UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Curso 2013-14

Autoevaluación 7. Series de potencias

Lo básico

1. Determinad los radios e intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}x^n,\quad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n,\quad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)},\quad (d)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$$

Lo que hay que saber hacer

2. Calculad la suma de las siguientes series de potencias, estudiando previamente sus intervalos de convergencia.

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1},\quad (b)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n,\quad (c)\,1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n},\quad (d)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n(n+1)}$$

3. Calcule la suma de las siguientes series demostrando previamente su convergencia:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n};\quad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n};\quad (c)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right);\quad (d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$$

Para aprender un poco más

4. Estudie la convergencia de la sucesión $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$, $x\geq 0$.

5. Estudie la convergencia de la sucesión de funciones $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$ definidas en I siendo: (1) $I=[0,1]$, (b) $I=(1,+\infty)$.

6. Estudie la convergencia de la sucesión de funciones $f_n(x)=\frac{2^nx}{1+n2^nx^2}$ con $x\in[0,1]$.

7. Pruebe que si $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas convergente uniformemente hacia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ entonces:

   - f es una función continua.
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

8. A la luz del resultado anterior analice, en los ejercicios 4 a 6, la posibilidad de hacer, con $I=[0,1]$,

$$\lim_n\int_I f_n(x)\,dx=\int_I\lim_n f_n(x)\,dx$$