Universidad de Murcia | Departamento Matemáticas

Funciones de una variable real
Series de potencias y funciones elementales

Bernardo Cascales • José Manuel Mira • Luis Oncina

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Grado en Matemáticas • 2013-2014

Índice

1. Concepto de serie de potencias
   - Radio y disco de convergencia
2. Operaciones con series de potencias
   - Convergencia uniforme
   - Propiedades de las series de potencias
3. Funciones elementales
   - Exponencial compleja, y lo que encierra
   - La medida de ángulos
4. El Teorema Fundamental del Álgebra

Objetivos

- Conocer los conceptos de serie de potencia y radio de convergencia y saber calcular este último.
- Saber aplicar técnicas formales manipulativas con series y el teorema de Abel para calcular sumas de series. Saber utilizar MAXIMA para ese fin.
- Conocer que las funciones elementales: exponencial, logaritmo, seno, coseno, arco tangente... son series de potencias. Y sacar partido de este hecho.
- Conocer la medida analítica de ángulos usando las funciones trigonométricas.
- Saber como generar las funciones elementales a partir de la exponencial compleja.
- Conocer como demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra usando estos recursos.

Índice 1: Series de potencias

1. Concepto de serie de potencias
   - Radio y disco de convergencia
2. Operaciones con series de potencias
   - Convergencia uniforme
   - Propiedades de las series de potencias

Concepto de serie de potencias y de disco de convergencia

En lo que sigue, con $\mathbb{K}$ nos referimos indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ y un elemento $z_0 \in \mathbb{K}$, una serie de potencias en torno a z_0 es la expresión simbólica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{con } z \in \mathbb{K}.$$

Para cada valor de z se tiene una serie numérica en $\mathbb{K}$ que puede o no ser convergente.

Concepto de serie de potencias y de disco de convergencia

En lo que sigue, con $\mathbb{K}$ nos referimos indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ y un elemento $z_0 \in \mathbb{K}$, una serie de potencias en torno a z_0 es la expresión simbólica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \textit{con } z \in \mathbb{K}.$$

Para cada valor de z se tiene una serie numérica en $\mathbb{K}$ que puede o no ser convergente. Como en el caso de las series numéricas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ representa indistintamente a la serie, como expresión simbólica, y también al valor de la suma, cuando la serie es convergente.

Concepto de serie de potencias y de disco de convergencia

En lo que sigue, con $\mathbb{K}$ nos referimos indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ y un elemento $z_0 \in \mathbb{K}$, una serie de potencias en torno a z_0 es la expresión simbólica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{con } z \in \mathbb{K}.$$

Para cada valor de z se tiene una serie numérica en $\mathbb{K}$ que puede o no ser convergente. Como en el caso de las series numéricas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ representa indistintamente a la serie, como expresión simbólica, y también al valor de la suma, cuando la serie es convergente. Para $z = z_0$, obviamente, siempre es convergente; y puede que no haya otro valor diferente de z para el que la serie converja.

Concepto de serie de potencias y de disco de convergencia

En lo que sigue, con $\mathbb{K}$ nos referimos indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ y un elemento $z_0 \in \mathbb{K}$, una serie de potencias en torno a z_0 es la expresión simbólica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{con } z \in \mathbb{K}.$$

Para cada valor de z se tiene una serie numérica en $\mathbb{K}$ que puede o no ser convergente. Como en el caso de las series numéricas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ representa indistintamente a la serie, como expresión simbólica, y también al valor de la suma, cuando la serie es convergente. Para $z = z_0$, obviamente, siempre es convergente; y puede que no haya otro valor diferente de z para el que la serie converja. Para series de potencias reales escribiremos

$$\sum a_n(x - x_0)^n.$$

Recordatorio

La convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se utiliza:

- **Concepto de límite superior:** Si $(a_n)_n$ es acotada existen subsucesiones convergentes (Bolzano-Weierstrass) a algún punto de $\mathbb{R}$. Cada uno de tales puntos se llama un punto de aglomeración de la sucesión $(a_n)_n$. El supremo de los puntos de aglomeración se llama límite superior de $(a_n)_n$ y se denota como $\limsup a_n$. Análogamente el ínfimo de los puntos de aglomeración se llama límite inferior de $(a_n)_n$ y se denota como $\liminf a_n$.
- Cuando $(a_n)_n$ no está acotada superiormente $\limsup a_n = +\infty$ y si no está acotada inferiormente $\liminf a_n = -\infty$.

