Funciones de Variable Compleja. Hoja de problemas 1. **27 de Septiembre de 2011**

1. ***Ejercicio***
   Pruébese que si a, b son números complejos se verifica la identidad del paralelogramo
   $$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$
   Como aplicación obténgase el mínimo valor de $|z-a|^2 + |z-b|^2$ cuando a y b están fijos y z varía en $\mathbb{C}$.

2. ***Ejercicio***
   Pruébese que:
   a) $|a-b| < |1-\overline{a}b|$ *si* $|a| < 1$ *y* $|b| < 1$*;*
   b) $|a-b| = |1-\overline{a}b|$ *si* $|a| = 1$ *ó* $|b| = 1$.

3. ***Ejercicio***
   Determínense geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:
   a) $\{z : \mathrm{Im}\,(\frac{\mathrm{z}-\mathrm{a}}{\mathrm{b}}) = 0\}$, $\{z : \mathrm{Im}\,(\frac{\mathrm{z}-\mathrm{a}}{\mathrm{b}}) > 0\}$, $a, b \in \mathbb{C}$*;*
   b) $\{z : \mathrm{Re}\,(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}) = 1\}$, $\{z : \mathrm{Re}\,(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}) > 1\}$, $b \in \mathbb{C}$*;*
   c) $\{z : |z|^2 - \mathrm{Re}\,(\overline{\mathrm{a}}\mathrm{z}) + \alpha = 0\}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$*;*
   d) $\{z : |z-a| = \alpha|z-b|\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$*;*
   e) $\{z : |z-a| = |1-\overline{a}z|\}$, $|a| < 1$.

4. ***Ejercicio***
   Pruébese la igualdad de Lagrange (para números complejos):
   $$|\sum_{1\le i\le n} a_i b_i|^2 = (\sum_{1\le i\le n} |a_i|^2)(\sum_{1\le i\le n} |b_i|^2) - \sum_{1\le i<j\le n} |a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}|^2$$

5. ***Ejercicio***
   Circunferencias en el plano complejo:
   a) Pruébese que la forma general de la ecuación de una recta o circunferencia del plano complejo es
   $$A\overline{z}z + Bz + C\overline{z} + D = 0,$$
   donde los coeficientes A y D son reales, B y C son complejos conjugados y $AD - BC < 0$ (Cuando $A = 0$ se obtiene una recta, y cuando $A \neq 0$ resulta una circunferencia de centro $z_0 = -C/A$ y radio $\rho = \sqrt{BC-AD}/|A|$).
   b) Sean C_i, $i = 1, 2$ dos circunferencias en el plano complejo de ecuaciones respectivas $A_i\overline{z}z + B_iz + C_i\overline{z} + D_i = 0$, donde A_i, D_i son reales, C_i, B_i complejos conjugados y $A_iD_i - B_iC_i < 0$. Pruébese que la condición necesaria y suficiente para que C_1 y C_2 se corten ortogonalmente es que se cumpla:
   $$A_1D_2 + A_2D_1 \;=\; B_1C_2 + B_2C_1.$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

6. Ejercicio

Dada la circunferencia $S = \{z : |z-a| = R\}$, el simétrico de $b \in \mathbb{C}$, $b \neq a$, respecto a S es el único punto de la semirrecta $L(a,b) = \{a + t(b-a) : t \geq 0\}$ que cumple $|b-a||b^*-a| = R^2$). Viene dado por

$$b^* = a + \frac{R^2}{\bar{b} - \bar{a}} = a + \frac{R^2}{|b-a|^2}(b-a)$$

Se completa la definición de simetría con $a^* = \infty$ y $\infty^* = a$.

i) Indique un procedimiento geométrico para obtener el simétrico de un punto respecto a una circunferencia.

ii) Demuestre que la familia de las circunferencias que pasan por $b \notin S$ y su simétrico b^* coincide con la familia de las circunferencias ortogonales a S que pasan por b.

iii) Deduzca que la simetría transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales y que las circunferencias ortogonales a S se transforman en sí mismas.

7. Ejercicio

Sea (E,ρ) un espacio métrico. Si A, B son subconjuntos no vacíos de E y $x \in E$ se define

$$\rho(x,B) = \inf\{\rho(x,b) : b \in B\}; \quad \rho(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

a) Pruébese que $x \to \rho(x,A)$ es una función continua y que $x \in \overline{A}$ si, y sólo, si $\rho(x,A) = 0$.

b) Pruébese que si (E,ρ) es el espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$ y A se supone cerrado entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,A) = d(x,a)$.

c) Pruébese que si A es compacto entonces $d(A,B) = d(a,B)$ para algún $a \in A$. Dedúzcase de ello que si A es compacto y B es cerrado entonces $d(A,B) > 0$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$. Muéstrese con un ejemplo que el rresultado es falso si sólo se supone que A y B son cerrados.

8. Ejercicio

Sea X un subconjunto de $\mathbb{C}$ y A una parte conexa de $\mathbb{C}$ que tiene intersección no vacía con el interior de X y con su exterior. Pruébese que A contiene algún punto de la frontera de X.

9. Ejercicio

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y M un subconjunto de Ω que no tiene puntos de acumulación en Ω.

a) Pruébese que M es numerable y que $\Omega \setminus M$ es abierto.

b) Pruébese que si Ω es conexo entonces $\Omega \setminus M$ también lo es.

10. Ejercicio

Si Ω es un subconjunto abierto del plano complejo se considera la sucesión de conjuntos

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\}.$$

Pruébese que K_n es una sucesión de conjuntos compactos que recubre Ω y verifica $K_n \subseteq \overset{o}{K}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Deducir de aquí que para cada subconjunto compacto K de Ω, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es