Examen Final: Funciones de Variable Compleja (Grado en Matemáticas) e Introducción al Análisis Complejo (Licenciatura en Matemáticas) **24 de Enero de 2012**

Alumna/o:

TEORÍA (1.5 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función.

1. (0.25 puntos) Dar la definición de *"f es $\mathbb{R}$-diferenciable en a".*
2. (0.25 puntos) Dar la definición de *"f es holomorfa en a".*
3. (0.75 puntos) Enunciar y demostrar las condiciones de Cauchy Riemann.
4. (0.25 puntos) Dar un ejemplo de una función que satisface 1. y no 2.

TEORÍA (1.5 puntos)

1. (0.5 puntos) Dar la definición de *"residuo"*. Probar que si $f, g \in \mathcal{H}(D(a,r)),\ r > 0,\ f(a) \neq 0$ y $g(a) = 0$ con multiplicidad $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m \frac{f(z)}{g(z)} \right].$$

2. (1 punto) Enunciar y demostrar el teorema de los residuos.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es and pedreno@um.es

Cuestiones Cada cuestión vale **0.5 puntos**. Marcar las soluciones correctas en cada cuestión: no es necesario escribir explicación alguna.

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre series de potencias son ciertas?

   a) Si $(a_n)_n$ en $\mathbb{C}$ es tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad +\infty$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en $\overline{D(0,1)}$.

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $\overline{D(0,1)}$.

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en $D(0,1)$.

   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge puntualmente en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge puntualmente en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{1\}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $a \in D(0,1)$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset D(0,1)$ y $\gamma_{a,r}$ el camino en $D(0,1)$ dado por $\gamma_{a,r}(t) = a + re^{it}$. Entonces:

   a) De la fórmula integral de Cauchy (es decir, para toda $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{g(z)}{z-a}\, dz$) para cada $\overline{D(a,r)} \subset D(0,1)$ se puede deducir el teorema de Cauchy, es decir, se puede deducir que $0 = \int_{\gamma_{a,r}} g(z)\, dz$, siendo $\overline{D(a,r)} \subset D(0,1)$, para toda $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$.

   b) Para cada $\overline{D(a,r)} \subset D(0,1)$ y cada $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ se tiene que $g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{it}) dt$.

   c) Si $u : D(0,1) \to \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa en $D(0,1)$, entonces para cada $\overline{D(a,r)} \subset D(0,1)$ se tiene que $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt$.

   d) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $f(z) \neq f(a)$ para $z \in \overline{D(a,r)}$ y $f'(a) \neq 0$, entonces $\displaystyle\int_{\gamma_{a,r}} \frac{dz}{f(z) - f(a)} = \frac{2\pi i}{f'(a)}$.

   e) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ para $r > 0$. Entonces:

   a) Si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{T}_1$ y f es no constante, entonces f se anula en $D(0,1)$.

   b) Si $\operatorname{Re} f$ está acotada superiormente, entonces f es constante.

   c) $|f(0| \leq \sup_{z \in \mathbb{T}_r} |f(z)|$ para todo $r > 0$.

   d) Si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|f(z_0)| = \text{ínf}_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ entonces f es constante.

   e) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es and pedreno@um.es

Explicación respuestas test:

1 (a) Se sigue directamente del criterio de Weierstrass

(b) Es falsa porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ni siquiera converge puntualmente en $\overline{D(0,1)}$:

si $z=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge

(c) Si convergiera uniformemente en $D(0,1)$, su término general, $f_n(z) = z^n$, tendría que converger a 0 unif. en $D(0,1)$. Pero esto es falso:

basta tomar $f_n(1-1/n) = (1-1/n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$

(d) Es falsa obviamente (como en (b)).

(e) Esto se obtiene del criterio de Dirichlet

$b_n(z) = 1/n \longrightarrow 0$ y es monótona

$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k$, está acotada en cada punto de $\partial D(0,1) \setminus \{1\}$.

En efecto: si $z = e^{i\theta}$

$$\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z} = \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta + i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\theta$$

y:

$$\left| \frac{z - z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{1}{|(1-\cos\theta) + i \operatorname{sen}\theta)|} = \frac{1}{|2 - 2\cos\theta|}$$

(2) (a) Basta aplicar la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = z - a$

(b) Esto es conocido: las funciones holomorfas tienen la propiedad de la media

(c) Se deduce de (b), basta tener en cuenta que si $g(z) = u(z) + iv(z)$ (parte real $= u$ ...)

$$\Rightarrow g(a) = u(a) + iv(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + re^{it})\, dt$$

(d) Esto es algo más complicado (ejercicio de la lista de los 30 ...)

