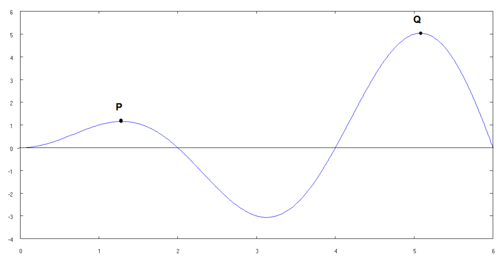
Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Ejercicios. Relación 4

Lo básico

1. Sea $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ la función derivable de la figura y $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ para $x \in [0, 6]$. Sean x_P y x_Q las abscisas de los puntos P y Q respectivamente.



A) F es creciente en $(0, 2)$ y $(4, 6)$.

B) F es convexa en $(2, 4)$.

C) F presenta máximos relativos en x_P y x_Q.

D) F presenta un mínimo relativo en $x = 4$.

E) F presenta puntos de inflexión en x_P y x_Q.

2. Calculad el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 12x$ e $y = x^2$.

3. Calculad el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las curvas $x = 0, y = x^2 + 1$, y la tangente a esta última en el punto de abscisa $x = 1$.

Lo que hay que saber hacer.

4. Calculad la derivada de la función F en cada caso:

$$\text{A) } F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\,dt, \quad \text{B) } F(x) = \int_{\operatorname{sen} x^2}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt$$

5. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua que verifica $\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t)f(t)\,dt = 6x^4$. Determinad f.

6. Calculad las siguientes integrales (todas son casi inmediatas, con una transformación inteligente del integrando).

$$\text{A) } \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx \quad \text{B) } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx \quad \text{C) } \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

$$\text{D) } \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x\,dx \quad \text{E) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,dx \quad \text{F) } \int_0^{a^2} \frac{x}{a^4+x^4}\,dx$$

7. Mediante un cambio de variable estableced la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$$

Como aplicación, probad que $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^4(2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(2x)\,dx = \frac{3\pi^2}{16}$.
Indicación: Para el cálculo de la última integral podéis usar MAXIMA.

8. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que para todo $x \in (a,b)$ se verifica $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$. Probad que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

   A) Probad que existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

   B) Probad que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

   Nota: ¿Sabes probar el apartado B) sin usar el A)? Repasa el ejercicio 6 de la hoja de problemas 3.

Para pensar un poco

10. Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua y, para cada $x \in [0,+\infty)$, sea

$$F(x) = \int_0^x x f(t)\,dt$$

   A) Calculad $F'(x)$ para cada $x \in [0,+\infty)$ y demostrad que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)\,du$$

   B) Calculad $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1+\frac{1}{n}} \frac{(1+\frac{1}{n}-y)}{(1+y)^3}\,dy$

11. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Probad que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$ en los siguientes casos:

   A) f admite primitiva.

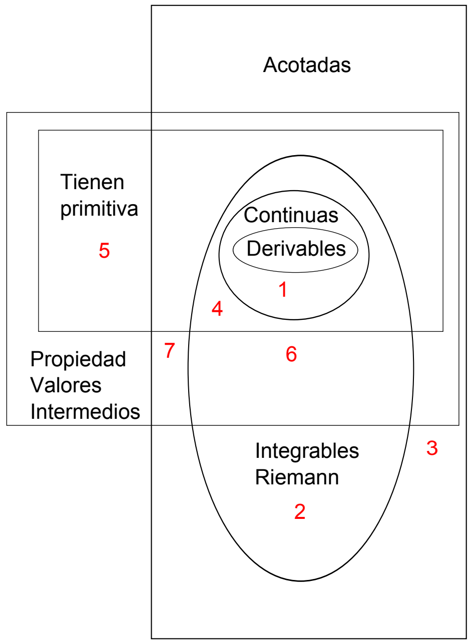
   B) f satisface la propiedad de los valores intermedios.

   C) ¿Es cierto si solo asumimos que f es integrable?

Retos para los más osados: para profundizar en los conceptos

Durante las vacaciones es un buen momento para reflexionar sobre las propiedades de las funciones que hemos aprendido durante lo que llevamos de curso. En el siguiente esquema mostramos conjuntos de funciones y la relación existente entre ellos. Tanto para el esquema como en los problemas que siguen, las funciones se suponen definidas en un intervalo cerrado y acotado de la recta real.

Las inclusiones entre los distintos conjuntos nos las proporcionan los teoremas o las definiciones. Que dichas inclusiones son estrictas lo probamos con ejemplos.



12. "Bucea" en el OCW para encontrar qué resultados nos aseguran las inclusiones de los conjuntos y rellena los puntos suspensivos con la referencia al resultado pertinente (es un buen momento para repasar las pruebas de los mismos):

    A) Derivables $\subset$ continuas ...
    B) Continuas $\subset$ acotadas ...
    C) Continuas $\subset$ cumplen la propiedad de los valores intermedios ...
    D) Continuas $\subset$ integrables Riemann ...
    E) Continuas $\subset$ tienen primitiva ...
    F) Integrables Riemann $\subset$ acotadas ...
    G) Tienen primitiva $\subset$ cumplen la propiedad de los valores intermedios ...

    En el esquema vemos que dentro del mundo de las funciones continuas el concepto de integral y primitiva coinciden: de forma más precisa, la integral (indefinida) es una primitiva de la función (por cierto, en OCW vemos un ejemplo donde la integral indefinida no es una primitiva). Pero fuera de las continuas las cosas no son tan bonitas.

    Los números en rojo son ejemplos que separan los conjuntos. Vamos a verlos. (Notad que el 5 se sale de las acotadas. El primer ejemplo de este tipo dentro de las acotadas lo dio Volterra pero para ello hay que utilizar técnicas de Teoría de la medida).

13. Probad las siguientes afirmaciones:

- Ejemplo 1. La función $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ es continua pero no derivable.
- Ejemplo 2. La función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ es acotada, no continua, integrable Riemann y no admite primitiva.
- Ejemplo 3. La función $D_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$ acotada y no integrable.
- Ejemplo 4. La función $f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ tiene como primitiva $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es integrable Riemann pero no es continua.
- Ejemplo 5. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. f es derivable pero f' (cuya primitiva es f) no es integrable Riemann.

El siguiente ejemplo lo encontramos en: Fernando Galaz-García, *Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue*, Miscelánea Matemática, **44** (2007), 83-100.

14. Ejemplo 6. La función
$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
es integrable Riemann, satisface la propiedad de los valores intermedios y no admite primitiva.

15. Ejemplo 7. La función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 - x & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$ es acotada, posee la propiedad de los valores intermedios pero no admite primitiva ni es integrable Riemann.