Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de Variable Compleja. Curso 2012–13. Hoja de problemas 2.
22 de octubre de 2012

1. Encontrar la forma de todas las transformaciones de Möbius que llevan el semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ en el disco unidad $D(0,1)$.

2. Encontrar la forma de todas las transformaciones de Möbius que dejan invariante el semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

3. Sea C la circunferencia imagen de $|z-1| = \sqrt{2}$ mediante la transformación $T(z) = (z-1)/(z-3)$. Utilice el principio de simetría para determinar el centro de C.

4. Utilice el principio de simetría para determinar $S(\Omega_1)$ y $T(\Omega_2)$ donde

$$\begin{array}{ll} S(z) = (z-i)/(z+i), & \Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}; \\ T(z) = z/(z-1), & \Omega_2 = \{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4}\} \end{array}$$

5. En cada caso obtenga una transformación de Möbius T con $T(\Omega) = G$:

   i) $\Omega = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $\quad G = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

   ii) $\Omega = \{z : |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad G = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

   Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pruébese la equivalencia de las condiciones siguientes:

6. *a*) f es constante;

   b) $\operatorname{Re}(f)$ es constante;

   c) $\overline{f}$ es holomorfa;

   d) $|f|$ es constante;

   e) $|f|$ es holomorfa;

   f) Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, y $\alpha \cdot \operatorname{Re} f + \beta \cdot \operatorname{Im} f$ es constante.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Re}(f)^2$. Pruébese que f es constante.

8. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sean $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que u y v son armónicas, es decir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

   ¿Existe f holomorfa en algún abierto Ω tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = \frac{x}{x^2-y^2}$?

9. Encuentre una función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

   a) $f(x+iy) = x^2 - y^2 + ig(x,y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$.

   b) $f(x+iy) = g(x,y) + i(x+y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$.

   c) $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2y + y^3 + x^2 - y^2 - 2xy + ig(x,y)$ se holomofa en $\mathbb{C}$.

   En cada uno de estos dos casos, ¿existe una única g? ¿Si no es única, cuál es la relación entre dos de ellas?

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es