UNIVERSIDAD DE MURCIA

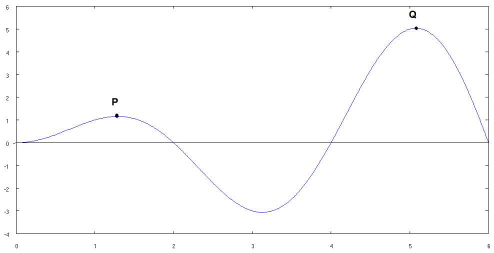
Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Curso 2013-14
Relación 4. El teorema fundamental del cálculo

1. **Lo básico**

2. Sea $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ la función derivable de la figura y $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ para $x \in [0, 6]$. Sean x_P y x_Q las abscisas de los puntos P y Q respectivamente.



   A) F es creciente en $(0, 2)$ y $(4, 6)$.

   B) F es convexa en $(2, 4)$.

   C) F presenta máximos relativos en x_P y x_Q.

   D) F presenta un mínimo relativo en $x = 4$.

   E) F presenta puntos de inflexión en x_P y x_Q.

3. Calculad el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 12x$ e $y = x^2$.

4. Calculad el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las curvas $x = 0, y = x^2 + 1$, y la tangente a esta última en el punto de abscisa $x = 1$.

Lo que hay que saber hacer.

5. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua que verifica $\int_0^{x^2} (1 + t)f(t)\,dt = 6x^4$. Determinad f.

6. Calculad las siguientes integrales (todas son casi inmediatas, con una transformación inteligente del integrando).

$$\text{A)}\ \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx \quad \text{B)}\ \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx \quad \text{C)}\ \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

7. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que para todo $x \in (a, b)$ se verifica $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$. Probad que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

8. Mediante un cambio de variable estableced la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx.$$

   Como aplicación, probad que $\int_0^\pi x \operatorname{sen}^4(2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4(2x)\,dx = \frac{3\pi^2}{16}$.
   Indicación: Para el cálculo de la última integral podéis usar MAXIMA.