El objetivo ahora es demostrar la siguiente caracterización de los abiertos simplemente conexos:

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\operatorname{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.
8. Ω es logarítmicamente conexo.
9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

FINAL

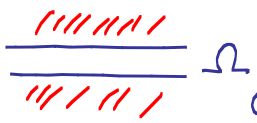
Empezamos por aclarar cada uno de los conceptos involucrados: una vez que hayamos hecho esto, demostraremos la equivalencia entre todas las propiedades:

1.- Ω homeomorfo a $D(0,1)$, quiere decir que existe una función biyectiva $f: \Omega \longmapsto D(0,1)$ continua con inversa f^{-1} continua.

2.- Ω es simplemente conexo, por definición, si cada camino cerrado en Ω es homotópico a una cte: al acabar este recordatorio de propiedades haremos un repaso más exhaustivo de la noción de abierto simplemente conexo.

3.- Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero, significa que cada camino cerrado γ en Ω no da vueltas alrededor de los puntos de $\mathbb{C}\setminus\Omega$.

4.- $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, significa que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ no se puede poner como unión de dos cerrados de $\mathbb{C}_\infty$ no triviales y disjuntos: hemos de notar que aquí la hipótesis $\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega$ conexo NO SE PUEDE REEMPLAZAR por $\mathbb{C}\setminus\Omega$ es conexo:



una banda horizontal es simp. conexo pero $\mathbb{C}\setminus\Omega$ no es conexo.

5.- Lo que escribimos aquí, es la validez de la fórmula de Cauchy para todas las funciones y ciclos en Ω.

6.- Igual que en el ítem anterior pero con el Teorema de Cauchy.

7.- Ω holomorficamente conexo $:=$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = f$. en Ω.

8.- Ω logarítmicamente conexo $:=$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $e^{g(z)} = f(z)$ para cada $z \in \Omega$.

9.- Esta condición es la que hemos utilizado como condición suficiente en el T$^{\underline{ma}}$ de Riemann. Para obtener que Ω es conf. equivalente a $D(0,1)$ si $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

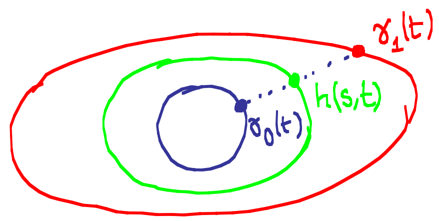
Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

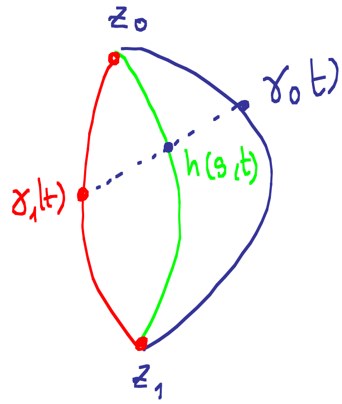
1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = z_0$, $h(s,1) = z_1$ para todo $s \in [0,1]$.

En ambos casos se dice que h es una homotopía entre γ_0 y γ_1.

La noción de homotópia significa que podemos deformar continuamente γ_0 en γ_1, a traves de caminos cerrados si γ_0 y γ_1 son cerrados, o a través de caminos con extremos fijos si γ_0 y γ_1 lo tienen.

Suponemos que $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$





$$h(s,t) := (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t) \qquad \begin{array}{l} 0 \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 1 \end{array}$$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por

$$\Lambda(\Omega) := \{\gamma : [0,1] \to \Omega : \gamma \text{ camino cerrado}\}.$$

$\Lambda(\Omega)$ lo consideramos dotado de la norma del supremo

$$\|\gamma\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |\gamma(t)|.$$

Ejercicio

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos cerrados en Ω. Pruébese que son equivalentes:

1. γ_0, γ_1 son homotópicos como caminos cerrados en Ω.
2. Existe $\gamma : [0,1] \to (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0) = \gamma_0$ y $\gamma(1) = \gamma_1$.

Resolución. $2 \Rightarrow 1$ Si γ es como en 2 el alumno puede comprobar inmediatamente que $h(s,t) := \gamma(s)(t)$ $0 \le s \le 1$ $0 \le t \le 1$, establece una homotopía entre γ_0 y γ_1.

$1 \Rightarrow 2$ si $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una homotopía de caminos cerrados con $h(0,t) = \gamma_0(t)$ y $h(1,t) = \gamma_1(t)$, entonces $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Lambda(\Omega)$ definida por $s \mapsto \gamma(s)$

donde $\gamma(s)(t) := h(s,t)$, es una aplicación continua para $|\cdot| - \|\cdot\|_\infty$.
Esta última afirmación se sigue, como el alumno puede comprobar, de la continuidad UNIFORME de h en $[0,1]\times[0,1]$. #

Lema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y fijemos $a \notin \Omega$. La aplicación $\mathrm{Ind}(.,a) : (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{Z}$, que a cada $\gamma \in \Lambda(\Omega)$ le hace corresponder su índice alrededor de a es localmente constante.

