pi,\pi])$. Utilizar que $C^{per}([-\pi,\pi])$ es denso en $(L^p([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_p)$ y que polinomios trigonométricos son densos en $(C^{per}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$. #

El ejercicio anterior puede obtenerse como caso particular del ejercicio siguiente que aunque sólo lo proponemos para $L^1([-\pi,\pi])$, vale para los espacios $L^p([-\pi,\pi])$ en general.

Ejercicio.- Si $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad, pruébese que

$$\frac{1}{2\pi} f * K_n \longrightarrow f \text{ en } (L^1([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_1)$$

para cada función $f \in L^1([-\pi,\pi])$.

COROLARIO.- La aplicación $\wedge : L^1([-\pi,\pi]) \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ dada por $\hat{f} := (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ es lineal e inyectiva.

Demostración.- La aplicación es claramente lineal. Por otro lado para que que es inyectivo, es suficiente probar que.

$$\hat{f}(n)=0 \ \forall n\in\mathbb{Z} \rightsquigarrow f\equiv 0 \text{ en } L^1([-\pi,\pi]).$$

Ahora bien; por el ejercicio anterior tomando los núcleos de Fejér $\{F_N\}_{N=1}^{+\infty}$ obtenemos que

$$\underset{0}{\overset{}{\sigma_N(f)}} = \frac{1}{2\pi} f * F_n \longrightarrow f \text{ en } \|\cdot\|_1$$

$\rightsquigarrow \|f\|_1=0$ y por lo tanto f es 0 en $L^1([-\pi,\pi])$, i.e, $f=0$ p.c.t. #

Observemos que la aplicación anterior $\wedge : L^1([-\pi,\pi]) \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, $f \rightsquigarrow (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, la sucesión $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ es acotada. Efectivamente,

$$|\hat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1. \quad (*)$$

Se puede decir algo mejor:

Lema de Riemann-Lebesgue.- Si $f\in L^1([-\pi,\pi])$, entonces se cumple que $\lim_{|n|\to+\infty} |\hat{f}(n)|=0$.

Demostración.- Observar que $\ell^\infty(\mathbb{Z}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < +\infty\}$

es un espacio normado con $\|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

El corolario anterior y la desigualdad $(*)$ nos dicen que.

$$\wedge : (L^1([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$$
$$f \rightsquigarrow (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

es lineal y continua. Observar que si

$$c_0(\mathbb{Z}) := \{(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : \lim_{|n|\to\infty} x_n = 0\}$$

es un subespacio cerrado de $(\ell^{\infty}(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\infty})$. Ahora si

P es un polinomio trigonométrico $\hat{P} \in c_0(\mathbb{Z})$.

Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$, existe una sucesión de polinomios trigonométricos

$$P_m \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \rightsquigarrow \|\hat{P}_m - \hat{f}\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

Como $\hat{P}_m \in c_0(\mathbb{Z})$ se sigue que $\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$ y queda demostrado el lema de Riemann-Lebesgue. #

Lema.- Sea $k=1,2,3,\dots$ y $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{K}$ una función 2π-periódica de clase C^k. Se tiene que

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \cdot \hat{f}(n).$$

Demostración.-
$k=1$, $n=0$; $\quad \hat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi} = 0 = (i0)^1 \hat{f}(0)$

$k=1$, $n \neq 0$ $\quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \quad \frac{u=f(x) \quad du = f'(x)\,dx}{dv = e^{-inx}dx \quad v = \frac{e^{-inx}}{-in}}$

$$= \underbrace{f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx}\,dx \rightsquigarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{in}\cdot \hat{f'}(n)$$

El caso general se demuestra por inducción. #

COROLARIO.- Sea $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{K}$ una función 2π-periódica. Entonces:

(i) Si f es continua y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$, se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_{\infty} = 0.$$

(ii) Si f es de clase C^2, entonces $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_{\infty} = 0$.

