Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Curso 2013-14
Autoevaluación continua: ejercicios propuestos/resueltos a diario

1. (30-Enero-2014) Si alguien le pregunta ¿para qué sirven las derivadas? seguro que acuden a su mente múltiples respuestas. Una de ellas podría ser: «para calcular el seno de cualquier ángulo, de forma aproximada, con cuentas muy sencillas y sin necesidad de ninguna máquina».

   a) El valor del seno y coseno para $x = 0$ y para $x = \pi/2$ es inmediato.

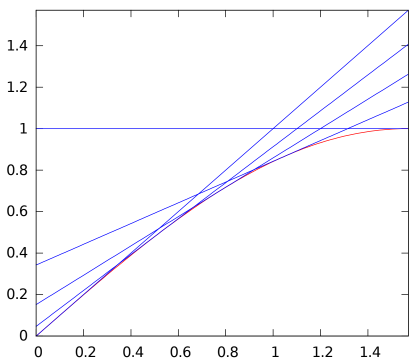
   b) Dibujando un triángulo equilátero podrá calcular sin dificultad los valores de seno y coseno para $x = \pi/6$ y $\pi/3$.

   c) Con un triángulo rectángulo isósceles no le será difícil determinar los valores de seno y coseno para $x = \pi/4$.

   d) Eligiendo, según el valor de x, la recta tangente adecuada en alguno de los cuatro puntos anteriores y sustituyendo en ella el valor de x puede obtener una buena aproximación del valor del seno. Compare su resultado con el que le proporciona su calculadora.

   e) El gráfico que aparece más abajo permite visualizarlo. El código para generarlo es:

```
load(draw)$
  draw2d(color=red,
       explicit(sin(x),x,0,%pi/2),
       color=blue,
       explicit(sin(0)+cos(0)*(x-0),x,0,%pi/2),
       explicit(sin(%pi/6)+cos(%pi/6)*(x-%pi/6),x,0,%pi/2),
       explicit(sin(%pi/4)+cos(%pi/4)*(x-%pi/4),x,0,%pi/2),
       explicit(sin(%pi/3)+cos(%pi/3)*(x-%pi/3),x,0,%pi/2),
       explicit(sin(%pi/2)+cos(%pi/2)*(x-%pi/2),x,0,%pi/2)
      )$
```



f) Cerca de $\pi/2$ se ve en el gráfico que la aproximación no es muy satisfactoria. Utilice una astucia para resolver este inconveniente.

2. (30-Enero-2014) Calcular el perímetro máximo que puede tener un rectángulo que tiene dos vértices en el eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de la función $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(x)$, con $x \in [0, \pi]$.

3. (3-Febrero-2014) ¿Para qué valores positivos de x se comete un error menor que 10^{-3} al aproximar la función $\sqrt{1+x}$ por su polinomio de Mac-Laurin de grado 3?

4. (3-Febrero-2014) Unicidad del desarrollo limitado de una función. Consideramos $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. Hallar el desarrollo limitado de f de orden 6 en $x = 0$.

5. (6 de Febrero 2014) Se quiere usar el polinomio de Mac-Laurin de $f(x) = e^x$ para aproximar el valor de $e = f(1)$ con un error menor que 10^{-5}. ¿Qué grado hay que tomar? ¿Qué valor aproximado se obtiene para e? (Nota: se supone conocida la cota $e < 3$).

6. (6 de Febrero 2014) Probar las siguientes desigualdades:

   a) $\dfrac{x}{\mathrm{sen}\, x} < \dfrac{\tan x}{x}$ si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

   b) $0 \leq \tan x - \mathrm{sen}\, x \leq 3x^3$ si $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

7. (6 de Febrero 2014) Calculad el siguiente límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, x - x}{\tan x - x}$

8. (6 de Febrero de 2014) Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{(1+x)^x - 1 - \mathrm{sen}^2 x}$$

9. (11 de Febrero de 2014) Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

10. (11 de Febrero de 2014) Determinar los extremos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

11. (13 de Febrero de 2014) Demuestra que $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

12. (13 de Febrero de 2014) Demuestra que $\cos(x) \geq 1 - x^2/2$ para $x \in]0, \pi/2[$

13. (13 de Febrero de 2014) A partir de la definición demostrar que la función $f(x) = x^2$ es convexa en $\mathbb{R}$.

