Funciones de Variable Compleja. Hoja de problemas 4. **26 de Noviembre de 2011**

1. **Ejercicio**
   Sea Ω un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa que no se anula en Ω. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) f admite un logaritmo holomorfo en Ω;

   (ii) la forma diferencial $w(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ es exacta en Ω.

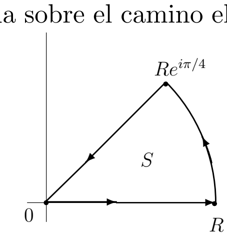
   En el caso anterior cualquier primitiva de $\frac{f'}{f}$ en Ω, modificada restandole una constante es un logaritmo de f.

2. **Ejercicio**
   Pruébese que si $a \in \mathbb{R}$ la integral
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}dx$$
   no depende de a.

   (Indicación: considérese la integral curvilinea $\int_{\partial R} e^{-z^2}dz$ donde R es el rectángulo $[-b, b] \times [0, a]$, y después hágase que $b \to +\infty$).

   Como aplicación pruébese que: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(ux)dx = \sqrt{2\pi}e^{-u^2/2}$.

3. **Ejercicio**
   Calcúlense los valores de las integrales impropias
   $$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx, \ \int_0^{+\infty} sen(x^2)dx$$
   a partir de una integral curvilínea adecuada sobre el camino el camino cerrado indicado en la figura



4. **Ejercicio**
   Calcúlense las siguientes integrales curvilíneas en las que $C_\rho(\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}, 0 \le \vartheta \le 2\pi$ y $\rho > 0$.
   $$\int_{C_1} \frac{e^z}{z}dz; \qquad \int_{C_2} \frac{dz}{z^2+1}$$
   $$\int_{C_1} e^z z^{-n}dz; \qquad \int_{C_1} z^n(1-z)^m dz$$

5. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado regular a trozos en Ω. Demuestre que
   $$\mathrm{Re}\int_\gamma \overline{\mathrm{f(z)}}\mathrm{f'(z)dz} = 0.$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

6. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $|f(z) - 1| < 1$ para cada $z \in \Omega$. Si γ es un camino cerrado regular a trozos en Ω demuestre que
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

7. Ejercicio
Sean P y Q dos polinomios con $grado(Q) - grado(P) \geq 2$. Pruébese que existe $r > 0$ tal que $\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$ para cada camino cerrado exterior al disco $|z| \leq r$.

8. Ejercicio
Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, y $a \in D(0,1)$ un punto tal que $f'(a) \neq 0$. Sea $C_r(\vartheta) = a + e^{i\vartheta}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Pruébese que si r es suficientemente pequeño
$$2\pi i = f'(a) \int_{Cr} \frac{dz}{f(z) - f(a)}$$

9. Ejercicio
Sea f una función entera y $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < R$ y $|b| < R$, para $R > 0$. Evaluese la integral
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$
donde $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Utilicese este resultado para demostrar el Teorema de Liouville.

10. Ejercicio
Dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $\overline{D(0,1)} \subset \Omega$, calcúlese
$$\int_C \frac{\overline{f(z)}}{z-a} dz$$
donde $|a| \neq 1$ y $C(\vartheta) = e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

11. Sea $f(z)$ la rama de la raíz cuadrada de $1-z^2$, definida en $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$, y determinada por $f(2) = -\sqrt{3}i$ (véase **??**). Obtenga el valor de la integral
$$\int_{C_\rho} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}\right) \frac{dz}{f(z)}$$
donde $\rho > 1$, y $C_\rho(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

12. Obtenga el valor de $I = \int_\gamma z^2 e^{1/(z-1)} dz$, donde $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es