Examen Final: Funciones de Variable Compleja (Grado en Matemáticas) e Introducción al Análisis Complejo (Licenciatura en Matemáticas) **6 de junio de 2012**

Alumna/o:

TEORÍA (1.5 puntos)

Formas diferenciales complejas:

1. (0.2 puntos) Dar la definición de forma cerrada y exacta.
2. (0.4 puntos) Enunciar los principales resultados sobre formas cerradas y exactas.
3. (0.9 puntos) Enunciar y demostrar el teorema de Cauchy-Goursat.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

TEORÍA (1.5 puntos)

1. (0.3 puntos) Definición de singularidad aislada.
2. (0.5 puntos) Clasificación de dichas singularidades.
3. (0.7 puntos) Enunciar y demostrar la caracterización de una de las clases de singularidades aisladas.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

Cuestiones Cada cuestión vale **0.5 puntos**. Marcar sólo las afirmaciones verdaderas en cada cuestión: no se debe escribir explicación alguna ni indicar cuáles son las falsas.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, con $u(x+yi) = \quad f(x+yi)$ y $v(x+yi) = \Im f(x+yi)$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre f son ciertas?

   a) Si f es holomorfa en un punto entonces también lo son u y v en dicho punto.

   b) Si u y v tienen derivadas parciales continuas respecto a x e y en todo Ω entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

   c) Si f es $\mathbb{R}$-diferenciable en $a \in \Omega$ y $df(a)(i) = i\, df(a)(1)$ entonces f es holomorfa en a.

   d) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)i$.

   e) Si f es holomorfa en Ω entonces $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en todo Ω.

   f) Si Ω es conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es constante

   g) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y $a \in \mathbb{C}$ con $|a| \quad 1$. Se reordena la serie alrededor de a, obteniendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un $\rho > 0$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en el disco $|z-a| < \rho$. Entonces:

   a) El radio de convergencia de la nueva serie es siempre $1 - |a|$.

   b) El radio de convergencia de la nueva serie es siempre $|1 - a|$.

   c) El radio de convergencia de la nueva serie es siempre $\max\{|1-a|, 1-|a|\}$.

   d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (1-a)^{-(n+1)}$.

   e) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|1-a|}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

3. Sea C_r el camino dado por $C_r(\theta) = re^{i\theta}$, para $\theta \in [0, 2\pi]$, $r > 0$. Indique cuáles de las igualdades siguientes son correctas:

   a) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i.$

   b) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^z}{z^2}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$ $\longrightarrow$ errata en ambos casos es $\displaystyle\int \frac{e^z}{z^n}$ (en lugar de $\displaystyle\int \frac{e^z}{z^2}$)

   c) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{e^z}{z^2}\, dz = 2\pi i.$ $\longrightarrow$

   d) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}\, dz = 0.$

   e) $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^2+1}\, dz = 2\pi.$

   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

Explicación breve del test

1. (a) Sabemos que una función holomorfa en un abierto Ω y a valores reales es necesariamente constante en cada componente conexa de Ω

(b) La hipótesis nos dice que f es $\mathbb{R}$-diferenciable, pero no necesariamente holomorfa

(c) La condición $df(a)(i) = i\, df(a)(1)$ es suficiente para que $df(a)$ sea $\mathbb{C}$-lineal. Así

$\mathbb{R}$-diferenciable + $df(a)$ $\mathbb{C}$-lineal $\Rightarrow$ f holomorfa en a

(Cond. de Cauchy-Riemann)

(d) La buena fórmula es:

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(a) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

(e) Si $f, \bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow 2\,\mathrm{Re} f = f + \bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$

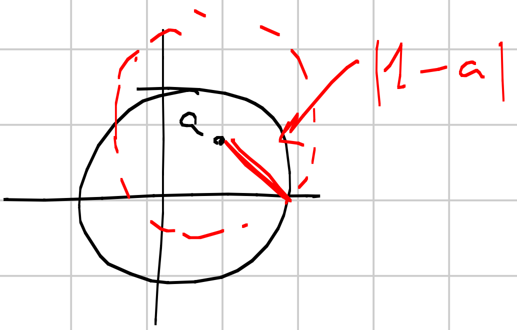
$\Rightarrow f$ es constante (apart. a))