Observación

Hay sucesiones que no tienen límite, pero todas tienen límite superior y límite inferior; la sucesión tiene límite si y sólo si, ambos coinciden.

Recordatorio

- **Criterio de la raíz**. Si $a_n \geq 0$, una condición suficiente para que la serie numérica $\sum a_n$ converja es que se verifique $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$. Si existe $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (incluso con valor $+\infty$) entonces $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- **Convergencia absoluta implica convergencia**. Si $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales o complejos tal que la serie de números reales positivos $\sum |a_n|$ es convergente, entonces también es convergente la serie $\sum a_n$ en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, según que la sucesión $(a_n)_n$ sea real o compleja.
- **Criterio de Leibniz**. Si $a_n > 0$ es una sucesión monótona decreciente con límite 0, entonces la serie alternada $\sum (-1)^n a_n$ es convergente a un número de $\mathbb{R}$. Además si S_n es la suma de los n primeros sumandos y S la suma total se verifica que $|S - S_n| < a_{n+1}$

Observación

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente si

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0| = |z-z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Definición

El valor $R := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ *se llama el radio de convergencia de la serie dada.*

Proposición

Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entonces:

- si $|z-z_0| < R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente;
- si $|z-z_0| > R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es divergente.

Definición

La bola abierta con centro z_0 y radio R, $B(z_0, R)$ recibe el nombre de disco de convergencia. En muchos casos consideraremos series de potencias reales y entonces $B(x_0, R)$ sera un intervalo: el intervalo de convergencia.

En la frontera de convergencia puede pasar cualquier cosa

1. Ejemplo: sobre fronteras de convergencia

- Sin convergencia en la frontera: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$;
- Con convergencia en la frontera: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$;
- Con convergencia en algunos puntos de la frontera: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

2. Ejemplo: una serie de potencias convergente siempre

La serie de potencias en $\mathbb{C}$ dada por $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ es convergente para cualquier valor de $z \in \mathbb{C}$ ya que $\lim_n \sqrt[n]{1/n!} = \lim_n \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = 0$ y por tanto $R = \infty$.

3. Ejemplo: una serie de potencias que sólo converge en un punto

La serie de potencias en $\mathbb{K}$ dada por $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ sólo converge para $z = 0$ ya que $\lim_n \sqrt[n]{n!} = \lim_n \frac{n!}{(n-1)!} = \infty$ y por tanto $R = 0$.

4. Ejemplo: la necesidad de lim sup

El radio de convergencia de la serie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ requiere utilizar lim sup ya que no existe $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ debido a que $|a_{2n}| = 0$ mientras que $|a_{2n+1}| = 1/(2n+1)$.

5. Ejemplo: ¿cuanto vale $f(x)$?

Para los valores del intervalo de convergencia la fórmula $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define una cierta función, pero... ¿cómo calcularla?

5. Ejemplo: ¿cuanto vale $f(x)$?

Para los valores del intervalo de convergencia la fórmula $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define una cierta función, pero... ¿cómo calcularla?
Revisemos los ejemplos anteriores con ayuda de MAXIMA.

[SeriesPotencias10.wxmx] Hacer sumas finitas con valores numéricos en MAXIMA es muy sencillo usando el comando `sum(a[n],n,p,q)`
También es capaz de calcular algunas sumas infinitas, incluso simbólicas, como podrá comprobar en esta práctica.

5. Ejemplo: ¿cuanto vale $f(x)$?

Para los valores del intervalo de convergencia la fórmula $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define una cierta función, pero... ¿cómo calcularla?
Revisemos los ejemplos anteriores con ayuda de MAXIMA.