Demostración.- (i) Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty \rightsquigarrow$ la serie funcional $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ converge uniformemente (M-test de Weierstrass) a una función continua 2π-periódica que llamaremos g. En otras palabras:

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} = \lim_{N\to\infty} S_N f(x) \quad \text{unif. en } x \in [-\pi,\pi].$$

Lo único que hay que demostrar es que $g = f$, pero esto se sigue del hecho de que ambas tienen los mismos coeficientes de Fourier y la inyectividad de

$$\hat{}: L^1([-\pi,\pi]) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

(2) Si $f \in C^2([-\pi,\pi])$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^2}\hat{f}^{(2)}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\rightsquigarrow$ $\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ se tiene que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{n^2}|\hat{f}^2(n)| \leq \frac{1}{n^2}\underbrace{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}^2(n)|}_{\substack{M \\ \wedge \\ +\infty}} = M \cdot 1/n^2$$

$\rightsquigarrow$ $\sum |\hat{f}(n)| < +\infty$, y este apartado se sigue del anterior. #

#

Para terminar estas notas sobre series de Fourier analizamos brevemente la convergencia puntual de la serie de Fourier.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PUNTUAL

Teorema (Criterio de Dini).- Sea $f \in L^1(\text{[}-\pi,\pi\text{]})$ y $x_0 \in [-\pi,\pi]$. Si existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{|t|\leq\delta} \left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}\right| dt < +\infty.$$

Entonces se cumple que $\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = f(x_0)$.

Demostración.- Como $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$ y $\frac{1}{2\pi} f * D_N(x) = S_N f(x)$.

Es fácil comprobar que al igual que hicimos con los núcleos,

$$S_N(f)(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0-y)-f(x_0))\,D_N(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} = A_N f(x_0) + B_N f(x_0).$$

Vemos que ambas, $A_N f(x_0) \longrightarrow 0 \wedge B_N f(x_0) \longrightarrow 0$ cuando $N \to +\infty$.

Efectivamente,

$$B_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]\cdot\frac{\operatorname{sen}(N+1/2)t}{\operatorname{sen} t/2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}[f(x_0-t)-f(x_0)]\,\frac{e^{i(N+1/2)t}-e^{-i(N+1/2)t}}{2i\operatorname{sen} t/2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_+(t)\cdot e^{iNt}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_-(t)\,e^{-iNt}\,dt = (*)$$

donde las funciones $B_{\pm}(t)$ vienen definidas por:

$$B_+(t) = [f(x_0+t) - f(x_0)] \cdot \frac{e^{it/2}}{2i\,\mathrm{sen}\,t/2} \cdot \chi_{\{y:\ \delta \le |y| \le \pi\}}(t).$$

$$B_-(t) := [f(x_0-t) - f(x_0)]\ \frac{e^{-it/2}}{2i\,\mathrm{sen}\,t/2}\ \chi_{\{y:\ \delta \le |y| \le \pi\}}(t)$$

Como $B_+, B_- \in L^1([-\pi,\pi])$ se tiene que:

$$[*] = \hat{B}_1(-N) - \hat{B}_2(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$ gracias al Lema de Riemman-Lebesgue.

Para $A_N(f)(x_0)$ se comprueba de forma similar que:

$$A_N(f)(x_0) = \hat{A}_+(-N) - \hat{A}_-(N)$$

donde
$$A_+(t) = [f(x_0-t) - f(x_0)]\ \frac{e^{it/2}}{2i\,\mathrm{sen}\,t/2}\ \chi_{\{y:\ 0 \le |y| \le \delta\}}(t)$$

$$A_-(t) = [f(x_0-t) - f(x_0)]\ \frac{e^{-it/2}}{2i\,\mathrm{sen}\,t/2}\ \chi_{\{y:\ 0 \le |y| \le \delta\}}(t)$$

