UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Ejercicios. Relación 5

Parte I: Cálculo de primitivas

1. Calcule las siguientes primitivas: inmediatas, cambios de variable sencillos y partes.

$$A)\int x\sqrt[4]{x^3}\sqrt[5]{x^2}\,dx \qquad B)\int \frac{3\,5^x+4\,6^x}{7^{x+1}}\,dx \qquad C)\int \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos 2x}\,dx$$
$$D)\int \operatorname{sen} 2x\cos 2x\,dx \qquad E)\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad F)\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx$$
$$G)\int \frac{\log(x)}{x^2}\,dx \qquad H)\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad I)\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$$

2. Calcule las siguientes primitivas de funciones racionales.

$$A)\int \frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2}\,dx \qquad B)\int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}\,dx \qquad C)\int \frac{3x^2+2x+4}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$
$$D)\int \frac{1}{x(x^3+1)}\,dx \qquad E)\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+3)}\,dx \qquad F)\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$$

3. Calcule las siguientes primitivas: exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas.

$$A)\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-e^x+1}\,dx \qquad B)\int \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\,dx \qquad C)\int \frac{dx}{\cos x}$$
$$D)\int \cot^4 x\,dx \qquad E)\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx \qquad F)\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$$
$$G)\int \frac{1}{\cosh x}\,dx \qquad H)\int \operatorname{senh}^2 x\,dx \qquad I)\int \operatorname{senh}^3 x\cosh^2 x\,dx$$

4. Calcule las siguientes primitivas de funciones irracionales.

$$A)\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \qquad B)\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{(1+x)^2} \qquad C)\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$$
$$D)\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-16x+12}} \qquad E)\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+4}}\,dx \qquad F)\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$$

Parte II: Integrales impropias

5. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\text{A)} \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1} \qquad \text{B)} \int_{-1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5+1}dx \qquad \text{C)} \int_0^{+\infty} (2 + \operatorname{sen} x)dx$$

$$\text{D)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^5 x}{1 + \cos x + \cosh x} \qquad \text{E)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-\cos x)^\alpha} \qquad \text{F)} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$$

$$\text{G)} \int_0^1 x^a \log x\,dx \qquad \text{H)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

6. Estudie la convergencia de las siguientes integrales, calculando, eventualmente con Maxima, aquellas que sean convergentes, ya sea de forma exacta o numérica:

$$\text{A)} \int_2^{+\infty} e^{2x}(x^2+3x)dx \qquad \text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4} \qquad \text{C)} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$$

$$\text{D)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}} \qquad \text{E)} \int_0^1 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{F)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x-2}$$

$$\text{G)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^3}}\,dx \qquad \text{H)} \int_0^\pi \frac{1}{1-\cos x}\,dx.$$

7. Determine el área de la región determinada por la curva de ecuación $f(x) = 1/x$ para $x \geq 0$ y el eje OX. Determine también el volumen del sólido engendrado al girar dicha región en torno al eje OX.

8. Suponiendo que $x \geq 2$, determine el área de la región situada entre las curvas

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x+3)(x+4)} \text{ y } g(x) = \frac{2}{x+1}.$$

9. Conociendo las fórmulas relevantes $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ y $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, y usando técnicas de cambio de variable o integración por partes, demuestre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.$$

10. Según los valores de los parámetros a, b, estudie la convergencia de

$$\text{A)} \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^b}, \quad \text{B)} \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^a(\log n)^b}, \quad \text{C)} \int_0^1 \frac{x^a-1}{\log x}\,dx, \quad \text{D)} \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,dx$$