Universidad de Murcia | Departamento Matemáticas

Funciones de Una Variable Real II: La integral de Riemann

B. Cascales, J. M. Mira y L. Oncina

Universidad de Murcia
http://webs.um.es/beca

Grado en Matemáticas
Curso 2012-2013

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.
3. Demostrar la caracterización de Lebesgue de la integrabilidad de Riemann.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.
3. Demostrar la caracterización de Lebesgue de la integrabilidad de Riemann.
4. Estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo y sus aplicaciones.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.
3. Demostrar la caracterización de Lebesgue de la integrabilidad de Riemann.
4. Estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo y sus aplicaciones.
5. Estudiar las distintas aplicaciones de la integral al cálculo de áreas, volúmenes de revolución y longitudes de curvas.

Sumas superiores e inferiores

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Llamaremos partición de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tal que

$$t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b.$$

El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ lo designaremos con $\Pi[a, b]$. Denotaremos con $M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f(t)$ y con $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f(t)$ siendo $t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ un elemento de $\Pi[a, b]$.

Sumas superiores e inferiores

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Llamaremos partición de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que
$$t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b.$$
El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ lo designaremos con $\Pi[a, b]$. Denotaremos con $M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f(t)$ y con $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f(t)$ siendo $t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ un elemento de $\Pi[a, b]$.
2. Si $\pi \in \Pi[a, b]$ llamamos suma superior y suma inferior de f correspondiente a π a los números reales definidos por las siguientes fórmulas
$$S(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$
$$s(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Proposición

Sean π, π' particiones de $[a, b]$. Entonces:

1. $\pi \prec \pi'$ implica $s(f, \pi) \leq s(f, \pi')$.

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Proposición

Sean π, π' particiones de $[a, b]$. Entonces:

1. $\pi \prec \pi'$ implica $s(f, \pi) \leq s(f, \pi')$.
2. $\pi \prec \pi'$ implica $S(f, \pi) \geq S(f, \pi')$.

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Proposición

Sean π, π' particiones de $[a, b]$. Entonces:

1. $\pi \prec \pi'$ implica $s(f, \pi) \leq s(f, \pi')$.
2. $\pi \prec \pi'$ implica $S(f, \pi) \geq S(f, \pi')$.

Corolario

Si π, π' son particiones de $[a, b]$ entonces $s(f, \pi) \leq S(f, \pi')$.

Integral Superior e Inferior

Definición

1. Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

Integral Superior e Inferior

Definición

1. Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real
$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$
2. Se llama integral superior (de Darboux) de f al número real
$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

Integral Superior e Inferior

Definición

1. Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi);\pi \in \Pi[a,b]\}.$$

2. Se llama integral superior (de Darboux) de f al número real

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi);\pi \in \Pi[a,b]\}.$$

3. Se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ y se escribe $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si las integrales inferior y superior de f coinciden. A ese valor común se llama integral Riemann de f y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Caracterización integrabilidad

Teorema

La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi \in \Pi[a, b]$ tal que $S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon$.

Caracterización integrabilidad

Teorema

La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi \in \Pi[a, b]$ tal que $S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon$.

Ejemplo

La función de Dirichlet D_1, definida como la función característica de los irracionales del intervalo $[0, 1]$, es decir, $D_1(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $D_1(x) = 1$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ no es integrable Riemann en $[0, 1]$.

Caracterización integrabilidad

Teorema

La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi \in \Pi[a, b]$ tal que $S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon$.

Ejemplo

La función de Dirichlet D_1, definida como la función característica de los irracionales del intervalo $[0, 1]$, es decir, $D_1(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $D_1(x) = 1$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ no es integrable Riemann en $[0, 1]$.

Corolario

1. Si f es continua entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
2. Si f es monótona entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: refinamiento

Definición

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ una colección arbitraria de puntos tales que $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Se llama suma de Riemann asociada a la partición π y a los puntos $\{z_i\}_i$ a $S(f, \pi, z_i) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1})$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: refinamiento

Definición

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ una colección arbitraria de puntos tales que $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Se llama suma de Riemann asociada a la partición π y a los puntos $\{z_i\}_i$ a $S(f, \pi, z_i) := \sum_{i=1}^n f(z_i)(t_i - t_{i-1})$.

Teorema

Para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada son equivalentes:

1. f es integrable Riemann en $[a, b]$.
2. Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi_0 \in \Pi[a, b]$ tal que si $\pi_0 \prec \pi \in \Pi[a, b]$ se cumple
$$|A - S(f, \pi, z_i)| < \varepsilon,$$
para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

En este caso $A = \int_a^b f$.

Propiedades de la integral

Proposición

$\mathcal{R}[a, b]$ es un espacio vectorial y el operador $\displaystyle\int_a^b$ es lineal.

Propiedades de la integral

Proposición

$\mathcal{R}[a, b]$ es un espacio vectorial y el operador $\displaystyle\int_a^b$ es lineal.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

1. Si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
2. Si $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Propiedades de la integral

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \; f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Propiedades de la integral

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \; f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ entonces f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ y se verifica

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Propiedades de la integral

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \; f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ entonces f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ y se verifica

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Observación

Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$$

Aditividad respecto del intervalo de integración

Proposición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in [a, b]$.

1. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ implica $f \in \mathcal{R}[a, c]$ y $f \in \mathcal{R}[c, b]$ siendo además
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$
2. $f \in \mathcal{R}[a, c]$ y $f \in \mathcal{R}[c, b]$ implica $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Aditividad respecto del intervalo de integración

Proposición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in [a, b]$.

1. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ implica $f \in \mathcal{R}[a, c]$ y $f \in \mathcal{R}[c, b]$ siendo además
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$
2. $f \in \mathcal{R}[a, c]$ y $f \in \mathcal{R}[c, b]$ implica $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Proposición

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Si $a = b$ se conviene en
$$\int_a^a f = 0.$$
2. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ pondremos
$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Otras propiedades

Proposición

Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide con f salvo en un número finito de puntos, entonces $g \in \mathcal{R}[a,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Integrabilidad Riemann según Lebesgue

Definición

Un conjunto A de números reales se dice que tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión numerable $(I_n)_n$ de intervalos cerrados y acotados tales que $A \subset \bigcup I_n$ y $\sum L(I_n) < \varepsilon$, donde $L(I_n)$ denota la longitud del intervalo I_n.

Integrabilidad Riemann según Lebesgue

Definición

Un conjunto A de números reales se dice que tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión numerable $(I_n)_n$ de intervalos cerrados y acotados tales que $A \subset \bigcup I_n$ y $\sum L(I_n) < \varepsilon$, donde $L(I_n)$ denota la longitud del intervalo I_n.

Teorema de Lebesgue

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $D(f)$ el subconjunto de $[a, b]$ formado por los puntos en los que f no es continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
2. $D(f)$ tiene medida cero.

Integrabilidad Riemann según Lebesgue

Definición

1. La función D_1 de Dirichlet definida en los ejemplos **??** no es integrable porque es discontinua en todo punto. Pero la función D_2 sí es integrable porque su conjunto de puntos de discontinuidad es $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, como ya vimos allí.
2. Si f es integrable Riemann en $[a, b]$ y g coincide con f salvo en un conjunto numerable de puntos, entonces también g no es necesariamente integrable Riemann.

Integrabilidad Riemann según Lebesgue

Definición

1. La función D_1 de Dirichlet definida en los ejemplos **??** no es integrable porque es discontinua en todo punto. Pero la función D_2 sí es integrable porque su conjunto de puntos de discontinuidad es $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, como ya vimos allí.
2. Si f es integrable Riemann en $[a,b]$ y g coincide con f salvo en un conjunto numerable de puntos, entonces también g no es necesariamente integrable Riemann.

Corolario

Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Definición

Si $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ se llama norma de la partición a

$$\delta := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Definición

Si $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ se llama norma de la partición a

$$\delta := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Riemann en $[a, b]$.
2. Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición π de norma menor que δ se cumple
$$|A - S(f, \pi, z_i)| < \varepsilon,$$
para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

Además en ese caso $A = \int_a^b f$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Lema

Sea π' una partición de $[a, b]$ obtenida a partir de la partición π añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición π. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$|S(f, \pi, z_i) - S(f, \pi', z_j')| < \delta(M - m)k$$

supuesto que los puntos z_i y z_j' coinciden en aquellos intervalos de π que no han sido subdivididos por la partición π'.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Lema

Sea π' una partición de $[a, b]$ obtenida a partir de la partición π añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición π. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$|S(f, \pi, z_i) - S(f, \pi', z_j')| < \delta(M - m)k$$

supuesto que los puntos $z_i = z_j'$ en aquellos intervalos de π que no han sido subdivididos por la partición π'.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Lema

Sea π' una partición de $[a, b]$ obtenida a partir de la partición π añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición π. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$|S(f, \pi, z_i) - S(f, \pi', z_j')| < \delta(M - m)k$$

supuesto que los puntos $z_i = z_j'$ en aquellos intervalos de π que no han sido subdivididos por la partición π'.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Riemann en $[a, b]$.
2. Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición π de norma menor que δ se cumple
$$|A - S(f, \pi, z_i)| < \varepsilon,$$
para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

Además en ese caso $A = \int_a^b f$.

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema fundamental del cálculo

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ se define

$$F(x) := \int_a^x f. \tag{1}$$

La función F así definida recibe el nombre de integral indefinida y verifica las propiedades siguientes:

1. F es continua en $[a,b]$.
2. Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Primitivas: Regla de Barrow

Definición

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que g es una primitiva de f si g es derivable y $g' = f$.

Primitivas: Regla de Barrow

Definición

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que g es una primitiva de f si g es derivable y $g' = f$.

Observaciones:

1. Por el teorema anterior las funciones continuas tienen primitivas. La función integral indefinida definida por (1) es una de ellas. Las otras se obtienen sumando a ésta una constante.
2. La integral indefinida puede no ser una primitiva. Por ejemplo, basta tomar como $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función característica de $[\frac{1}{2}, 1]$. En este caso la integral indefinida viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ x - 1/2 & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

que no es una función derivable en $x = 1/2$.
3. Hay funciones discontinuas que tienen primitiva. La derivada de la función $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ está en esas condiciones.

Regla de Barrow, Partes y cambio de variable

Fórmula de Barrow

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea g una primitiva de f. Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \tag{2}$$

Regla de Barrow, Partes y cambio de variable

Fórmula de Barrow

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea g una primitiva de f. Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \tag{2}$$

Integración por partes

Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y supongamos que tienen primitivas F, G respectivamente. Entonces,

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Regla de Barrow, Partes y cambio de variable

Fórmula de Barrow

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea g una primitiva de f. Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \tag{2}$$

Integración por partes

Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y supongamos que tienen primitivas F, G respectivamente. Entonces,

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Cambio de variable

Sea $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ una función derivable con derivada continua tal que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'. \tag{3}$$