UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Curso 2013-14

Autoevaluación 4.

El teorema fundamental del cálculo

Lo que hay que saber hacer

1. Calculad la derivada de la función F en cada caso:

$$\text{A) } F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\, dt, \quad \text{B) } F(x) = \int_{\operatorname{sen} x^2}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\, dt$$

2. Calculad las siguientes integrales (todas son casi inmediatas, con una transformación inteligente del integrando).

$$\text{A) } \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x\, dx \quad \text{B) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \log(\operatorname{sen} x)\, dx \quad \text{C) } \int_0^{a^2} \frac{x}{a^4+x^4}\, dx$$

Para pensar un poco

3. Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua y, para cada $x \in [0,+\infty)$, sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x x f(t)\, dt$

   A) Calculad $F'(x)$ para cada $x \in [0,+\infty)$ y demostrad que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du$$

   B) Calculad $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1+\frac{1}{n}} \frac{(1+\frac{1}{n}-y)}{(1+y)^3}\, dy$

   Indicación: Para el apartado A) derivad en ambos lados de la igualdad. Para el apartado B) haced $1+\frac{1}{n}=x$ y aplicad el apartado anterior.

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Probad que si $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$ en los siguientes casos:

   A) f es continua.

   B) f admite primitiva.

   C) f satisface la propiedad de los valores intermedios.

   D) ¿Es cierto si solo asumimos que f es integrable?

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann y supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_c^d f(x)\,dx \le \alpha(d-c), \text{ para todo } [c,d] \subset [a,b]$$

Probad, en los siguientes casos, que entonces $f(x) \le \alpha$ para todo $x \in [a,b]$.

A) Si f es continua.

B) Si f admite primitiva.

¿Es cierto en general?

Un poco más de esfuerzo: para profundizar en los conceptos

Vamos ahora a reflexionar sobre algunas de las propiedades que hemos aprendido durante lo que llevamos de curso. En el siguiente esquema mostramos conjuntos de funciones y la relación existente entre ellos. Tanto para el esquema como en los problemas que siguen, las funciones se suponen definidas en un intervalo cerrado y acotado de la recta real.

Las inclusiones entre los distintos conjuntos nos las proporcionan los teoremas o las definiciones. Que dichas inclusiones son estrictas lo probamos con ejemplos.

6. "Bucea" en el OCW para encontrar qué resultados nos aseguran las inclusiones de los conjuntos y rellena los puntos suspensivos con la referencia al resultado pertinente (es un buen momento para repasar las pruebas de los mismos):

A) Derivables $\subset$ continuas ...

B) Continuas $\subset$ acotadas ...

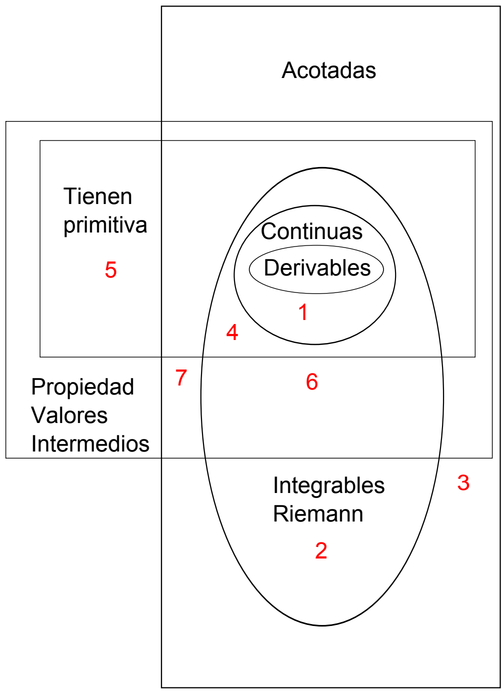
C) Continuas $\subset$ cumplen prop. V.I ...

D) Continuas $\subset$ integrables Riemann ...

E) Continuas $\subset$ tienen primitiva ...

F) Integrables Riemann $\subset$ acotadas ...

G) Tienen primitiva $\subset$ cumplen prop. V.I ...



En el esquema vemos que dentro del mundo de las funciones continuas el concepto de integral y primitiva coinciden: de forma más precisa, la integral (indefinida) es una primitiva de la función (por cierto, en OCW vemos un ejemplo donde la integral indefinida no es una primitiva). Pero fuera de las continuas las cosas no son tan bonitas.

Los números en rojo son ejemplos que separan los conjuntos. Vamos a verlos. (Notad que el 5 se sale de las acotadas. El primer ejemplo de este tipo dentro de las acotadas lo dio Volterra pero para ello hay que utilizar técnicas de Teoría de la medida).

Existen ejemplos como el 7, es decir, una función que cumple la propiedad de Darboux o de los valores intermedios, que no es una primitiva y que siendo acotada no es integrable Riemann. La construcción es muy complicada y el que no tenga estas propiedades resulta de ser una función que no es continua en ningún punto.

7. Probad las siguientes afirmaciones:

   - Ejemplo 1. La función $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ es continua pero no derivable.
   - Ejemplo 2. La función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$ es acotada, no continua, integrable Riemann y no admite primitiva.
   - Ejemplo 3. La función $D_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$ acotada y no integrable.
   - Ejemplo 4. La función $f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ tiene como primitiva $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es integrable Riemann pero no es continua.
   - Ejemplo 5. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. f es derivable pero f' (cuya primitiva es f) no es integrable Riemann.

El siguiente ejemplo lo encontramos en: Fernando Galaz-García, *Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue*, Miscelánea Matemática, **44** (2007), 83-100.

8. Ejemplo 6. La función

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

es integrable Riemann, satisface la propiedad de los valores intermedios y no admite primitiva.

Indicación: Definid las funciones

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \; h(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Usad h para probar que f tiene primitiva, pero $g - f$ no tiene primitiva, ¿por qué?. De esto último concluimos que g no admite primitiva.