Lema 1.- Sea $f \in H(\Omega)$ y $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

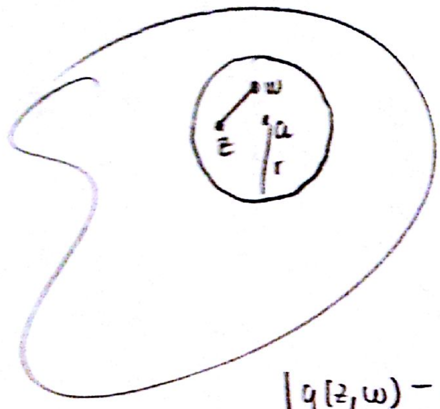
$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

La función g es continua, y si γ es un camino regular a trozos, entonces

$$z \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} \int_\gamma g(z,w)\,dw$$

es holomorfa en Ω.

Dem.- $g(z,w)$ es continua en (z,w) con $z \neq w$. Por otro lado fijado $(a,a) \in \Omega \times \Omega$ existe $D(a,r)$ tal que $z \in D(a,r)$ $|f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$



$(z,w) \in D(a,r) \times D(a,r) \rightsquigarrow |g(z,w) - f'(a)| < \varepsilon$

si $z = w$ es claro

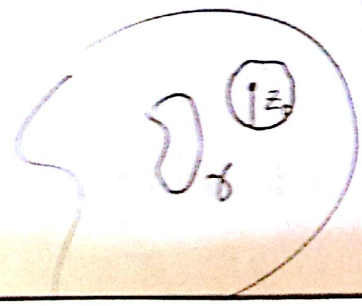
si $z \neq w$ $\sigma(t) = tz + (1-t)w$, y se tiene

$$|g(z,w) - f'(a)| = \left| \frac{1}{z-w}\left(f(z) - f(w)\right) - f'(a) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{z-w} \int_0^1 (f\circ\sigma)'(t)\,dt - f'(a) \right| = \left| \frac{1}{\cancel{z-w}} \int_0^1 f'(\sigma(t))\,\cancel{\sigma'(t)}\,dt - f'(a) \right| = \left| \int_0^1 \left(f'(\sigma(t)) - f'(a)\right) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f'(\sigma(t)) - f'(a)|\,dt \leq \varepsilon$$

Veamos ahora que φ es continua: Tomemos V_{z_0} un entorno compacto de z_0 y $V_{z_0} \times \mathrm{Im}(\gamma) \xrightarrow{g}$ es unif. continua. Dado eso



$$|z - z_0| \leq \delta \;\wedge\; w \in \mathrm{Im}(\gamma) \rightsquigarrow |g(z,w) - g(z_0,w)| < \varepsilon.$$

$\hookrightarrow z \in V_{z_0}$

Por lo tanto

64

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| \leq \int_0^1 |g(z,\gamma(t)) - g(z_0,\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt = \mathrm{Long}(\gamma)\cdot\varepsilon.$$

Ahora se prueba que φ es holomorfa utilizando el teorema de Morera

$$\int_{\partial R} \varphi(z)\,dz = \int_{\partial R}\left(\int_\gamma g(z,w)\,dw\right)dz = \int_\gamma\left(\int_{\partial R} g(z,w)\,dz\right)dw = 0.$$

w fijo

$z \rightsquigarrow$ es holomorfa

\#