(2) Obsérvese que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{1\})$$

(b) es cierta pues sabemos que si f es holomorfa en $\Omega \Rightarrow f$ es desarrollable en serie de potencias una convergente en el mayor disco contenido en Ω

$\Rightarrow f$ es desarrollable alrededor de a con convergencia en el disco de radio $|1-a|$



(c) es cierto pues $\max\{|1-a|, 1-|a|\} =$

$= |1-a| \quad \forall a\in\mathbb{C}$

(d) Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ entonces

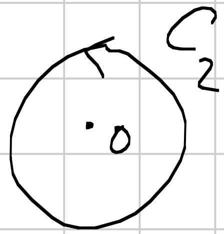
$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Así, basta derivar n veces $f(z)=\frac{1}{1-z}$ y se obtiene la igualdad

(e) No es más que la fórmula de Hadamard para el radio de convergencia y el apartado (b)

(3) (a) Es la fórmula integral de Cauchy

$$\int_{C_2} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i$$



(b) Si f es holomorfa en $D(a,r)$ y $\rho<r$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \frac{e^z}{z^n}\, dz = 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (e^z) \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

(c) Falso (ver (b))

(d) $$\frac{1}{z^2+1} = \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{2i} \left(\int_{C_2} \frac{1}{z-i}\, dz - \int_{C_2} \frac{1}{z+i}\, dz \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{2i} \left(\mathrm{Ind}(C_2, i) - \mathrm{Ind}(C_2, -i) \right)$$

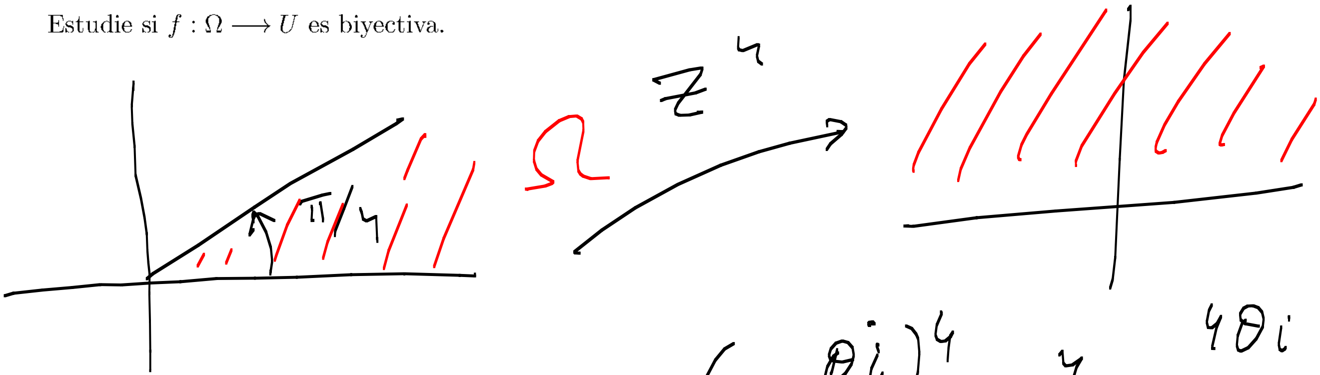
$$= 0$$

Problema 1 (1.5 puntos)

Determine la imagen $U = f(\Omega)$, siendo $\Omega = \left\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right\}$ y f la aplicación

$$f(z) = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$$

Estudie si $f : \Omega \longrightarrow U$ es biyectiva.



Basta observar que: $(re^{\theta i})^4 = r^4 \cdot e^{4\theta i}$

Si $r > 0 \Rightarrow r^4 > 0$ (arbitrario)

Si $0 < \theta < \pi/4 \Rightarrow 0 < 4\theta < \pi$

Ahora $f(z) = T(z^4)$ con $T(w) = \dfrac{w-i}{w+i}$

que es una transf. de Möbius.