[SeriesPotencias10.wxmx] Hacer sumas finitas con valores numéricos en MAXIMA es muy sencillo usando el comando `sum(a[n],n,p,q)`
También es capaz de calcular algunas sumas infinitas, incluso simbólicas, como podrá comprobar en esta práctica.

En los ejemplos anteriores con ayuda de MAXIMA hemos encontrado la fórmula para f. Quizá se pregunte , ¿como puedo yo manualmente calcular la fórmula de f? En este capítulo se pretende dar respuesta a cuestiones como esas, pero... la «fórmula de f» es la que está escrita: la mayor parte de funciones son series de potencias.

Convergencia puntual vs. uniforme

Sea $f_n : A \to \mathbb{K}$ una sucesión de funciones y $f : A \to \mathbb{K}$.

Convergencia puntual

Diremos que la sucesión (f_n) converge a f puntualmente en A si para todo $x \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Convergencia uniforme

Diremos que la sucesión (f_n) converge a f uniformemente en A si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in A$.

Ejemplos

A) $f_n(t) = t^n$ si $t \in [0, 1]$; B) $g_n(x) = \frac{1}{ne^{n^2x^2}}$ si $x \in [-1, 1]$.

C) $h_n(x) = n^2x(1 - nx)$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ y 0 si $x \in (\frac{1}{n}, 1]$.

[SeriesPotencias11.wxmx] Imágenes que ayudan...

Convergencia y continuidad

Convergencia puntual no convserva continuidad

Como ejemplo puede servir $f_n(t) = t^n$ si $t \in [0, 1]$.

Convergencia uniforme conserva continuidad

Sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces f es continua.

Convergencia uniforme: un concepto clave

Cambiando $a_n(z-z_0)^n$ por $f_n(z)$ se obtiene una serie de funciones.

Definición (Convergencia uniforme)

La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en un conjunto A a $f(z)$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n_0$ se verifica $\quad |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon, \quad$ para todo $z \in A$.

Proposición (Criterio de Cauchy de convergencia uniforme)

Una serie de funciones es uniformemente convergente en A si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 < p \leq q$ se verifica que $\quad |\sum_{n=p}^{q} f_n(z)| < \varepsilon, \quad$ cualquiera que sea $z \in A$.

Convergencia uniforme: un concepto clave

Cambiando $a_n(z-z_0)^n$ por $f_n(z)$ se obtiene una serie de funciones.

Definición (Convergencia uniforme)

La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en un conjunto A a $f(z)$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n_0$ se verifica $\quad |f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon, \quad$ para todo $z \in A$.

Proposición (Criterio de Cauchy de convergencia uniforme)

Una serie de funciones es uniformemente convergente en A si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 < p \leq q$ se verifica que $\quad |\sum_{n=p}^{q} f_n(z)| < \varepsilon, \quad$ cualquiera que sea $z \in A$.

Proposición (Criterio de Weierstrass)

Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Si existe una serie numérica de términos positivos $\sum b_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq b_n$ para cada $z \in A$ y todo n, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A.

Propiedades de las series de potencias

Proposición

La serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$*, con radio de convergencia* R *converge absoluta y uniformemente en cada bola cerrada* $B[z_0, r]$ *que cumpla* $r < R$*.*

Propiedades de las series de potencias

Proposición

La serie de potencias $\sum a_n(z-z_0)^n$, *con radio de convergencia* R *converge absoluta y uniformemente en cada bola cerrada* $B[z_0,r]$ *que cumpla* $r<R$.

El interés de la convergencia uniforme está ligado a que la función límite conserve ciertas propiedades de las funciones.

Propiedades de las series de potencias

Proposición

La serie de potencias $\sum a_n(z-z_0)^n$, con radio de convergencia R converge absoluta y uniformemente en cada bola cerrada $B[z_0, r]$ que cumpla $r < R$.

El interés de la convergencia uniforme está ligado a que la función límite conserve ciertas propiedades de las funciones.

