UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Curso 2013-14

Autoevaluación 3. La integral de Riemann

Lo que hay que saber hacer

1. Usando límites, calculad las siguientes integrales: *a*) $\displaystyle\int_2^3 x^2$, *b*) $\displaystyle\int_1^2 x^3$

2. Usando integrales, calculad los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)k}{n^3}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{2}{2^2+n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

Con un poco de esfuerzo...

3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable Riemann. Probad que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ en los siguientes casos:

   a) f es continua.

   b) f satisface la propiedad de los valores intermedios.

Para los más osados

Sin el teorema de Lebesgue de integrabilidad Riemann

El teorema de Lebesgue de integrabilidad Riemann, cuya demostración no hemos visto en clase y que, ciertamente, escapa a los objetivos de este curso, lo usamos en clase para probar que el producto de funciones integrables es, de nuevo, una función integrable. Dicho teorema nos dice en particular que las funciones integrables Riemann tienen puntos de continuidad (ver el problema 4). Volved a pensar el problema 6 de la Relación 3 en el caso de que f sea integrable Riemann si no lo habéis resuelto ya.

4. Sea $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Entonces existe $c\in[a,b]$ tal que f es continua en c.

Las sumas de Riemann implican la acotación de la función

5. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Supongamos que existe $A\in\mathbb{R}$ con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon>0$ existe $\pi_0\in\mathcal{P}([a,b])$ tal que si $\pi_0\prec\pi\in\mathcal{P}([a,b])$ se cumple $|A-S(f,\pi,z_i)|<\varepsilon$, para cualquier suma de Riemann correspondiente a π. Probad que f está acotada.