Universidad de Murcia

Departamento Matemáticas

Funciones de una variable real II
Integrales impropias

B. Cascales, J. M. Mira y L. Oncina

Departamento de Matemáticas • Universidad de Murcia

Grado en Matemáticas • 2013-2014

Contenido

Objetivos

Objetivos

1. Recordar el concepto de convergencia de series y sus propiedades, para establecer paralelismo con integrales impropias.
2. Definir y entender el concepto de integral impropia.
3. Analizar los primeros ejemplos de integrales impropias.
4. Entender y saber utilizar la condición de Cauchy para convergencia de integrales.
5. Aprender el concepto de convergencia absoluta de una integral.
6. Utilizar en situaciones prácticas los conceptos anteriores.

Series: definición

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Series: definición

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.

Series: definición

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.

Series: definición

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.

Series: definición

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.
4. S recibe el nombre de suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n. = S$.

Series: definición

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.
4. S recibe el nombre de suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n. = S$.
5. Cuando $a_n \in \mathbb{R}$ y $\lim_n S_n = \pm\infty$ la serie se dice divergente a $\pm\infty$.

Ejemplos de series

Ejemplo

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejemplo

- La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

  es convergente ya que la sucesión $(S_n)_n$ es monótona creciente y acotada.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, ya que no satisface el criterio de Cauchy.

Convergencia de series

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_n a_n$ y vale 0.

Convergencia de series

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_n a_n$ y vale 0.

Condición de Cauchy para la convergencia de una serie

La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se verifica

$$|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| < \epsilon,$$

siempre que los naturales p, q cumplan $n_0 \leq p \leq q$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series tienen el mismo carácter.
2. Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.
3. Si $l = \infty$ entonces la convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de $\sum b_n$.

Reordenación de series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\phi(n)}$.

Reordenación de series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\phi(n)}$.

Proposición

Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos, entonces cualquier reordenada suya converge y ambas tienen la misma suma.

Definición

La serie $\sum a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Proposición

Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente.

Concepto de integral impropia: tipos

En la integral de Riemann se usa una función acotada en un intervalo acotado cerrado $[a, b]$. Las integrales impropias corresponden a alguna situación de no acotación, sea en la función, sea en el intervalo, o en ambos.

Concepto de integral impropia: tipos

En la integral de Riemann se usa una función acotada en un intervalo acotado cerrado $[a, b]$. Las integrales impropias corresponden a alguna situación de no acotación, sea en la función, sea en el intervalo, o en ambos.

Ejemplo 1. Función no acotada en intervalo acotado

Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $I = (0, 1]$ y queremos ver cómo definir $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$
Tomamos ahora $u \in (0, 1]$ y calculamos

$$\int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(1 - \sqrt{u}\right)$$

y entonces definimos de manera natural definimos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx := \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(1 - \sqrt{u}\right) = 2$$

Ejemplo 2. Función acotada en intervalo no acotado

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $I = [1, \infty)$, y queremos darle sentido a la expresión

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

Dado $u \in [1, \infty)$ cualquiera, podemos calcular

$$\int_1^u \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = \left(1 - \frac{1}{u}\right)$$

y entonces de manera natural definimos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx := \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = 1$$

Ejemplo 3. Función no acotada en intervalo no acotado

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $I = (0, \infty)$, y queremos dar sentido a

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

Por analogía con la integral de Riemann ordinaria es razonable

$$\text{definir} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx := \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

La primera integral corresponde a función no acotada en intervalo acotado; la segunda a función acotada en intervalo no acotado.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx := \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{1}{x^2} = \lim_{u\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{u}\right) = \infty$$

y como el valor de la segunda es 1, concluimos $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \infty$

Definición

$f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $(b\leq\infty)$, diremos que es localmente integrable si para todo $u\in[a,b)$, f restringida a $[a,u]$ es integrable, es decir, existe $\int_a^u f(x)\,dx$.

Definición

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $(b \leq \infty)$, diremos que es localmente integrable si para todo $u \in [a, b)$, f restringida a $[a, u]$ es integrable, es decir, existe $\int_a^u f(x)\, dx$.

• Si f es localmente integrable y existe

$$\lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\, dx \in \mathbb{R},$$

diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente y que su valor es

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\, dx.$$

• Análogamente definimos para $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$.

Definición

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $(b \leq \infty)$, diremos que es localmente integrable si para todo $u \in [a, b)$, f restringida a $[a, u]$ es integrable, es decir, existe $\int_a^u f(x)\, dx$.

• Si f es localmente integrable y existe

$$\lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\, dx \in \mathbb{R},$$

diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente y que su valor es

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\, dx.$$

• Análogamente definimos para $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$.
• Si el límite anterior es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral (impropia) diverge hacia $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente. Si no existe dicho límite diremos que no existe la integral en sentido impropio.

La integral impropia es lineal

La linealidad de la integral de Riemann y el paso al límite que involucra la integral impropia hace que esta última sea lineal también.

Proposición

Sea $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable y sea $a < c < b$. Son equivalentes:

1. f es integrable en sentido impropio en $[a, b)$
2. f es integrable en sentido impropio en $[c, b)$

Además se cumple $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Proposición

Sea $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable y sea $a < c < b$. Son equivalentes:

1. f es integrable en sentido impropio en $[a, b)$
2. f es integrable en sentido impropio en $[c, b)$

Además se cumple $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

Definición

Sea $f(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente si existe $c \in (a, b)$ de modo que las integrales impropias $\int_a^c f(x)\, dx$ y $\int_c^b f(x)\, dx$ son convergentes. En este caso, definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

La convergencia y el valor de la integral no dependen del c elegido.

