Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de Variable Compleja. Hoja de problemas 3. **12 de Noviembre de 2011**

1. **Ejercicio**
   Obtenga la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

2. **Ejercicio**
   Estudie el comportamiento de las series de potencias
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$$
   en la frontera de su disco de convergencia.

3. **Ejercicio**
   Obtenga la reordenación de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ alrededor de $b \in D(0,1)$ y el radio de convergencia de la serie reordenada.

4. **Ejercicio**
   Sea $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para $n \geq 0$. Obtenga el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, la función suma y una fórmula para el término general a_n.

5. **Ejercicio**
   Sea $T(z) = (1+z)/(1-z)$. Compruebe que el dominio de $f(z) = \mathrm{Log}\ \mathrm{T(z)}$ es un abierto que contiene al disco $D(0,1)$. Obtenga el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,1)$.

6. **Ejercicio**
   Obténgase el desarrollo de la función $\dfrac{2z+3}{z+1}$ en serie de potencias de $z-1$. ¿Cual es el radio de convergencia de la serie obtenida?

7. **Ejercicio**
   Pruébese que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n$ converge absoluta y uniformemente sobre el disco cerrado $\overline{D(0,1)}$. Deduzcáse de ello que existe una sucesión de polinomios reales $(p_n(x))$ que converge hacia la función $|x|$, uniformemente sobre el intervalo cerrado $[-1,1]$.

8. **Ejercicio**
   Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$ y $f(z)$ la rama de $\operatorname{arc\,tg} z$ definida en Ω, determinada por la condición $f(0) = 0$. Obtenga el desarrollo en serie de potencias de una rama de $\operatorname{arc\,tg} z$ en el origen.

9. **Ejercicio**
   Calcule los radios de convergencia de las series de potencias,
$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n \log n; & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n; & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^{-n} z^n; \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn+h}; & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} z^n; & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(n!)^{-2} z^n; \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! n^{-n} z^n; & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}; & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n;
\end{array}$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

10. Ejercicio

Sea K un conjunto, (a_n) y (b_n) sendas sucesiones de funciones complejas definidas en K y $f_n(z) = a_n(z)b_n(z)$. Pruébese que cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sea uniformemente convergente sobre K:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ converge uniformemente sobre K.

(b_n) es una sucesión de funciones reales uniformemente acotada sobre K tal que $(b_n(z))$ es monótona para cada $z \in K$.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ converge uniformemente sobre K.

Existe $C > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)| + |b_1(z)| \leq C$ para todo $z \in K$

c) La sucesión $(\sum_{n=1}^{m} a_n(z))$ está uniformemente acotada sobre K.

(b_n) es una sucesión de funciones reales que converge hacia 0 uniformemente sobre K y tal que $(b_n(z))$ es monótona para cada $z \in K$.

d) La sucesión $(\sum_{n=1}^{m} a_n(z))$ está uniformemente acotada sobre K.

La sucesión (b_n) converge uniformemente hacia cero sobre K y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)|$ converge uniformemente sobre K.

Indicación: Utilicese la formula de sumación parcial de Abel

$$F_n^m(z) = b_m(z)A_n^m(z) + \sum_{n}^{m-1} A_n^j(z)(b_j(z) - b_{j+1}(z))$$

donde $F_n^m(z) = \sum_{j=n}^{m} f_j(z)$ y $A_n^m(z) = \sum_{j=n}^{m} a_j(z)$, $n < m$ y $z \in K$, para probar que se cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sobre K.

11. Ejercicio

Sea (a_n) una sucesión decreciente de números reales convergente hacia cero. Pruébese que para cada δ , $0 < \delta < \pi$, la serie

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots$$

converge uniformemente sobre $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es