Una forma de proceder es la siguiente: sea

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z-a}{f(z)-f(a)} & \text{si } z \neq a \\ 1/f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

g es holomorfa en $D(a,r) \setminus \{a\}$ (pues $f(z) \neq f(a)$) y es continua en a (pues $f'(a) \neq 0$). Luego g es holomorfa en $D(a,r)$ y aplicándole el teorema de Cauchy:

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z-a}\, dz =$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{f(z)-f(a)}$$

<u>Observación</u>: hay una pequeña sutileza en lo anterior. Ver el enunciado del ejercicio 7.2 de los "30".

(3) (a) $|f|$ alcanza el máximo y el mínimo en $\overline{D(0,1)}$ (por continuidad).

El principio del máximo nos asegura que $|f|$ no puede alcanzar un máximo relativo en $D(0,1)$, a no ser que sea constante. Entonces debe existir un punto $a \in D(0,1)$ tal que $|f(a)| = \min\{|f(z)| : |z| \leq 1\} < 1$

Pero ahora afirmamos que $f(a) = 0$. En efecto, si $f(a) \neq 0$, $1/f$ es continua en $\overline{D(0,1)}$ y holomorfa en $D(0,1)$ y alcanza un máximo en $D(0,1)$. Luego $1/f$ debe ser constante.

(b) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e.d. f es entera, entonces conocemos que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ si f no es cte

Luego $\operatorname{Re} f$ no puede ser acotada sin que f sea cte.

(c) Es, de nuevo, el principio del módulo máximo

(d) Es falso, basta considerar $f(z) = z$ y $z_0 = 0$.

Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Problema 1 (1.5 puntos)

Determine la imagen $U = f(\Omega)$, siendo $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| \quad \frac{\pi}{2}\}$ y f la aplicación

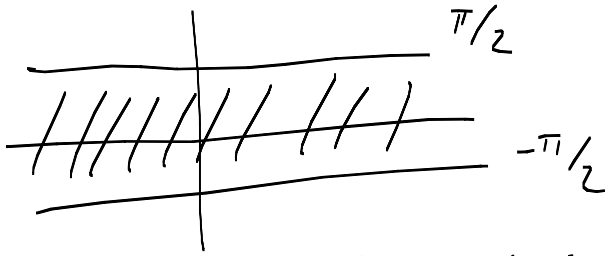
$$f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$$

Estudie si $f : \Omega \longrightarrow U$ es biyectiva.

$f(z) = T(e^z)$ siendo T la transf de Möbius

$$T(w) = \frac{w-1}{w+1}.$$

$\Omega = \{z : |\mathrm{Im}\, z| < \pi/2\}$ es el recinto de la figura

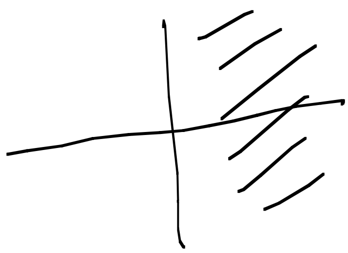


Si $z = e^{x+iy}$, $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ con

$|e^z| = e^x > 0$ y $\mathrm{Arg}(e^z) = y$ (si $z \in \Omega$)

Así la imagen de Ω por e^z es:

$G = \{z : -\pi/2 < \mathrm{Arg}\, z < \pi/2\}$ e.d.



$G = \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es and pedreno@um.es

Ahora debemos calcular $T(G) = U$

Observamos que: $T(0) = -1$,

$$T(i) = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(1-i)}{2} = -\frac{(1-i)^2}{2} = i$$

$$T(-i) = -i$$

Por tanto T lleva el eje imaginario a la única circunferencia que pasa por -1, i y $-i$ e.d.

$$T(\{iy : y \in \mathbb{R}\}) = \partial D(0,1)$$

Como $T(1) = 0$, entonces $T(G) = D(0,1)$

Luego $f(\Omega) = D(0,1)$.

Además e^z es (claramente) inyectiva en Ω y T es inyectiva siempre (por ser Möbius), luego

$T \circ \exp = f$ es biyectiva de Ω en U

Problema 2 (2 puntos)

Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ definida en el abierto $\mathbb{C} \setminus [1,2]$.

1. Pruebe que f admite primitiva holomorfa en Ω.
2. Si F es una primitiva holomorfa de f en Ω, pruebe que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que
$$\exp(F(z)) = c\frac{z-2}{z-1}$$
para todo $z \in \Omega$.
3. Defina en Ω una raíz cuadrada holomorfa de $\dfrac{z-2}{z-1}$ y obtenga su desarrollo en serie de potencias en un entorno de $z_0 = 0$, calculando el radio de convergencia de dicha serie.

La teoría básica de formas diferenciales nos asegura que f tiene primitiva en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1,2]$ si $\int_\gamma f = 0$ para cualquier camino cerrado γ en Ω.

Calculamos pues $\int_\gamma f(z)\,dz$.