Que $A_N(f)(x_0) \to 0$ se seguirá de nuevo del lema de Riemann-Lebesgue, si vemos que $A_+, A_- \in L^1([-\pi,\pi])$. Observamos que ambas son medibles y por otro lado.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A_\pm(t)|\,dt = \int_{0\le|t|\le\delta} \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{|2\,\mathrm{sen}\,t/2|}\,dt \le \int_{0\le|t|\le\pi} \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{|2\cdot t/2|}\,dt < +\infty \quad \#$$

COROLARIO.- Sea $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{K}$ 2π-periódica. Se tiene que

(1) Si f es de clase C^1 en un entorno de $x_0 \in [-\pi,\pi]$, entonces $S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x_0)$.
En particular, si $f \in C^1([-\pi,\pi])$, entonces $S_N(f)(x) \to f(x)$ para todo $x \in [-\pi,\pi]$.

(2) Si f es Lipchitziana en un entorno de $x_0 \in [-\pi,\pi]$, i.e., $|f(x_0-t) - f(x_0)| \le C|t|$, $|t| \le \delta$. Entonces hay convergencia puntual en x_0. En particular si f es Lipchitziana en $[-\pi,\pi]$, entonces $S_N(f)(x) \to f(x)$ para $x \in [-\pi,\pi]$.

Demostración.- Claramente es suficiente probar (2). Observar que f Lipchitziana en x_0 equivale a $\left|\frac{f(x_0-t) - f(x_0)}{t}\right| \le C$ si $|t| \le \delta$ $\rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \int_{0\le|t|\le\delta} \left|\frac{f(x_0-t) - f(x_0)}{t}\right| dt \le 2C\delta < +\infty. \quad \#$$

#

Para terminar, analizamos el comportamiento de la serie de Fourier en un punto de discontinuidad.

La cuestión es, si $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow \mathbb{K}$ no es de clase C^1, sino de clase C^1 a trozos, ¿que ocurre en los saltos? La respuesta la tenemos en el siguiente:

TEOREMA (Criterio de Dirichlet).- Si $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{K}$ es de clase C^1 a trozos Para todo $x\in[-\pi,\pi]$. se tiene.

$$\lim_{N\to+\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x^+)-f(x^-)].$$

Demostración.- Como sabemos $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$ y tambien $D_N(-x)=D_N(x)$ por lo tanto.

se tiene que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(x)dx = \frac{1}{2}$ [*] Recordamos que

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} f * D_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_N(t)\,dt +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt.$$

Por otro lado [*] nos dice que $\frac{1}{2}f(x^+) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x^+)D_N(t)dt$ $\quad \frac{1}{2}f(x^-) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x^-)D_N(t)\,dt$

Combinando lo anterior, se tiene que:

$$S_N f(x) - \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x-t)-f(x^+)]D_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x-t)+f(x^-)]D_N(t)dt = (*)$$

Sin perdida de generalidad estamos suponiendo f es C^1 en todos sitios menos en el punto $x\in(-\pi,\pi)$ que hemos fijado. Observemos que $(*)$ puede escribirse como

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}\right)dt = (**)(N)$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x-t)-f(x^+)}{e^{it}-1} & -\pi<t<0 \\[2ex] \dfrac{f(x-t)-f(x^-)}{e^{it}-1} & 0<t<\pi \end{cases}$$

Observar que g es de clase C^1 quizas en $t=0$ donde utilizando la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \lim_{t\to 0^-}\frac{f(x-t)-f(x^+)}{e^{it}-1} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t\to 0^-}\frac{-f'(x-t)}{ie^{it}} = -\frac{f'(x^+)}{i}$$

Analogamente

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = -\frac{f'(x^-)}{i}$$

Asi $g:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{K}$ es integrable y por tanto el Lema de Riemann-Lebesgue nos dice que $(**)(N)\longrightarrow 0$ cuando $N\longrightarrow+\infty$. #

#

$\boxed{\text{FIN//}}$