Proposición

Sea una serie de funciones $\sum f_n(z)$ que converge uniformemente a una función f para $z \in A$. Si las f_n son continuas en A entonces f es continua en A.

Aplicando las dos proposiciones precedentes se obtiene

Teorema (Continuidad de la función suma)

La función f definida mediante $f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n$ es continua en $B(z_0, R)$, siendo R el radio de convergencia de la serie.

Si z_1 pertenece al dominio de f y $|z_1| = R$ el teorema anterior no garantiza que f sea continua en z_1. Necesitamos algo más fino.

Proposición (Criterio de Abel)

Sea $\sum a_n(z - z_0)^n$ y supongamos que para $z = z_1$, con $|z_1 - z_0| = R$, la serie es convergente. Entonces la serie converge uniformemente en el segmento que une los puntos z_0 y z_1.

Corolario

Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias real y sea I el dominio de la función $f(x) := \sum a_n x^n$, es decir el intervalo formado por los puntos en los que la serie converge. Entonces f es continua en I.

Teorema (Derivación término a término)

Sea la serie de potencias $\sum a_n z^n$ *y pongamos* $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *para* $z \in B(0, R)$ *siendo* R *el radio de convergencia de la serie. Entonces:*

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *obtenida derivando «formalmente» la anterior tiene radio de convergencia* R*.*
2. *Si escribimos* $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$*, para* $z \in B(0, R)$*, se verifica que* g *es precisamente la derivada de* f*.*

Teorema (Derivación término a término)

Sea la serie de potencias $\sum a_n z^n$ *y pongamos* $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *para* $z \in B(0,R)$ *siendo* R *el radio de convergencia de la serie. Entonces:*

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *obtenida derivando «formalmente» la anterior tiene radio de convergencia* R*.*
2. *Si escribimos* $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$*, para* $z \in B(0,R)$*, se verifica que* g *es precisamente la derivada de* f*.*

Así, la función definida por una serie de potencias es infinitamente derivable en su disco o intervalo de convergencia. Pero más aún:

Corolario (Unicidad del desarrollo en serie de potencias)

Sea la serie de potencias $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *cuyo radio de convergencia es* R*, entonces* f *es una función infinitamente derivable en el disco de convergencia y*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ para } n \geq 0.$$

Para series de potencias $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se tienen los resultados correspondientes.

Funciones analíticas

Supongamos que f es una función infinitamente derivable en un dominio D que contiene a x_0. A tenor del corolario precedente existe una serie de potencias asociada a f mediante

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Funciones analíticas

Supongamos que f es una función infinitamente derivable en un dominio D que contiene a x_0. A tenor del corolario precedente existe una serie de potencias asociada a f mediante

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Es natural plantearse las siguientes cuestiones:

1. ¿Puede sustituirse el símbolo $\backsim$ por el símbolo $=$?
2. ¿La igualdad es válida para todos los puntos del dominio de f?

Funciones analíticas

Supongamos que f es una función infinitamente derivable en un dominio D que contiene a x_0. A tenor del corolario precedente existe una serie de potencias asociada a f mediante

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Es natural plantearse las siguientes cuestiones:

1. ¿Puede sustituirse el símbolo $\backsim$ por el símbolo $=$?
2. ¿La igualdad es válida para todos los puntos del dominio de f?

La serie de potencias define en su intervalo de convergencia una función, g, que verifica $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$. Así que:

- ¿Las funciones f y g coinciden? ¿Para qué valores de x?

Es claro que $f(x_0) = g(x_0)$. ¿Hay más puntos de igualdad?

1. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y sólo coinciden en x_0.
   La función $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene nulas en el origen todas sus derivadas.

1. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y sólo coinciden en x_0.
   La función $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene nulas en el origen todas sus derivadas.
2. f y g tienen dominios diferentes, pero coinciden en el intervalo de convergencia.
   $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = g(x)$ tiene radio de convergencia 1. La función $f(x) = \log(1+x)$ está definida y es infinitamente derivable en $(-1,\infty)$. Si nos fiamos de MAXIMA
   $g(x) = \log(1+x)$ en $(-1,1)$

1. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y sólo coinciden en x_0.
   La función $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene nulas en el origen todas sus derivadas.
2. f y g tienen dominios diferentes, pero coinciden en el intervalo de convergencia.
   $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = g(x)$ tiene radio de convergencia 1. La función $f(x) = \log(1+x)$ está definida y es infinitamente derivable en $(-1, \infty)$. Si nos fiamos de MAXIMA
   $g(x) = \log(1+x)$ en $(-1, 1)$
3. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y coinciden en $\mathbb{R}$.
   $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = g(x)$ tiene radio de convergencia infinito. La función $f(x) = e^x$ esta definida y es infinitamente derivable en todo $\mathbb{R}$. Si nos fiamos de MAXIMA $g(x) = e^x$ en $\mathbb{R}$.

1. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y sólo coinciden en x_0.
   La función $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene nulas en el origen todas sus derivadas.
2. f y g tienen dominios diferentes, pero coinciden en el intervalo de convergencia.
   $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = g(x)$ tiene radio de convergencia 1. La función $f(x) = \log(1+x)$ está definida y es infinitamente derivable en $(-1,\infty)$. Si nos fiamos de MAXIMA $g(x) = \log(1+x)$ en $(-1,1)$
3. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y coinciden en $\mathbb{R}$.
   $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = g(x)$ tiene radio de convergencia infinito. La función $f(x) = e^x$ esta definida y es infinitamente derivable en todo $\mathbb{R}$. Si nos fiamos de MAXIMA $g(x) = e^x$ en $\mathbb{R}$.

1. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y sólo coinciden en x_0.
   La función $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene nulas en el origen todas sus derivadas.
2. f y g tienen dominios diferentes, pero coinciden en el intervalo de convergencia.
   $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = g(x)$ tiene radio de convergencia 1. La función $f(x) = \log(1+x)$ está definida y es infinitamente derivable en $(-1,\infty)$. Si nos fiamos de MAXIMA
   $g(x) = \log(1+x)$ en $(-1,1)$
3. f y g definidas en todo $\mathbb{R}$ y coinciden en $\mathbb{R}$.
   $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = g(x)$ tiene radio de convergencia infinito. La función $f(x) = e^x$ esta definida y es infinitamente derivable en todo $\mathbb{R}$. Si nos fiamos de MAXIMA $g(x) = e^x$ en $\mathbb{R}$.

En los casos 2 y 3 se dice que la función es analítica en su disco o intervalo de convergencia. La cuestión depende de la fórmula de Taylor y de la estimación del tamaño del resto.

Proposición (Primitiva término a término)

Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y sea R su radio de convergencia. Entonces la función F definida mediante $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ tiene de radio de convergencia R y es una primitiva de f; las demás primitivas de f se obtienen sumando una constante a F.

6. Ejemplo

La serie de potencias $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ tiene radio de convergencia 1, siendo el dominio de f_1 el intervalo $(-1, 1)$, ya que para $x = \pm 1$ la serie no converge.

Proposición (Primitiva término a término)

Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y sea R su radio de convergencia. Entonces la función F definida mediante $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ tiene de radio de convergencia R y es una primitiva de f; las demás primitivas de f se obtienen sumando una constante a F.

6. Ejemplo

La serie de potencias $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ tiene radio de convergencia 1, siendo el dominio de f_1 el intervalo $(-1, 1)$, ya que para $x = \pm 1$ la serie no converge. Al ser una progresión geométrica de razón x, es posible calcular la suma, resultando que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = f(x) \text{ para } x \in (-1, 1).$$

7. Ejemplo

Aplicando integración término a término en la última igualdad del ejemplo precedente se obtiene $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \log(1+x) + C$, siendo C una constante y la igualdad se cumple para $x \in (-1,1)$. Para $x = 0$, trivialmente, puede sumarse la serie, y la suma es 0; como $\log(1+0) = 0$ se concluye que $C = 0$. En consecuencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n = \log(1+x) \text{ para } x \in (-1,1).$$

Índice 2: Funciones elementales y Teo Fund. del Álgebra

3 Funciones elementales
- Exponencial compleja, y lo que encierra
- La medida de ángulos

4 El Teorema Fundamental del Álgebra

Exponencial compleja

Esta sección está destinada a probar que las funciones usuales del análisis: exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas... son ejemplos de series de potencias, es decir, son funciones analíticas.