$T(0) = -1$, $T(1) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$,

$T(-1) = \dfrac{-(1+i)}{-1+i} = i$

$\Rightarrow T(\mathbb{R}) = \{z : |z| = 1\}$

Como $T(i) = 0$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

Entonces $T(\{z : \operatorname{Im} z > 0\}) = D(0,1)$

Así $f(\Omega) = U = D(0,1)$

f es inyectiva, pues T lo es y z^4 lo es en Ω:

si $(re^{i\theta})^4 = (se^{i\eta})^4 \Rightarrow r^4 = s^4 \Rightarrow r = s$
$(r,s) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4\theta = 4\eta \pmod{2\pi} \\ 0 < \theta < \pi/4 \\ 0 < \eta < \pi/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \eta$$

Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Problema 2 (2 puntos)

Indique un abierto Ω de $\mathbb{C}$, con $\Omega \supset D(0,1)$, $\Omega \neq D(0,1)$, en el que se pueda asegurar la existencia de una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando las siguientes propiedades:

1. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,
2. $(f'(z))^2 = \dfrac{1}{1-z^2}$, para todo $z \in \Omega$.

Justifique que f queda unívocamente determinada por las condiciones anteriores y que sen $f(z) = z$ para cada $z \in \Omega$.

Puesto que buscamos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(f'(z))^2 = \dfrac{1}{1-z^2}$, debe existir en Ω una raíz cuadrada holomorfa de $1/_{1-z^2} = h(z)$

Sabemos que esto es cierto si:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} = \text{múltiplo de } 2, \quad \forall \gamma \text{ camino cerrado en } \Omega$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{2z}{1-z^2}\,dz =$$

$$= \int_\gamma \frac{dz}{1-z} - \int_\gamma \frac{dz}{z+1} = -2\pi i\Big(\operatorname{Ind}(\gamma,1) + \operatorname{Ind}(\gamma,-1)\Big)$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

Entonces, si aseguramos que $\forall \gamma \subset \Omega$ cerrado

$$\mathrm{Ind}(\gamma, 1) = \mathrm{Ind}(\gamma, -1)$$

tendremos $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'/f = \, ?$

Para ello debemos asegurar que $1, -1$ pertenezcan a la misma componente conexa del complementario de γ

Un ejemplo de tal abierto es

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

En Ω hay raíz cuadrada holomorfa de $1/(1-z^2)$, llamémosla g

Ahora queremos que exista $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f' = g$.

Pero con el abierto elegido, toda holomorfa tiene primitiva, ya que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Ahora podemos elegir la raíz g tal que $g(0) = 1$ (la otra raíz verificará $g(0) = -1$).

Y podemos elegir la primitiva de g de modo que valga 0 en 0. Así todas las propiedades quedan satisfechas.

Además determinan f de forma única pues Ω es convexo y así sólo hay una rama de la raíz que vale 1 en 0 y sólo una primitiva de g que valga 0 en 0.

Probar que $\operatorname{sen} f(z) = z$ es más delicado con las herramientas que tenemos (se simplifica con el teorema de la función inversa).

Si suponemos que existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{sen} h(z) = z$, entonces probamos que $h(z) + k\pi = f(z)$

En efecto: $\operatorname{sen} h(0) = 0 \Rightarrow h(0) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Añadiendo un múltiplo de $k\pi$ podemos suponer que $h(0) = 0$.

Ahora derivando: $(\operatorname{sen} h(z))' = 1$

$\rightarrow (\cos h(z)) \cdot h'(z) = 1 \rightarrow h'(0) = 1$

$\rightarrow (h'(z))^2 = \dfrac{1}{\cos^2 h(z)} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 h(z)} = \dfrac{1}{1 - z^2}$

$\rightarrow h \equiv f$

Observación. La existencia de h puede obtenerse directamente (pero no se exige en el examen)

Problema 3 (2 puntos)

Considerando la función

$$\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$$

calcule la integral

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$$

El ejercicio está resuelto en la página 21 de

http://webs.um.es/beca/Docencia/1112.fvc/Problemas%20Escaneados.pdf

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es