UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Ejercicios. Relación 6

1. Determine los radios e intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(\mathbf{a})\sum_{n=2}^{\infty}\log(n)x^n;\qquad (\mathbf{b})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}x^n;\qquad (\mathbf{c})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}x^n;\qquad (\mathbf{d})\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$(\mathbf{f})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n-1};\qquad (\mathbf{g})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(2n-1)}x^{2n-1};\qquad (\mathbf{h})\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$$

2. Calcule la suma de las siguientes series de potencias, estudiando previamente sus intervalos de convergencia.
SUGERENCIA: Ponga nombre a las funciones que definen las series y (con los teoremas) realice manipulaciones astutas (derivar, integrar, trocear...) hasta encontrar una serie que sea capaz de sumar (con frecuencia una geométrica o una exponencial).

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n};\qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1};\qquad (c)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n;\qquad (d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{3n}$$

$$(e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1};\qquad (f)\sum_{n=1}^{\infty}(3n^2-n+1)x^n;\qquad (g)\,1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$$

$$(h)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{n+1};\qquad (i)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n(n+1)};\qquad (j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n!}x^n;$$

3. Calcule la suma de las siguientes series demostrando previamente su convergencia:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};\quad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n};\quad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)};\quad (d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$$

$$(e)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right);\quad (f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n-1)!};\quad (g)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!};\quad (h)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

4. Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

   a) Discuta justificadamente la convergencia y convergencia absoluta de dicha serie.

   b) Pruebe la siguiente igualdad

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

   c) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

5. Desarrolle en serie de potencias la función $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ y pruebe que si n es un entero con $n > 0$ se tiene

$$\log \frac{n+1}{n} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

Utilizando dicha serie determine cuantos términos hay que tomar para obtener una aproximación del valor de $\log 2$ con error inferior a 10^{-3}.

¿Conoce otra serie para $\log 2$? ¿Cuantos términos hay que tomar para obtener el mismo tamaño de error?

Para aprender un poco más

6. Estudie la convergencia de la sucesión $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \geq 0$.
7. Estudie la convergencia de la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ definidas en I siendo: (1) $I = [0,1]$, (b) $I = (1, +\infty)$.
8. Estudie la convergencia de la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ con $x \in [0,1]$.
9. Pruebe que si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas convergente uniformemente hacia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces:
   - f es una función continua.
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
10. A la luz del resultado anterior analice, en los ejercicios 6 a 8, la posibilidad de hacer

$$\lim_n \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_n f_n(x)\,dx$$