Demostración.- Necesitamos utilizar el resultado que establece que si γ y σ son dos caminos cerrados que no pasan por cero y

[*] $\left\{ |\gamma(t)-\sigma(t)| < |\gamma(t)|+|\sigma(t)| \quad \forall t \in [0,1] \text{ entonces } \mathrm{Ind}(\gamma,0)=\mathrm{Ind}(\sigma,0). \right\}$

Fijamos $\gamma \in \Lambda(\Omega)$: como $a \notin \gamma([0,1])$ tenemos que

$$0 < \varepsilon = \min\{|\gamma(t)-a| : t\in[0,1]\}$$

Si tomamos $B_{\|\cdot\|_\infty}(\gamma, \varepsilon/2) = \{\sigma \in \Lambda(\Omega) : \|\gamma-\sigma\| < \varepsilon/2\}$ entonces

$\sigma \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\gamma, \varepsilon/2) \rightsquigarrow$

$$|\gamma(t)-\sigma(t)| \underset{t\in[0,1]}{\leq} \|\gamma-\sigma\| < \varepsilon/2 < |\gamma(t)-a| \rightsquigarrow$$

$$|(\gamma(t)-a)-(\sigma(t)-a)| < |\gamma(t)-a| \quad \forall t \in [0,1] \overset{[*]}{\rightsquigarrow}$$

$\mathrm{Ind}(\gamma,a) = \mathrm{In}(\sigma,a)$ y así $\mathrm{Ind}(\cdot,a)$ es localmente constante como queremos demostrar.

Proposición

Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ son dos caminos cerrados Ω-homotópicos, entonces son Ω-homólogos.

Demostración.- Sea $a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. Si γ_0, γ_1 son Ω-homotópicos, entonces existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0)=\gamma_0$, $\gamma(1)=\gamma_1$.

Si consideramos

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \longrightarrow & A(\Omega) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(\cdot,a)} & \mathbb{Z} \\ s & \rightsquigarrow & \gamma(s) & \rightsquigarrow & \mathrm{Ind}(\gamma(s),a) \end{array}$$

esta aplicación es localmente constante y por lo tanto continua $\rightsquigarrow$ como $[0,1]$ es conexo, la función es $\underline{\text{cte}}$ y así

$$\mathrm{Ind}(\gamma_0,a) = \mathrm{Ind}(\gamma_1,a) \quad \text{para cada } a \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \ \#$$

Definición

Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado en Ω es Ω-homotópico a un camino constante.

Con esta noción de abierto simplemente conexo es claro que si Ω es simplemente conexo $\rightsquigarrow$ que cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero: esta es la implicación 2 $\Longrightarrow$ 3 en el teorema con $\underline{\underline{9}}$ equivalencias.

Después del trabajo que hemos hecho se tiene como consecuencia:

Teorema de Cauchy

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω, regular a trozos y Ω-homotópico a un camino constante. Se verifica

$$\int_\gamma f(z)dz = 0; \quad \mathrm{Ind}(\gamma,a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \text{ si } a \notin \mathrm{Imagen}(\gamma)$$

Si γ_0, γ_1 son caminos regulares a trozos en Ω, con los mismos extremos, y Ω-homotópicos como caminos con extremos fijos, se cumple

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Vamos a demostrar ahora la caracterización dada en la página 23 con nueve condiciones equivalentes para los abiertos simplemente conexos:

DEMOSTRACIÓN.-

FINAL

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.

Si $\varphi : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ es un homeomorfismo y $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ cerrado en Ω, entonces $\varphi \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow D(0,1)$, es un camino cerrado en Ω que es homotópico a una cte: si $h : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow D(0,1)$ es la homotopía entre $\varphi\circ\gamma$ y una cte, entonces $\varphi^{-1}\circ h : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$ es una homotopía entre γ y un camino cte en Ω.

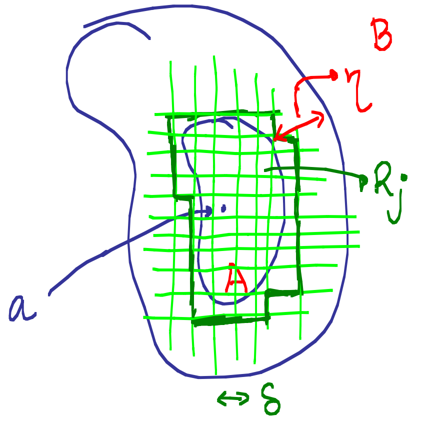
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.

