Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de variable compleja
Control 1— 30-11-2012

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. Sea $z = -2 - 2i \in \mathbb{C}$, entonces:

   a) $z\overline{z} = 8$ y $-\pi/4$ es argumento de $\overline{z}$.

   b) El módulo de z es $\sqrt{8}$ y $5\pi/4$ es argumento de z. ____ Correcta

   c) El módulo de $\overline{z}$ es $\sqrt{4}$ y $3\pi/4$ es argumento de $\overline{z}$.

   d) El módulo de $1/z$ es $1/\sqrt{8}$ y $3\pi/4$ es argumento de $1/z$. ____ Correcta

   e) $z\overline{z} = 8$ y $3\pi/4$ es argumento de $\overline{z}$. ____ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? ($\log(z)$ representa el conjunto de los logaritmos de z y $\mathrm{Log}(z)$ el logaritmo principal de z. $\mathrm{Arg}(z)$ es el argumento principal de z)

   a) Si $w \in \log(1-i)$ entonces $|w| = \frac{1}{2}\log 2$ y $\mathrm{Arg}(w) = -\frac{\pi}{4}$. ____ Correcta

   b) $e^{\mathrm{Log}(z)} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ____ Correcta

   c) $\mathrm{Log}(e^z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   d) $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$.

   e) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$. ____ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   a) e^z es inyectiva en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Re}\, z < \beta\}$, siendo $\beta - \alpha < 2\pi$.

   b) e^z es la única función analítica en $\mathbb{C}$ que verifica: $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$. ____ Correcta

   c) $\mathrm{Re}(\cos z) \geq -1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   d) $\cos(z) = \cosh(iz)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ____ Correcta

   e) Si $\cos(z+w) = \cos(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $w = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ una transformación de Möbius. Entonces:

   a) Si $T(D(0,1)) = D(0,1)$ y $T(a) = 0$ entonces $T(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

   b) Si $T(D(0,1)) = D(a,r)$ y $T(b) = a$ entonces $T(1/\overline{b}) = \infty$ ____ Correcta

   c) Si $S_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ entonces $(S_a)^{-1}(z) = S_{-a}(z)$. ____ Correcta

   d) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y existe $z_0 \in D(a,r)$ tal que $|T(z_0) - b| > \rho$ entonces $T(D(a,r)) = \{z : |z-b| > \rho\}$.

   e) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y se verifican $T(a) \in \mathbb{C}$, $|T(a) - b| > \rho$ entonces existe r', con $0 < r' < r$, tal que $T(\partial D(a,r'))$ es una recta. ____ Correcta

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, pedreno@um.es

f) Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre series de potencias son ciertas?

   a) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ es tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en $\overline{D(0,1)}$.
   Correcta

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n$ converge, entonces el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es mayor o igual que $|z_0|$.
   Correcta

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n$ diverge, entonces el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es menor que $|z_0|$.

   d) Si $\rho > 0$ es el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n$ converge, siendo $|z_0| = \rho$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : z = \lambda z_0, \lambda \in [-1,1]\}$.

   e) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica en Ω. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es cierto que implica que f es constante.

   a) $f(\Omega)$ está contenido en una circunferencia.______ Correcta

   b) $f(\Omega)$ está contenido en una recta.______ Correcta

   c) $f(\Omega)$ está contenido en una conjunto del tipo $\{x + iy : y = \alpha x^2\}$.______ Correcta

   d) f es constante en una circunferencia $\partial D(a,r) \subset \Omega$.______ Correcta

   e) $|f|$ es constante en una circunferencia $\partial D(a,r) \subset \Omega$.

   f) Ninguna de las anteriores.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, con $u(x+yi) = \operatorname{Re} f(x+yi)$ y $v(x+yi) = \operatorname{Im} f(x+yi)$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre f son ciertas?

   a) Si f es holomorfa en un punto entonces también lo son u y v en dicho punto.

   b) Si u y v tienen derivadas parciales continuas respecto a x e y en todo Ω entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

   c) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a)i$.______ Correcta

   d) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)i$.

   e) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - \frac{\partial u}{\partial y}(a)i$.______ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

8. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, denotaremos por L_f una rama continua del logaritmo de f, definida en cada caso cómo y dónde se indique. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas?

   a) Si L_f existe en el abierto $U \subset \Omega$ entonces $L_f \in \mathcal{H}(U)$.______ Correcta

   b) Si $f(z) = z^3$ y $\Omega = \mathbb{C}$ entonces existe un disco $D(0,r)$ donde existe L_f.

   c) Si $f(z) = z$ y $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log}(z) + (2k+1)\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

   d) Si $f(z) = z^2 + 1$ y $\Omega = D(0,1)$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log}(z^2+1) + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Correcta

   e) Si $f(z) = \frac{z-i}{1-z}$, $\Omega = D(0,1)$ y $L_f(0) = 0$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log} \frac{z-i}{1-z}$.

f) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, entonces:

   a) Si $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$ y f no es constante, entonces f se anula en algún punto.________Correcta

   b) Si f no es constante entonces $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$.

   c) Si existe $r > 0$ tal que $f(\mathbb{C}) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} = \emptyset$ entonces f es constante.________Correcta

   d) Si $|\operatorname{Im} f(z)| > \varepsilon > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces f es constante.________Correcta

   e) Si $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$ entonces f es constante.________Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

10. Sea $\sim C_2(t) = 2e^{-it}$, $C_4(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entonces:

    a) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\sim C_2} \frac{f(z)}{z - 3i}\, dz = 0$.________Correcta

    b) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\sim C_2} \frac{f(z)}{z - 3i}\, dz = f(3i)$.

    c) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_4} \frac{f(z)}{z - 3i}\, dz = 0$.

    d) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_4} \frac{f(z)}{z - 3i}\, dz = f(3i)$.________Correcta

    e) Ninguna de las anteriores.