Universidad de Murcia
Departamento Matemáticas

Funciones de Una Variable Real II: Cálculo de Primitivas

B. Cascales, J. M. Mira y L. Oncina

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Grado en Matemáticas
Curso 2012-2013

Contenido

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema fundamental del cálculo

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ se define

$$F(x) := \int_a^x f. \tag{1}$$

La función F así definida recibe el nombre de integral indefinida y verifica las propiedades siguientes:

1. F es continua en $[a, b]$.
2. Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Primitivas: Regla de Barrow

Definición

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que g es una primitiva de f si g es derivable y $g' = f$.

Integración por partes

Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y supongamos que tienen primitivas F, G respectivamente. Entonces,

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Cambio de variable

Sea $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ una función derivable con derivada continua tal que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Primeros resultados

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que admite primitiva en $[a, b]$. Denotaremos por $\int f(x)\,dx$ a una primitiva cualquiera de f en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$, el conjunto de todas las primitivas de f en $[a, b]$ lo escribiremos como $\int f(x)\,dx + K$ donde K es un número real cualquiera.

Primeros resultados

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que admite primitiva en $[a, b]$. Denotaremos por $\int f(x)\,dx$ a una primitiva cualquiera de f en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$, el conjunto de todas las primitivas de f en $[a, b]$ lo escribiremos como $\int f(x)\,dx + K$ donde K es un número real cualquiera.

Proposición

Sean f y g funciones continuas en [a,b], y sean α y β números reales cualesquiera. Entonces:

- $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$.
- $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$.
- $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, donde $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ es una biyección de clase $C^1([c, d])$, $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$.

Primitivas inmediatas

Sea $u(x)$ una función.

$$\int u^n(x)\,u'(x)\;dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\;dx = \ln|u(x)| + C, \quad u(x) \neq 0$$

$$\int e^{u(x)}u'(x)\;dx = e^{u(x)} + C$$

$$\int a^{u(x)}u'(x)\;dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \cos(u(x))\,u'(x)\;dx = \operatorname{sen}(u(x)) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(u(x))\,u'(x)\;dx = -\cos(u(x)) + C$$

$$\int \cosh(u(x))\,u'(x)\;dx = \operatorname{senh}(u(x)) + C$$

$$\int \operatorname{senh}(u(x))\,u'(x)\;dx = \cosh(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\;dx = -\cot(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x))}{\cos^2(u(x))}\;dx = \tan(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}\;dx = -\coth(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x))}{\cosh^2(u(x))}\;dx = \tanh(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\;dx = \arctan(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\;dx = \operatorname{arcsen}(u(x)) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{1-u^2(x)} = \arg\tanh(u(x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u(x)}{1-u(x)}\right) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+1}}\;dx = \arg\operatorname{senh}(u(x)) + C = \ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x)+1}\right) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\;dx = \arg\cosh(u(x)) + C = \ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x)-1}\right) + C$$

Tabla de primitivas inmediatas.

Primitivas de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Se trata de resolver $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. En primer lugar nos aseguraremos de que el $gradP(x) < gradQ(x)$, en caso contrario haremos la división, $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, con $gradR(x) < gradQ(x)$, y así

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)\ dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Podemos asumir en lo que sigue que $gradP(x) < gradQ(x)$.

Primitivas de funciones racionales

Si conocemos la factorización del polinomio del denominador

$$Q(x) = (x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_r)^{m_r}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{n_s},$$

donde $q_i > \frac{p_i^2}{4}, i = 1,2,\ldots,s$. Se puede demostrar que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede expresar de manera única como suma de *fracciones simples*:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-a_1)}+\ldots+\frac{A_1^{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}+\ldots+\frac{A_r^1}{(x-a_r)}+\ldots+\frac{A_r^{m_r}}{(x-a_r)^{m_r}}\\ &+\frac{M_1^1x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_1^{n_1}x+N_1^{n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}+\ldots+\\ &+\frac{M_s^1x+N_s^1}{(x^2+p_sx+q_s)}+\ldots+\frac{M_s^{n_s}x+N_s^{n_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}},\end{aligned}$$

donde A_k^i, M_k^i, N_k^i son numeros reales a determinar.

