de funciones holomorfas

6/May/2002

Proposición.- Sea $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $0\notin f(\Omega)$. f admite una raíz m-ésima holomorfa en Ω sii $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in \dot{m}$, para cada camino $\gamma\in\Lambda(\Omega)$ de clase C^1 a trozos.

Dem.-

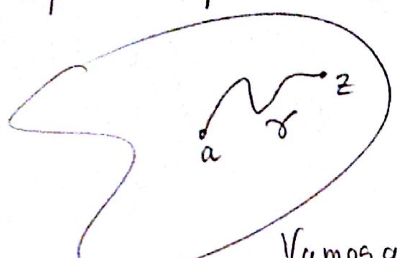
$\Rightarrow$ Sea $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^m=f$ entonces

$$m\,g^{m-1}\cdot g' = f' \xrightarrow[g^m]{\text{div}} m\frac{g'}{g}=\frac{f'}{f}$$ y así se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\, m\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)} = m\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\gamma}\frac{dz}{z} = m\cdot I(g\circ\gamma,0)\in\dot{m}$$

$\Leftarrow$ Recíprocamente podemos suponer que Ω es conexo: definimos

$$F_\gamma(z)=\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw + K \quad \text{donde} \quad e^K=f(a) \text{ fijo}$$



$$F(z)=\{F_\gamma(z):\ \gamma\in\Lambda_a^z(\Omega)\}.$$

Vamos a demostrar que $F(z)\subset \log f(z)$.

Efectivamente, dado $\gamma\in\Lambda_a^z(\Omega)$ se tiene:

$$F_\gamma(z) = \cancel{\frac{1}{2\pi i}}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw + K = \cancel{\frac{1}{2\pi i}}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z} + K = h(1)-h(0)+K = (*)$$

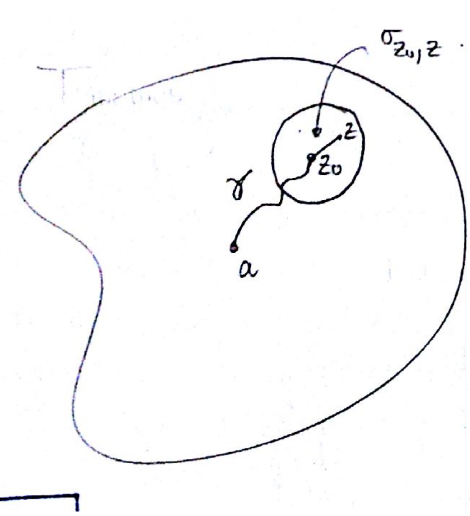
donde $h:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ es un logaritmo de $f\circ\gamma$

$$(*) = h(1)-(K-h(0)) = h(1)+2k\pi i\in\log z.$$

$$e^{h(1)}=f(z)$$
$$e^{h(0)}=f(a)$$

Definimos, $g(z)={}^{1/m\,F(z)}$, y aunque F es multiforme. g es uniforme ya que otro valor para $F(z)$ sobre otro camino difiere en $2mn\pi i$, y así se obtiene que $g(z)$ es uniforme. Falta ver que g es holomorfa: tomemos $z_0\in\Omega$ y $D(z_0,r)\subset\Omega$. Tomemos $z\in D(z_0,r)$ y sea $\sigma_{z_0,z}$ el segmento conectando z_0 y z.

60//



$$g(z)= e^{1/m\left(\int_{\gamma\vee\sigma_{z_0,z}}\frac{f'(w)}{f(w)}\,dw+K\right)} = e^{1/m\left(\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw+K\right)}\cdot e^{1/m\int_{\sigma_{z_0,z}}\frac{f'(w)}{f(w)}\,dw}$$

holomorfa ya que es la primitiva de una función holomorfa en un simplemente conexo. #