Ejemplos importantes: las armónicas

- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{converge sii } \alpha > 1$$
- $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{converge sii } \alpha < 1$$

Más ejemplos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty te^{-t}\,dt, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$$

Condición de Cauchy y aplicaciones

Como la convergencia se define en términos de existencia de un límite, una cierta condición de Cauchy resulta esperable.

Condición de Cauchy y aplicaciones

Como la convergencia se define en términos de existencia de un límite, una cierta condición de Cauchy resulta esperable.

Proposición (Condición de Cauchy)

La integral impropia $\int_a^b f(t)\,dt$, *donde* $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es localmente integrable y* $b \leq +\infty$, *es convergente si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $c \in (a, b)$ *tal que si* $c \leq y < z < b$ *entonces*

$$\left| \int_y^z f(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Condición de Cauchy y aplicaciones

Como la convergencia se define en términos de existencia de un límite, una cierta condición de Cauchy resulta esperable.

Proposición (Condición de Cauchy)

La integral impropia $\int_a^b f(t)\,dt$, *donde* $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es localmente integrable y* $b \leq +\infty$, *es convergente si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $c \in (a, b)$ *tal que si* $c \leq y < z < b$ *entonces*

$$\left| \int_y^z f(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Una consecuencia de la condición de Cauchy es que si $b = \infty$ y existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $\int_a^\infty f$ converge, entonces $L = 0$.

Condición de Cauchy y aplicaciones

En los ejemplos que hemos visto siempre hemos podido calcular una primitiva y así estudiar la convergencia de la integral impropia y su valor. Pero no siempre es así.

Ejemplo

Consideremos $f(x) := \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \in (0, 1]$. ¿La siguiente integral converge?

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

Condición de Cauchy y aplicaciones

En los ejemplos que hemos visto siempre hemos podido calcular una primitiva y así estudiar la convergencia de la integral impropia y su valor. Pero no siempre es así.

Ejemplo

Consideremos $f(x) := \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \in (0, 1]$. ¿La siguiente integral converge?

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

Proposición

Si $g : (a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y $g \in \mathcal{R}([c, b])$ para todo $c \in (a, b]$ entonces g es integrable en $(a, b]$ en sentido impropio.

Criterios de convergencia para funciones positivas

Si $f \geq 0$, es obvio que $F(x) := \int_a^x f$ es creciente por lo que la convergencia de la integral impropia equivale a la acotación de F.

Proposición (Criterio de comparación)

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ con $b \leq \infty$ y supongamos que existen $c \in [a, b)$ y una constante $M > 0$ tales que $f(t) \leq Mg(t)$ para todo $t \in [c, b)$. Entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.
(Y la divergencia de $\int_a^b f$ implica la divergencia de $\int_a^b g$).

Corolario

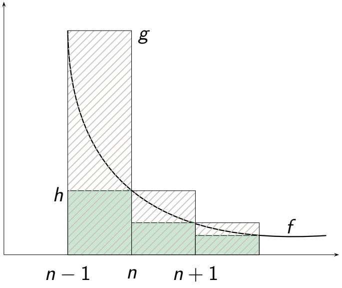
Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Suponemos existe $L := \lim_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
(1) Si $0 < L < \infty$ entonces $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.
(2) Si $L = 0$ entonces $\int_a^b g$ converge implica $\int_a^b f$ converge.
(3) Si $L = \infty$ entonces $\int_a^b f$ converge implica $\int_a^b g$ converge.

Relación entre series numéricas e integrales impropias

Proposición (Criterio de la integral)

Sea $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ monótona decreciente y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si, y solo si, converge la integral impropia $\int_a^\infty f$

Una imagen que lo dice todo



Aplicación

La serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ es convergente y para cada entero $k \geq 2$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_k^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

Utilizar lo anterior para dar una estimación de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ cuando se aproxima por sumas parciales.

Ejemplos del criterio de comparación

1. Estudio de la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$
2. Estudio de la convergencia de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\,dx$

Ejemplo de estudio del carácter

Carácter, según los valores del número real k, de la integral impropia

$$\Gamma(k) := \int_0^\infty t^{k-1}e^{-t}\,dt$$

Calcule $\Gamma(k)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. ¿Se atreve con la fórmula para $\Gamma(k)$ para $k \in \mathbb{N}$? Maxima conoce la función, se llama `gamma`.

Convergencia absoluta

Proposición (Convergencia absoluta implica convergencia)

Sea $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $b \leq \infty$ y supongamos que la integral impropia $\int_a^b |f|$ converge. Entonces también converge la integral impropia $\int_a^b f$

La clave de la demostración es la condición de Cauchy.
Para analizar la convergencia de una integral impropia con integrando f de signo no constante, lo primero es sustituir f por $|f|$ y aplicar los criterios de comparación. Pero...

Convergencia absoluta

Proposición (Convergencia absoluta implica convergencia)

Sea $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $b \leq \infty$ y supongamos que la integral impropia $\int_a^b |f|$ converge. Entonces también converge la integral impropia $\int_a^b f$

La clave de la demostración es la condición de Cauchy.
Para analizar la convergencia de una integral impropia con integrando f de signo no constante, lo primero es sustituir f por $|f|$ y aplicar los criterios de comparación. Pero... no basta sólo con eso

Ejemplos de integrales convergentes, aunque no absolutamente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx$$

Estos ejemplos son casos particulares de teoremas más generales (ver bibliografía), pero exceden los contenidos de este curso. Podemos usar MAXIMA para experimentar las afirmaciones.

Bibliografía

J. M. Mira; B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño
http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-i-2009