Primitivas de funciones racionales

Se trata pues de ser capaz de calcular la primitiva de cada una de las *fracciones tipo* que aparecen en la descomposición. Así tenemos:

- $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + K.$
- $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + K, n = 2, 3, \ldots$
- $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\, dx = \frac{M}{2} \ln \left[(x+\frac{p}{2})^2 + c^2\right] + \frac{N-M\frac{p}{2}}{c} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right).$

Primitivas de funciones racionales

Cuando aparecen raíces complejas múltiples usaremos el *método de Hermite u Ostrogadsky.* Se trata de expresar la fracción como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{A(x)}{D_1(x)}\right) + \frac{B(x)}{D_2(x)};$$

con $gradA(x) < gradD_1(x)$, $gradB(x) < gradD_2(x)$; $D_1(x)$ es el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$, es decir, todos los factores que aparecen en $Q(x)$ con un grado menos; $D_2(x) = \frac{Q(x)}{D_1(x)}$, es decir, $D_2(x)$ son todos los factores de $Q(x)$ con multiplicidad 1. Por lo tanto,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{A(x)}{D_1(x)} + \int \frac{B(x)}{D_2(x)}\,dx.$$

Recordatorio de identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
$\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Funciones que contienen cos x y sen x

Sea $f(u, v)$ una función racional de dos variables y nos planteamos calcular

$$\int f(\operatorname{sen}(x), \cos(x))dx.$$

Funciones que contienen cos x y sen x

Sea $f(u, v)$ una función racional de dos variables y nos planteamos calcular

$$\int f(\operatorname{sen}(x), \cos(x))dx.$$

En general haremos el cambio de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ y así:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Funciones que contienen cos x y sen x

Sea $f(u, v)$ una función racional de dos variables y nos planteamos calcular

$$\int f(\operatorname{sen}(x), \cos(x))dx.$$

En general haremos el cambio de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ y así:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Queda entonces una función racional en la variable t,

$$\int f\left(\tfrac{2t}{1+t^2}, \tfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\tfrac{2}{1+t^2}dt$$

Otras integrales que contienen cos x y sen x

Caso $R(-,-) = R(\cdot,\cdot)$

- Si R es una función par en seno y coseno, es decir,

$$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

lo que significa que cambiando simultáneamente $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $-\cos x$ se obtiene la misma función, entonces puede comprobarse que el cambio

$$t = \operatorname{tg} x$$

permite reducir también la primitiva a una del tipo considerado en la sección 6.2. Se tiene la siguiente fórmula

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

que permite expresar $\operatorname{sen} x$ en función de t. Procediendo de forma similar con la función coseno se obtienen, finalmente, las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Otras integrales que contienen cos x y sen x

Caso R es una función impar en el seno

- Si R es una función impar en seno es decir,

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

entonces el cambio $t = \cos x$ permite reducir la primitiva a una del tipo considerado en la sección 6.2 como es fácil comprobar.

Otras integrales que contienen cos x y sen x

Caso R es una función impar en el coseno

- Si R es una función impar en coseno, es decir,

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

entonces el cambio $t = \operatorname{sen} x$ permite reducir la primitiva a la de una función racional, del tipo considerado en la sección 6.2.

Funciones que contienen cos x y sen x

Merece la pena hacer especial mención del caso

$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{sen}^m(x)\;dx,\ n,m\in\mathbb{N}.$$

1. Si n es impar, haremos el cambio $t=\mathrm{sen}(x)$.
2. Si m es impar, haremos el cambio $t=\cos(x)$.
3. Si n y m son pares, usaremos $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\mathrm{sen}^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$ para 'reducir el grado' en el integrando.

