Departamento de Matemáticas

Profs. Francisco Balibrea • Bernardo Cascales

EDP y Análisis de Fourier
Curso 2013-14
Autoevaluación continua: ejercicios propuestos/resueltos a diario

1. (30-Enero-2014) Dada $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable, probar que para su serie de Fourier se tiene:

   a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$;

   b) si f toma valores reales, entonces los coeficientes a_n y b_n son reales.

2. (17-Febrero-2014) Obtener la serie de Fourier de
$$f(x) = x,$$
para $x \in [-\pi, \pi]$.

3. (18-Febrero-2014) Obtener la serie de Fourier de
$$f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4},$$
para $x \in [0, 2\pi]$.

4. (18-Febrero-2014) Obtener la serie de Fourier de
$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha},$$
para $x \in [0, 2\pi]$ y $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

5. (18-Febrero-2014) Utilizar el desarrollo en serie de Fourier de las funciones dadas en los ejercicios 2, 3 y 4 para demostrar respectivamente que:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha}$.

6. (21-Febrero-2014) Sea $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Probar que apra cada $y \in H$ la aplicación $x \to \langle x, y\rangle$ es lineal continua y de norma $\|y\|$.

7. (28-Febrero-2014) Para $N \in \mathbb{N}$ se define
$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}, \text{ para } x \in [-\pi, \pi].$$
Probar que:

a) $D_N(x) = \frac{\sin\left((N+1/2)x\right)}{\sin(x/2)}$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

b) $\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

(A la sucesión D_N se le llama núcleos de Dirichlet, y desempeña un papel importante para mostrar la existencia de funciones continuas 2π-periódicas con serie de Fourier puntualmente divergente) Si $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, entonces la fórmula

8. (12-Marzo-2014) Si $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, pruébese que la fórmula

$$Kf(t) := \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds$$

define un operador acotado $K : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ (llamado operador integral con núcleo k), que satisface

$$\|K\| \leq \Big(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2\, dt\, ds \Big)^{1/2}.$$

9. (12-Marzo-2014) Pruébese que la ecuación diferencial en $[a,b]$ con condiciones iniciales $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$, $x'(a) = x'_a \in \mathbb{R}$

$$-x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

donde $q : [a,b] \to\in \mathbb{R}$ es una función continua, tiene una única solución.

10. Pruébese la fórmula que da la solución de una ecuación de Fredholm cuando $\lambda = \lambda_m$.

11. Pruébese que si la función k en el ejercicio 9 satisface

$$k(s,t) = \overline{k(t,s)} \text{ para cada } s,t \in [a,b] \times [a,b],$$

entonces el operador K es autoadjunto, es decir,

$$\langle Kf, g \rangle = \langle f, Kg \rangle, \text{ para cada } f, g \in L^2([a,b]).$$

12. Sean a_0, a_1 y b_0, b_1 en $\mathcal{K}$. Pruébese que existe una función $f \in C^1([a,b])$ tal que $f^(i)(a) = a_i$ y $f^(i)(b) = b_i$. ¿Cómo plantearías el ejercicio para funciones de clase C^n?¿y para funciones de clase C^∞?

13. Si K es un operador como en el ejercicio 12 y $(e_n)_n$ es una base hilbertiana de $L^2([a,b])$ formada por vectores propios de K con valores propios asociadaso (λ_n), pruébese que

$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_a^b |k(t,s)|^2\, dt\, ds\Big)^{1/2}.$$

14. Pruébese la fórmula que da la solución de un sistema de Sturm-Liouville cuando $\mu = \mu_m$.

15. Resolver el sistema de Sturm-Liouville en $[0,1]$ dado por la ecuación

$$-x'' - \mu x = y$$

bajo las condiciones frontera:

a) $x'(0) = 0 = x'(1)$;

b) $x(0) = 0 = x'(1)$.

16. Pruébese que si $f \in L^1[-\pi, \pi]$ y $(K_n)_n$ es un núcleo de sumabilidad entonces,

$$\left\| \frac{1}{2\pi} f * K_n - f \right\|_1 \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

17. Para una serie formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\mathbb{K}$ si denotamos por $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es sumable Cesàro si existe

$$\lim_N \sigma_N \in \mathbb{B}.$$

Pruébese que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente entonces es sumable Cesàro y se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_N \sigma_N$. Pruébese que el recíproco no es cierto.

18. Sea $k = 1, 2, \dots$ y $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ de clase C^k y 2π-periódica. Pruébese que existe $C > 0$ talque que

$$\|S_N f - f\|_\infty \leq \frac{C}{N^{k-1/2}}, \text{ para cada } N \in \mathbb{N}.$$