Si $z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ y γ es un camino cerrado en Ω, entonces γ es homotópico a un camino cte $= \gamma_0$ en Ω $\xrightarrow[\text{proposición anterior}]{\text{por una}}$ $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = 0$.

3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Vamos a demostrar que si (4) no se satisface entonces (3) tampoco. Supongamos que $\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega$ no es conexo. Tomemos A, B cerrados en $\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega$ (cerrados en $\mathbb{C}_\infty$) no triviales, tales que $\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega = A\cup B$. Si $\infty\in B \rightsquigarrow A\subset\mathbb{C}$. Así A es cerrado en $\mathbb{C}$; por otro lado es fácil ver que A es acotado (B contiene un entorno de infinito relativo a $\mathbb{C}_\infty\setminus\Omega$ y A está en el complementario). Si llamamos $B_0 = B - \{\infty\}$, entonces $B_0\subset\mathbb{C}$ es cerrado y así podemos tomar

$$0 < \eta < d(A, B_0)$$



Tomemos ahora $0 < \delta < \eta/\sqrt{2}$ y fijado $a \in A$, tomamos una malla como la del dibujo de paso δ de forma que $a \in$ interior de uno de los cuadrados que se obtienen. Consideremos Γ el ciclo formado por las fronteras ∂R_j de todos los rectangulos $R_j \cap A \neq \emptyset$. Se tiene que

$$\text{Ind}(\Gamma, a) = 1$$

Si llamamos Γ' al ciclo que se obtiene cancelando los caminos opuestos de Γ obtenemos $\text{Ind}(\Gamma, a) = 1$ y ademas por las precauciones tomadas $\text{Imagen}(\Gamma') \subset \Omega$, como el alumno puede comprobar: Γ' es el ciclo de este COLOR VERDE en el dibujo de la página anterior.

3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Sea γ un camino cerrado en Ω y sea T la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$: $T \cup \{\infty\}$ es la componente conexa de ∞ en $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{Imag}(\gamma)$. Como $\text{Imagen}(\gamma) \subset \Omega \rightsquigarrow \infty \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \text{Imag}(\gamma)$.

Como $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset T \cup \{\infty\} \rightsquigarrow \mathbb{C} \setminus \Omega \subset T$.

Ahora bien, para cada $z \in T$ sabemos $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$, en particular para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ y así γ es Ω-homólogo.

3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
5. $f(z)\text{Ind}(\Gamma, z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.

Esta es la fórmula de Cauchy: cada ciclo Γ en Ω es Ω-homólogo, y para el tenemos la fórmula de Cauchy para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

5. $f(z)\text{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.

(6) establece la validez del Teorema de Cauchy para cada ciclo Γ y cada función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Cuando se demuestra la fórmula de Cauchy se establece la equivalencia entre (5) y (6)

6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.

Si γ es un camino cerrado en Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0 \rightsquigarrow$ la forma diferencial $\omega(z) = f(z)dz$ es EXACTA en $\Omega \rightsquigarrow \exists F: \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-diferenciable tal que $dF(z) = f(z)dz \longrightarrow F$ es holomorfa y $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

7. Ω es holomórficamente conexo.
8. Ω es logarítmicamente conexo.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$ entonces $\phi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ $z \in \Omega$, $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por lo tanto existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $F'(z) = \phi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para cada $z \in \Omega$. De aquí se tiene que:

$$\left(\frac{f(z)}{e^{F(z)}}\right)' = \frac{f'(z)e^{F(z)} - f(z)\cdot \frac{f'(z)}{f(z)} e^{F(z)}}{(e^{F(z)})^2} = 0 \quad \forall z \in \Omega \rightsquigarrow$$

$$\frac{f(z)}{e^{F(z)}} = \text{cte} \neq 0 \ \forall z \in \Omega \rightsquigarrow \frac{f(z)}{e^{F(z)}} = e^{\mu} \text{ algún } \mu \in \mathbb{C} \rightsquigarrow f(z) = e^{\mu + F(z)} \ \forall z \in \Omega.$$

8. Ω es logarítmicamente conexo.

9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

Si existe $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{\phi(z)} = f$ $\rightsquigarrow$

$g(z) := e^{1/2\,\phi(z)}$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $(g(z))^2 = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.

Si $\Omega = \mathbb{C}$, ya sabemos que Ω es homeomorfo a $D(0,1)$ mediante la aplicación $z \rightsquigarrow \dfrac{z}{1+|z|}$.

Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, el teorema de Riemann asegura que Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$ #