Ejemplos

Calcular las siguientes primitivas

1. $\int \frac{1}{5+4\cos(x)}\,dx = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan(\frac{x}{2})\right).$

Ejemplos

Calcular las siguientes primitivas

1. $\int \frac{1}{5+4\cos(x)}\,dx = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan(\frac{x}{2})\right)$.
2. $\int \frac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)(1+\operatorname{sen}^2(x))}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + \frac{3}{2}\arctan(\operatorname{sen}(x))$.

Ejemplos

Calcular las siguientes primitivas

1. $\int \frac{1}{5+4\cos(x)}\,dx = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan(\frac{x}{2})\right).$
2. $\int \frac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)(1+\operatorname{sen}^2(x))}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + \frac{3}{2}\arctan(\operatorname{sen}(x)).$
3. $\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)\right) - x.$

Ejemplos

Calcular las siguientes primitivas

1. $\int \frac{1}{5+4\cos(x)}\,dx = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan(\frac{x}{2})\right).$
2. $\int \frac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)(1+\operatorname{sen}^2(x))}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + \frac{3}{2}\arctan(\operatorname{sen}(x)).$
3. $\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)\right) - x.$
4. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x).$

Funciones de la forma $f(e^x)$

Si f es una fracción racional, las primitivas de la forma $\int f(e^x)\, dx$ se calculan haciendo el cambio $t = e^x$, y entonces

$$\int f(e^x)\, dx = \int f(t)\frac{dt}{t} = \int f_1(t)\, dt,$$

donde f_1 es también una fracción racional.

Funciones de la forma $f(e^x)$

Si f es una fracción racional, las primitivas de la forma $\int f(e^x)\,dx$ se calculan haciendo el cambio $t = e^x$, y entonces

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\frac{dt}{t} = \int f_1(t)\,dt,$$

donde f_1 es también una fracción racional.

Hay que mencionar que toda fracción racional de $\cosh(x)$ y $\operatorname{senh}(x)$ se transforma en una de las anteriores sin más que expresar dichas funciones hiperbólicas en función de la exponencial: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Recordar que las inversas se pueden escribir también como:

$$\arg\cosh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ \arg\operatorname{senh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Funciones de la forma $f(e^x)$

Si f es una fracción racional, las primitivas de la forma $\int f(e^x)\,dx$ se calculan haciendo el cambio $t = e^x$, y entonces

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\frac{dt}{t} = \int f_1(t)\,dt,$$

donde f_1 es también una fracción racional.

Hay que mencionar que toda fracción racional de $\cosh(x)$ y $\operatorname{senh}(x)$ se transforma en una de las anteriores sin más que expresar dichas funciones hiperbólicas en función de la exponencial: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Recordar que las inversas se pueden escribir también como:

$$\arg\cosh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ \arg\operatorname{senh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Calcular

$\int \frac{1+\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\,dx = \ln\left(\frac{(e^x+1)^2}{e^x}\right) - \frac{2}{e^x+1}.$

Funciones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Aquí R representa a una función racional de dos variables y suponemos, obviamente, que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tiene sentido. Este tipo de primitivas se conoce con el nombre de *irracionales cuadráticas*.

Por calcular las primitivas de este tipo de funciones basta observar que mediante un adecuado cambio de variable afín (del tipo $t = \alpha x + \beta$) la primitiva propuesta da origen a una de las siguientes: $\int\sqrt{t^2-1}$, $\int\sqrt{t^2+1}$ o $\int\sqrt{1-t^2}$, dependiendo de los valores de a, b y c. Se trata ahora de calcular las primitivas de cada una de ellas.

$\displaystyle\int\sqrt{1-t^2}$.

Puede calcularse de forma sencilla mediante el cambio de variable

$$z = \operatorname{sen} t.$$

Los otros casos

Cuando despues del cambio de variable se obtienen expresiones de la forma $\sqrt{t^2-1}$ o $\sqrt{t^2+11}$ se hacen cambios del tipo t por una función hiperbólica. Veáse OCW.