UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Curso 2013-14
Relación 7. Series de potencias

1. Calcule la suma de las siguientes series de potencias, estudiando previamente sus intervalos de convergencia.
   SUGERENCIA: Ponga nombre a las funciones que definen las series y (con los teoremas) realice manipulaciones astutas (derivar, integrar, trocear...) hasta encontrar una serie que sea capaz de sumar (con frecuencia una geométrica o una exponencial).

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n},\qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{3n},\qquad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}$$
$$(d)\sum_{n=1}^{\infty}(3n^2-n+1)x^n,\quad (e)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{n+1},\quad (f)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n!}x^n$$

2. Las siguientes series son series numéricas, no son series de potencias; realice manipulaciones astutas para convertirlas en series de potencias y una vez calculada la suma de la serie de potencias, obtenga, particularizando, el valor de suma de la serie numérica

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};\quad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)};\quad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n-1)!};\quad (d)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

3. Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

   a) Discuta justificadamente la convergencia y convergencia absoluta de dicha serie.

   b) Pruebe la siguiente igualdad
$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

   c) Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

4. Desarrolle en serie de potencias la función $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$ y pruebe que si n es un entero con $n>0$ se tiene
$$\log\frac{n+1}{n}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$
   Utilizando dicha serie determine cuantos términos hay que tomar para obtener una aproximación del valor de $\log 2$ con error inferior a 10^{-3}.

   ¿Conoce otra serie para $\log 2$? ¿Cuantos términos hay que tomar para obtener el mismo tamaño de error?