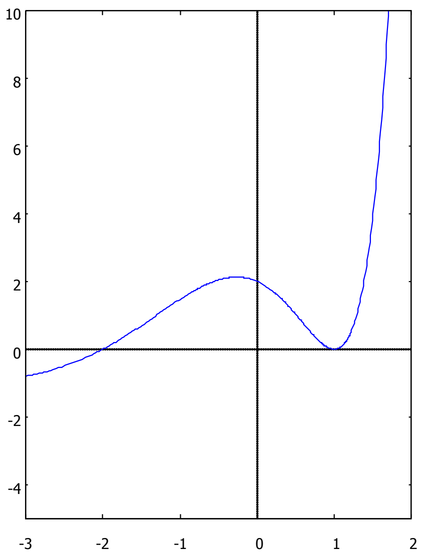
Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Curso 2013-14
Conocimientos previos. Autoevaluación
Murcia, 30 de enero de 2014

Lo básico y que hay que saber hacer

1. La siguiente gráfica se corresponde con la de la derivada de una función $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$. Responde, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:



a) f es estrictamente creciente en $(1, 2)$.

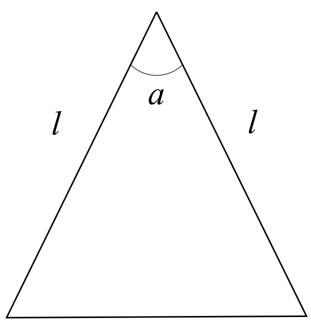
b) f posee un mínimo relativo en $x = 1$.

c) f posee un mínimo relativo en $x = -2$.

d) f es estrictamente creciente en $(-3, -1)$.

e) Si $f(-2) > 0$ entonces $f(x) > 0 \ \forall x \in (-3, 2)$.

2. Halla el valor del ángulo a para que el triángulo isósceles cuyos lados iguales son de longitud l tenga área máxima.



3. Prueba que la ecuación $e^x = x$ no posee ninguna raíz real.

Para pensar un poco más

4. Para cada número natural n, sea $f_n : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Definimos $h_n(x) := \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$. Prueba que las funciones h_n son continuas en $[0,1]$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. ¿Es continua $h(x) := \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$?

   Indicación: usa la fórmula $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ y luego inducción.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$. Demuestra que $S = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ es vacío o un conjunto finito.

   ¿Podemos llegar a la misma conclusión para el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$?

   ¿Conoces alguna función derivable tal que $\{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ sea un conjunto infinito?

6. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en 0 con $g(0) = g'(0) = 0$. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Prueba que f es continua y derivable en 0 y calcula $f'(0)$.

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2|\cos(\frac{\pi}{x})| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   ¿Es f derivable en $x = 0$? Prueba que en cualquier entorno de cero hay puntos donde f no es derivable. Usa Maxima para hacerte una idea del comportamiento de la función y averiguar donde no hay derivabilidad.

8. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y sea $x_0 \in (a, b)$. Si $x \in (a, b)$ (supongamos que $x > x_0$) entonces existe $c(x) \in (x_0, x)$ tal que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c(x))$. Hagamos x tender a x_0; entonces $f'(c(x)) \to f'(x_0)$. Por lo tanto f' es continua en x_0. ¿Es válido el razonamiento? ¿Puedes dar una función que no cumpla la tesis?

Para reflexionar

Si $\Omega \subset \mathbb{R}$, el objetivo de las asignaturas FUVR1 y FUVR2 es el estudio de propiedades de los elementos del conjunto $\mathbb{R}^\Omega = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}$. A continuación vamos a definir algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^\Omega$.

- $C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ es continua en } \Omega\}$.
- $B(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ es acotada en } \Omega\}$.
- $UC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ es uniformemente continua en } \Omega\}$.
- $D(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ es derivable en } \Omega\}$.
- $Vi(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ satisface la propiedad de los valores intermedios en } \Omega\}$.
- $De(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \text{ existe } g \in D(\Omega) \text{ tal que } g'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \Omega\}$.

Si Ω es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}$ poco podemos averiguar sobre las propiedades de una función. Por ejemplo: si c es un punto aislado de Ω entonces cualquier función definida en Ω es continua en c (¿lo tienes claro?). Otro ejemplo: si $f \in D(\Omega)$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, f no tiene por qué ser constante en Ω (¿está claro?). Así que vamos a fijar nuestra atención allí donde podemos obtener propiedades globales de las funciones.

Sean $a < b$ números reales. Denotaremos por $I = (a, b)$ y $J = [a, b]$. A continuación vamos a repasar qué relación hay entre estos conjuntos dependiendo de que $D = (a, b)$ o sea $D = [a, b]$. ¿Te atreves a hacer las pruebas sin consultar bibliografía?

5. En cada uno de los apartados averigua qué resultado (definición, proposición, teorema...) nos garantiza la inclusión y aporta ejemplos que muestren que dichas inclusiones son estrictas (donde sea pertinente).

   a) $C(J) = UC(J)$ (nota que hay dos inclusiones).

   b) $C(J) \subset B(J)$.

   c) $C(J) \subset Vi(J)$.

   d) $D(J) \subset C(J)$ (la derivada en los extremos del intervalo se entiende como la derivada lateral correspondiente).

6. En cada uno de los apartados averigua qué resultado (definición, proposición, teorema...) nos garantiza la inclusión y aporta ejemplos que muestren que dichas inclusiones son estrictas (donde sea pertinente).

   a) $UC(I) \subset C(I)$.

   b) $C(I) \not\subset B(I)$ (ejemplo que muestre que no se da la inclusión).

   c) $C(I) \subset Vi(I)$.

   d) $D(I) \subset C(I)$.

   e) $De(I) \subset Vi(I)$ (aquí es complicado encontrar $f \in Vi(I)$ tal que $f \notin De(I)$; un ejemplo lo veremos más adelante en el curso).

   f) Si $f \in D(I)$ y $f' \in B(I)$ entonces $f \in UC(I)$.