UNIVERSIDAD
DE MURCIA

*Departamento de Matemáticas*

# Análisis Matemático I
## Curso 2007–08
## Control (Test sobre derivadas e integrales)
## 10 de marzo de 2008

**ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.**

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $S = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ es un conjunto infinito. Entonces:

   *a*) $f$ es necesariamente la función idénticamente nula.

   *b*) Existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = f'(c) = 0$.________________ **Opción correcta**

   *c*) Para cada $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ la función
   $$f_k(x) := \begin{cases} x^k \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   verifica las hipótesis dadas.

   *d*) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $f(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable, tal que $\lim_{x\to b} f(x) = r$, entonces:

   *a*) Puesto que la derivada de una función constante es nula, se tiene, tomando derivadas, que $\lim_{x\to b} f'(x) = 0$.

   *b*) $\lim_{x\to b} f'(x)$ existe, aunque no tine por qué ser nulo.

   *c*) $f$ se puede extender a una función continua en $(a,b]$.________________ **Opción correcta**

   *d*) $f$ se puede extender a una función derivable en $(a,b]$.

   *e*) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces:

   *a*) $f$ no puede alcanzar su máximo absoluto ni su mínimo absoluto.

   *b*) $f$ alcanza su máximo absoluto o su mínimo absoluto, pero no ambos.

   *c*) $f$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos y lo hace necesariamente en 0 y en 1. **Opción correcta**

   *d*) $f(0) \neq f(1)$.________________ **Opción correcta**

   *e*) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces:

   *a*) $f$ es sobreyectiva y su imagen es todo $\mathbb{R}$.

   *b*) $f$ es inyectiva, y la inversa definida sobre $f(a,b)$ es derivable.________________ **Opción correcta**

   *c*) $f$ es inyectiva, y la inversa definida sobre $f(a,b)$ no es necesariamente derivable.

   *d*) $f$ no es necesariamente inyectiva.

   *e*) Ninguna de las anteriores.

5. Sea $f : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

   *a*) No puede existir tal función.
   *b*) Como consecuencia del teorema de Taylor, la función $f$ es idénticamente nula.
   *c*) Como consecuencia del teorema de Taylor, la función $f$ es idénticamente nula en un cierto entorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$, para algún $0 < \varepsilon < \delta$.
   *d*) $f(x) = o(x^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.______ **Opción correcta**
   *e*) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $f : (a-\delta, a+\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable infinitas veces en $a$ y tal que no todas las derivadas $f^{(n)}(a)$ son nulas. Entonces:

   *a*) $f$ es convexa o cóncava en un entorno de $a$.
   *b*) $f$ es convexa o cóncava en un entorno de $a$ o $a$ es un punto de inflexión de $f$.
   *c*) $f$ alcanza un extremo relativo en $a$.
   *d*) $f$ es creciente o decreciente en $a$.
   *e*) Ninguna de las anteriores.______ **Opción correcta**

7. El polinomio de taylor de grado 3 para $\operatorname{sen} x$ en $x_0 = 0$ es $x - \frac{x^3}{3!}$. Se tiene que:

   *a*) No existe ninguna fórmula para el resto $\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)$.
   *b*) $\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\theta x)}{4!} x^4$ para un adecuado $0 < \theta < 1$.______ **Opción correcta**
   *c*) $\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{\cos(\beta x)}{5!} x^5$ par un adecuado $0 < \beta < 1$.______ **Opción correcta**
   *d*) $\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = o(x^5)$.
   *e*) Ninguna de las anteriores.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua e impar para la que se sabe que $\int_0^1 f(t)dt = 1$, $\int_1^2 f(t)dt = -2$. Entonces se tiene que:

   *a*) $\int_{-2}^0 f(t)dt$ no existe porque los límites de integración tienen que ser impares.
   *b*) $\int_{-2}^0 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt = -1$.
   *c*) $\int_{-2}^0 f(t)dt = -\int_0^2 f(t)dt = 1$.______ **Opción correcta**
   *d*) No existe una tal función $f$.
   *e*) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Entonces:

   *a*) La integral de Riemann $\int_0^1 f(t)dt$ existe aunque $f$ no esté acotada.
   *b*) $\int_0^1 f(t)dt$ existe si $f$ es acotada.
   *c*) Una condición suficiente para que exista $\int_0^1 f(t)dt$ es que $f$ sea continua.______ **Opción correcta**
   *d*) Hay funciones monótonas $f$ para las cuales $\int_0^1 f(t)dt$ no existe.
   *e*) Ninguna de las anteriores.

10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Entonces:

*a*) $F$ es derivable una vez en $[0, 1]$.________________ **Opción correcta**

*b*) $F$ no puede ser derivable dos veces en $[0, 1]$ porque el teorema Fundamental del Cálculo no lo permite.

*c*) $F$ es derivable dos veces en $[0, 1]$ y $F''(x) = f(x)$ para cada $x \in [0, 1]$.________ **Opción correcta**

*d*) $F$ no puede definirse en algunos puntos de $[0, 1]$.

*e*) Ninguna de las anteriores.

11. Consideremos la sucesión $a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2n+j}$. Entonces:

*a*) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe.

*b*) $a_n$ no puede interpretarse como la suma de Riemann de ninguna función.

*c*) $a_n$ puede interpretarse como suma de Riemann.________________ **Opción correcta**

*d*) $\lim_{n\to\infty} a_n = \log \frac{3}{2}$.________________ **Opción correcta**

*e*) Ninguna de las anteriores.

12. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función integrable con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$ y $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Entonces:

*a*) Si $f$ alcanza un mínimo absoluto $m$ en $[0, 1]$ se tiene que $m = 0$.________ **Opción correcta**

*b*) Si $f$ es continua en $x_0 \in [0, 1]$ se tiene que $f(x_0) = 0$.________ **Opción correcta**

*c*) $f$ puede ser estrictamente monótona.

*d*) El conjunto $\{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}$ tiene medida 0.________ **Opción correcta**

*e*) Ninguna de las anteriores.