Para ello descomponemos f en fracciones simples:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \qquad \begin{array}{l} A+B=0 \\ -B-2A=1 \end{array}$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Así
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Ind}(\gamma,2) - \mathrm{Ind}(\gamma,1)\right)$$
$$= 0$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es and pedreno@um.es

puesto que 1 y 2 pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}\,\gamma$. (luego tienen el mismo índice, sea cual sea el camino en Ω)

2) Si $\exp(F(z)) = c\,\frac{z-2}{z-1}$, tomando $a = \log c$ (es obvio que c no puede ser 0) obtenemos $\exp\left(\frac{F(z)}{a}\right) = \frac{z-2}{z-1}$ e.d. que, salvo una constante, F es un logaritmo de $\frac{z-2}{z-1}$. Pero sabemos que h es (salvo cte) logaritmo holomorfo de g si y sólo si h es primitiva de g'/g

Entonces: sea $g(z) = \frac{z-2}{z-1}$, $g'(z) = \frac{z-1-(z-2)}{(z-1)^2}$

Luego $$g'(z)/g(z) = \frac{1/(z-1)^2}{(z-2)/z-1} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = f(z)$$

Así pues existe $a \in \mathbb{C}$ tal que:

$F(z) + a$ es un logaritmo holomorfo de $g(z)$

$$\iff \exp(F(z)) = e^{-a} \cdot \frac{z-2}{z-1}$$

3) Una raíz cuadrada de $\dfrac{z-2}{z-1}$ puede obtenerse en la forma $\sqrt{2-z}/\sqrt{1-z}$ siempre que estas raíces existan

Pero, claramente, $\sqrt{2}\, S_{1/2}(-z/2)\cdot S_{-1/2}(-z)$ definen tales raíces; $S_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$

Y así,

$$S_{1/2}(-z/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n \frac{z^n}{2^n}$$

$$S_{-1/2}(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n z^n$$

La primera tiene radio de convergencia 2 y la segunda 1. El producto de convolución de las dos series (con factor adicional $\sqrt{2}$) nos da un desarrollo en serie con radio de convergencia igual a 1

Problema 3 (2 puntos)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b > 0$. Calcule el valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx$$

Explique con detalle el procedimiento seguido para dicho cálculo y justifique la convergencia de la integral.

Empezamos justificando la convergencia de la integral:

$$\left| \int_{-R}^{R} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx \right| \leq \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+b^2)^2}\,dx \leq \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$\Rightarrow$ que es convergente pues $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}$ y $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ lo son

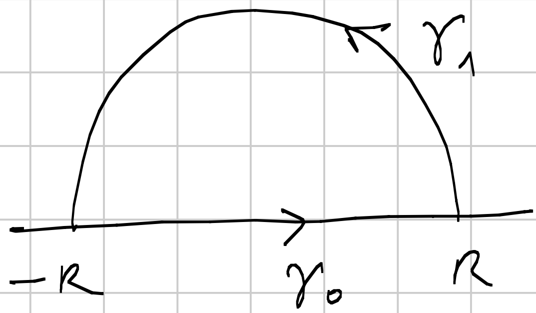
Ahora procedemos calculando

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2+b^2)^2}\, e^{iaz}\,dz$$

a lo largo de un camino Γ adecuado

Observamos que $1/(z^2+b^2)^2$ no tiene polos en el eje real, luego se trata de un caso del llamado "tipo 3"

e-mail: beca@um.es and pedreno@um.es



$$\Gamma = \gamma_0 \oplus \gamma_1$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{(x^2+b^2)^2}\,dx$$

$$\gamma_1(t) = R\,e^{it} \quad t\in[0,\pi]$$

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\exp\left(iaRe^{it}\right)}{\left(R^2e^{2it}+b^2\right)^2}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{\left|\exp\left(iaR(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)\right)\right|}{\left|R^2e^{2it}+b^2\right|}\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\,\mathrm{sen}\,t}}{R^2-b^2}\,dt \quad (\text{si } R>b)$$

$$\leq \pi/_{R^2-b^2} \quad \text{si } t\in[0,\pi] \quad (-\mathrm{sen}\,t \leq 0)$$

luego $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\gamma_1} f\right| = 0$

Ahora

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{\substack{s\in P(f)\\ s\in \mathrm{Int}(\Gamma)}} \mathrm{Res}(f,s)$$

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z+ib)^2(z-ib)^2}$$ tiene polos dobles en ib, $-ib$

$$\mathrm{Res}(f, ib) = \lim_{z\to ib} \left((z-ib)^2 f(z) \right)' =$$

$$= \lim_{z\to ib} \left(\frac{e^{iaz}}{(z+ib)^2} \right)' = \dots = \frac{(1+ab)\,e^{-ab}}{i\,4b^3}$$

y así:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f = 2\pi i \, \frac{(1+ab)\,e^{-ab}}{i\,4b^3}$$

Tomando partes reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\, dx = \frac{\pi(1+ab)\,e^{-ab}}{2b^3}$$