UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Curso 2013-14

Autoevaluación 1. El polinomio de Taylor

Lo básico

1. Sean f, g dos funciones reales de variable real tales que $f = o(|x|^4)$ y $g = o(|x|^5)$. Constestar verdadero o falso, razonando la respuesta.

   a) $(g/f) = o(|x|)$
   b) $(fg) = o(|x|^9)$
   c) $(f+g) = o(|x|^9)$
   d) $x^2 f(x) + \frac{(g(x))^2}{x^3} = o(|x|^6)$.

2. Calculad los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones en los intervalos donde se indica.
   A) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$. B) $g(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ para $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

3. Determinad los siguientes desarrollos limitados en un entorno del origen.
   A) De orden 4 para $f(x) = \log^2(1+x)$.
   B) De orden 6 para $f(x) = \log(\cos x)$.
   C) De orden 3 para $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

Lo que hay que saber hacer

4. Calcula, usando desarrollos limitados, los siguientes límites

$$A)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2 - \log(1+x^2)}{e^{1-\cos x} - \sqrt{1+x^2}},\quad B)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - 2 + 2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{1-x^2} - 2}$$

$$C)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} \right),\quad D)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log \sec x - \operatorname{sen}^2 x}{x(x-\tan x)\cos x}$$

5. Sea $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a\log(1-x^2) + b(\sqrt{1+x^2} - 1) + x^2$ donde a y b son parámetros reales. Determina, al variar a y b, todos los posibles valores de $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^6}$.

6. Demuestra que para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

   Calcula el valor aproximado de $\log \frac{3}{2}$ con un error máximo de 0'001.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable verificando: $f(1) - f(0) = 7$ y $|f''(x)| \leq 3$ para todo $x \in [0,1]$. Demostrad que f es creciente en un entorno de cero.

Con un poco de esfuerzo...

8. En clase hemos visto, como corolario al teorema de Taylor, que si $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^{n+1}(a,b)$ y $x, x_0 \in (a,b)$ entonces $f(x) = P_n(f, x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$, donde P_n es el polinomio de Taylor de grado n de f en x_0.

   Prueba ahora que si $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $n-1$ veces derivable en (a,b) y existe la derivada n-ésima en $x_0 \in (a,b)$, entonces $f(x) = P_n(f, x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$.

9. El objetivo de este problema es el de proporcionar un ejemplo de función infinitamente derivable cuyo desarrollo de MacLaurin de cualquier orden es idénticamente cero.

   Sea la función definida por $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$. Demuestra que

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(2x^{-3}) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_3(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g'(0) = 0$$

   donde $P_3(\frac{1}{x})$ representa un polinomio de grado 3 en la variable $\frac{1}{x}$. Usando el método de inducción prueba que para cada $1 \leq n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g^{(n)}(0) = 0$$

   donde $P_{3n}(\frac{1}{x})$ representa un polinomio de grado $3n$ en la variable $\frac{1}{x}$.

Retos para los más osados

10. Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y a un punto interior del intervalo I. Supongamos que f es dos veces derivable en I con derivada segunda continua en a y que $f''(a) \neq 0$. Prueba que la fórmula de Lagrange

$$f(a+h) = f(a) + f'(a + \theta h)h, \ \theta \in (0,1)$$

   define en un cierto entorno reducido de cero una función $h \to \theta(h)$ que satisface

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$$

11. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua y dos veces derivable en $(-1,1)$. Definimos la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Prueba que g es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$.
   b) Para cada $x \in (-1,1)$ prueba que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $g'(x) = \frac{f''(\theta x)}{2}$.
   c) Usando lo anterior prueba que existe $c \in (-1,1)$ tal que $f''(c) = f(-1) + f(1) - 2f(0)$.