UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Curso 2013-14
Relación 3. La integral de Riemann

Lo que hay que saber hacer.

Límites e integrales: las sumas de Riemann

1. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probad que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \int_a^b f,$$

para cualquier elección de $z_k \in [a + \frac{(b-a)}{n}(k-1), a + \frac{(b-a)}{n}k]$ para k y n enteros con $1 \leq k \leq n$.

2. Usando límites, calculad las siguientes integrales:

$$a) \int_2^4 x, \quad b) \int_0^1 x^2(1-x)$$

Indicación: Para calcular los límites resultantes os será de utilidad conocer/recordar las fórmulas que expresan sumatorios del tipo $\sum_{k=1}^{n} k^a$ como polinomios en n con $a = 1, 2, 3$.

3. Usando integrales, calculad los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{2n}, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big((n+1)(n+2)\ldots(n+n)\Big)^{1/n}$$

Indicación: Para calcular las integrales resultantes podéis usar MAXIMA.

Para pensar un poco:

4. Sea $a > 0$ y $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrable. Probad que si f es una función par entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, mientras que si es impar se cumple $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

5. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y $g \in \mathcal{R}([c, b])$ para todo $c \in (a, b]$ entonces $g \in \mathcal{R}([a, b])$

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Probad que entonces $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

   ¿Habéis usado en la prueba la continuidad de f en todo el intervalo? ¿No? Entonces quizás podéis probar el caso más general, es decir, asumir que f es solo integrable Riemann.