La función exponencial compleja se define mediante la fórmula

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Propiedades básicas

1. La serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. $(e^z)' = e^z$.
3. $e^z e^w = e^{z+w}$.

$$\left(1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots\right)$$
$$\left(1 + \frac{1}{1!}w + \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{3!}w^3 + \dots\right) =$$
$$1 + \left(\frac{1}{1!}z + \frac{1}{1!}w\right) + \left(\frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{1!}z\frac{1}{1!}w + \frac{1}{2!}z^2\right) + \dots$$

La última igualdad es clave para definir de forma analítica las funciones trigonométricas y las fórmulas de la trigonometría.

Sacando consecuencias de la fórmula de la exponencial compleja

1. $1 = e^0 = e^x e^{-x} \Rightarrow e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $(e^x)' = e^x > 0 \Rightarrow$ biyección estr. creciente de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$.
3. $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ donde $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $e^{-iy} = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{(-iy)^n}{n!} = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{(\overline{iy})^k}{k!} = \lim_n \overline{\sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!}} = \overline{\lim_n \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!}} = \overline{e^{iy}}$. Por tanto $|e^{iy}|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = e^{iy}e^{-iy} = 1$
5. Por la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^\infty \frac{i^n x^n}{n!}$ se tiene

$$e^{ix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} := \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

6. $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\mathit{sen}\,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$
   De (4) obtenemos $\mathit{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
7. A partir de las definiciones como series son inmediatas:
$$\mathit{sen}' x = \cos x \qquad \cos' x = -\,\mathit{sen}\,x$$
$$\mathit{sen}(-x) = -\,\mathit{sen}\,x \qquad \cos(-x) = \cos x$$
8. De la fórmula $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ se deducen las siguientes
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \mathit{sen}\,x\,\mathit{sen}\,y$$
$$\mathit{sen}(x+y) = \mathit{sen}\,x \cos y + \cos x\,\mathit{sen}\,y,$$
   y a partir de ellas las fórmulas estándar de la trigonometría.

π y la medida de ángulos

Definimos ahora π y la medida de ángulos, entroncando de ese modo con la significación geométrica conocida de seno y coseno.

Proposición

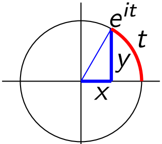
El conjunto $\{x > 0 : \cos x = 0\}$ *es no vacío, de hecho existe un primer elemento en dicho conjunto que se denota con* $\dfrac{\pi}{2}$.
Además las funciones sen y cos son 2π*-periódicas.*

Proposición 8.2.1

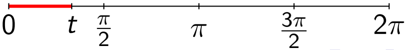
Proposición

La función $\psi : [0, 2\pi) \longrightarrow S$ *definida por* $\psi(t) = e^{it}$ *es una biyección de* $[0, 2\pi)$ *sobre la circunferencia unidad* S.

Proposición 8.2.2



$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t = x + iy$$



La exponencial compleja engendra las funciones simples

La fórmula $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ y los teoremas desarrollados en el curso generan toda la información sobre las funciones simples.

1. e^x es una función estrictamente creciente y derivable con $(e^x) = e^x$ que no se anula nunca siendo por tanto una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$ que cumple $e^x e^y = e^{x+y}$.

La exponencial compleja engendra las funciones simples

La fórmula $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ y los teoremas desarrollados en el curso generan toda la información sobre las funciones simples.

1. e^x es una función estrictamente creciente y derivable con $(e^x) = e^x$ que no se anula nunca siendo por tanto una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$ que cumple $e^x e^y = e^{x+y}$.
2. La inversa de la función anterior, $\log x$, es igualmente una biyección estrictamente creciente de $(0, \infty)$ sobre $\mathbb{R}$, continua y derivable siendo $(\log x)' = 1/x$ (teorema de la función inversa). Además se cumple que $\log(xy) = \log x + \log y$.

