UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

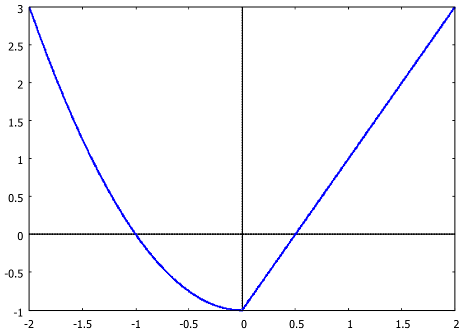
Funciones de una variable real II

Curso 2013-14

Autoevaluación 2. Convexidad

Lo básico

1. La siguiente gráfica se corresponde con la de la derivada de una función $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$. Responded verdadero o falso razonando la respuesta.



a) f es estrictamente creciente para $0 < x < \frac{1}{2}$.

b) f es convexa en $(0, 2)$.

c) f posee un punto de inflexión en $x = 0$.

d) f posee un mínimo relativo en $x = -1$.

e) $f''(0) = 0$.

2. Hallad los puntos de inflexión de las funciones

A) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ B) $f(x) = x^2 e^{-x}$
C) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ D) $f(x) = x - (c \operatorname{sen} x + k)$

Lo que hay que saber hacer

3. Estudiad y representad las funciones:

a) $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

b) $g(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$.

c) $h(x) = xe^{-x^2}$.

4. Sean f, g funciones convexas. ¿Son convexas las funciones $f + g$, fg y $f \circ g$?

5. Sea $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\log(\log x)$. Probad que f es convexa y que si $a, b \in (1, \infty)$ se cumple $\log(\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{\log a \log b}$.

Con un poco de esfuerzo...

6. Sea $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ en el intervalo $[0, 1]$. Dibuja con Maxima la gráfica de f. ¿Cual es tu conjetura sobre el crecimiento y la convexidad de f? Demuestra tu conjetura.

7. Se definen las funciones seno y coseno hiperbólicos mediante $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Estudiad y dibujad dichas funciones. Analizad la existencia de f^{-1} en ambos casos, llamadas argumento seno y argumento coseno hiperbólico, respectivamente, y determinad la correspondiente fórmula en términos de la función logaritmo. Demostrad que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

Retos para los más osados

8. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo. Probad que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es convexa

   b) Para cada conjunto finito $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I y cada conjunto finito $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ contenido en $[0,1]$ de modo que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ se cumple que

   $$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y acotada. Prueba que f es constante en $\mathbb{R}$.