UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Curso 2013-14
Relación 1. El polinomio de Taylor

Lo básico

1. Sean $f(x) = o(x^4)$ y $g(x) = o(x^5)$. Contestad verdadero o falso razonando vuestra respuesta.

   a) $f(x) + g(x) = o(x^4)$.
   b) $f(x)g(x) = o(x^{20})$.
   c) $g(x)/f(x) = o(x)$.
   d) $x^2 g(x) + x f(x) = o(x^5)$.
   e) $x^3 + g(x) = o(x^5)$.

2. Demostrad que para todo $x \geq 0$ se tiene $|\sqrt[3]{1+x} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})| \leq \frac{5x^3}{81}$.

3. Deseamos calcular el valor de $\cos x$ con error inferior a $\frac{1}{1000}$ y para ello consideramos el polinomio de Taylor de grado 4 para el coseno. ¿Para qué valores de x podemos estar seguros de conseguir el objetivo utilizando dicho desarrollo?

Lo que hay que saber hacer

4. Calculad los siguientes límites.

$$A)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x) - \log(1+x)}{x - \tan x},\quad B)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} - x^2}{\operatorname{tg} x \log \frac{x^2+1}{1-x^2}}$$

5. Probad que

   A) $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,
   B) $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{x^2}{2}$ si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Para pensar un poco

6. Probad que para todo $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ y calculad

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$