La exponencial compleja engendra las funciones simples

La fórmula $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ y los teoremas desarrollados en el curso generan toda la información sobre las funciones simples.

1. e^x es una función estrictamente creciente y derivable con $(e^x) = e^x$ que no se anula nunca siendo por tanto una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$ que cumple $e^x e^y = e^{x+y}$.
2. La inversa de la función anterior, $\log x$, es igualmente una biyección estrictamente creciente de $(0, \infty)$ sobre $\mathbb{R}$, continua y derivable siendo $(\log x)' = 1/x$ (teorema de la función inversa). Además se cumple que $\log(xy) = \log x + \log y$.
3. Hemos obtenido las funciones seno y coseno, sus derivadas, paridad y fórmulas de la trigonometría.

La exponencial compleja engendra las funciones simples

La fórmula $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ y los teoremas desarrollados en el curso generan toda la información sobre las funciones simples.

1. e^x es una función estrictamente creciente y derivable con $(e^x) = e^x$ que no se anula nunca siendo por tanto una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$ que cumple $e^x e^y = e^{x+y}$.
2. La inversa de la función anterior, $\log x$, es igualmente una biyección estrictamente creciente de $(0, \infty)$ sobre $\mathbb{R}$, continua y derivable siendo $(\log x)' = 1/x$ (teorema de la función inversa). Además se cumple que $\log(xy) = \log x + \log y$.
3. Hemos obtenido las funciones seno y coseno, sus derivadas, paridad y fórmulas de la trigonometría.
4. El coseno es positivo en $(-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow$ seno es una biyección continua, derivable y estrictamente creciente de $[-\pi/2, \pi/2]$ sobre $[-1, 1]$ su inversa *arcsen* x tiene las mismas propiedades.

La exponencial compleja engendra las funciones simples

La fórmula $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ y los teoremas desarrollados en el curso generan toda la información sobre las funciones simples.

1. e^x es una función estrictamente creciente y derivable con $(e^x) = e^x$ que no se anula nunca siendo por tanto una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$ que cumple $e^x e^y = e^{x+y}$.
2. La inversa de la función anterior, $\log x$, es igualmente una biyección estrictamente creciente de $(0, \infty)$ sobre $\mathbb{R}$, continua y derivable siendo $(\log x)' = 1/x$ (teorema de la función inversa). Además se cumple que $\log(xy) = \log x + \log y$.
3. Hemos obtenido las funciones seno y coseno, sus derivadas, paridad y fórmulas de la trigonometría.
4. El coseno es positivo en $(-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow$ seno es una biyección continua, derivable y estrictamente creciente de $[-\pi/2, \pi/2]$ sobre $[-1, 1]$ su inversa *arcsen* x tiene las mismas propiedades.
5. El $\arccos x$, la tangente $\tan x$, su inversa $\arctan x$...

Teorema Fundamental del Álgebra

Cualquier polinomio en $\mathbb{C}$ de grado n tiene exactamente n raíces reales o complejas (iguales o diferentes) y por tanto, si $z_1, z_2, \ldots z_n$ son dichas raíces, se puede escribir en la forma

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_n)\ldots(z - z_n)$$

La parte más difícil es probar que cada polinomio tiene al menos una raíz, porque establecido esto, reiterando se tiene que

$$P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1} = (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2} = \ldots$$

siendo P_k un polinomio de grado k.

La demostración de que existe al menos una raíz se basa en el teorema de Weierstrass de existencia de mínimos y un lema técnico que asegura que si un polinomio no se anula en un punto entonces hay valores cercanos a ese punto para los que el módulo del polinomio es menor que el correspondiente a dicho punto.

Bibliografía

Las demostraciones de todos los teoremas de este diaporama pueden encontrarse en

J. M. Mira; B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño
http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-i-2009