14. (19 de Febrero de 2014) Pruébese que para $x > 0$ se tiene la desigualdad

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

15. (19 de Febrero de 2014) Dados números reales $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, encontrar los mínimos de la función $f(x) := \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

16. (26 de Febrero de 2014) Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en (a, b) y $c \in (a, b)$. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si f'' no se anula en (a, b) entonces f es convexa o cóncava en (a, b).
   b) Si $f''(c) = 0$ entonces f presenta en c un punto de inflexión.
   c) Si existe $\delta > 0$ tal que f'' no se anula en $(c - \delta, c + \delta)$ entonces f' es inyectiva en $(c - \delta, c + \delta)$.

17. (3 de Marzo de 2014) Haciendo uso de la definición de integral probar que $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

18. (10 de Marzo de 2014) Sea $1 \leq p < \infty$, y denotemos por $\|(x_1, x_2)\| := \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p}$. Pruébese que:

   a) $\| \cdot \|_p$ es una norma en $\mathbb{R}^2$;
   b) Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

   Dibujar con un ordenador la bola unidad para distintos valores de p y buscar grafícamente el significado al límite anterior.

19. (10 de Marzo de 2014) La función de Dirichlet $D_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ viene dada por la fórmula:

$$D_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ donde } p, q \in \mathbb{N} \text{ y m.c.d.}(p, q) = 1, \end{cases}$$

   a) Pruébese que D_2 es continua en los irracionales y discontinua en los racionales;
   b) Pruébese que si D_2 se extiende a 0 asignándole el valor cero, entonces es integrable en $[0, 1]$.
   c) Calcular $\int_0^1 D_2(x)dx$.

20. (13 de Marzo de 2014) Sin hacer uso del teorema de Lebesgue de integrabilidad Riemann, probad que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann entonces el producto fg también lo es.

   Indicación.- Comenzar con el caso $f = g$ y siendo $f > 0$ en $[a, b]$. Luego demostrar el caso $f < 0$, y finalmente f arbitraria para probar que f^2 es integrable. Con todo lo anterior probar el caso general.

21. (13 de Marzo de 2014) Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

   a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,
   b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$,
   c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$.

22. (16 de Marzo de 2014) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

   a) Calcule $\lim_{x\to 0} F(x)$. Definiendo $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x)$ pruebe que la función así definida en $\mathbb{R}$ es continua.

b) Pruebe que F es derivable $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y calcule su derivada.

23. (16 de Marzo de 2014) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y monótona creciente. Pruebe que la función definida por
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
verifica
$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) \text{ para todo } x, y \in [a, b]$$
¿Es cierto el resultado si f es únicamente continua?

24. (16 de Marzo de 2014) Calcular $\int_a^b xe^x dx$.

25. (16 de Marzo de 2014) Calcular $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

26. (16 de Marzo de 2014) Calcular el área de una elipse.

27. (16 de Marzo de 2014) Calcular el volúmen de una esfera.

28. (24 de Marzo de 2014) Calcular
$$\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x}\, dx.$$

29. (24 de Marzo de 2014) Calcular
$$\int \frac{3x^2 + 5x + 2}{(x-1)^3}\, dx$$

30. (31 de Marzo de 2014) Calcular
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} dx$$

31. Última clase antes de vacaciones Función Gamma.

32. (5 de Mayo de 2014) Obtener el radio de convergencia de las series que siguen y analizar su comportamiento en la frontera del intervalo o disco de convergencia:
    - $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$;
    - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$;
    - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

33. (14 de Mayo de 2014) Obtener el radio de convergencia de las series que siguen:
    a) $\sum n^n x^n$,
    b) $\sum n(x+2)^n$,
    c) $\sum \frac{2^n}{3n+1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$,
    d) $\sum \log(n)(x-1)^n$.