UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Ejercicios. Relación 3

Lo que hay que saber hacer.

Límites e integrales: las sumas de Riemann

1. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probad que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \int_0^1 f,$$

para cualquier elección de $z_k \in [a + \frac{(b-a)}{n}(k-1), a + \frac{(b-a)}{n}k]$ para k y n enteros con $1 \leq k \leq n$.

2. Usando límites, calculad las siguientes integrales:

$$a) \int_2^4 x, \quad b) \int_2^3 x^2, \quad c) \int_1^2 x^3, \quad d) \int_0^1 x^2(1-x)$$

Indicación: Para calcular los límites resultantes os será de utilidad conocer/recordar las fórmulas que expresan sumatorios del tipo $\sum_{k=1}^{n} k^a$ como polinomios en n con $a = 1, 2, 3$.

3. Usando integrales, calculad los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{2n}, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)k}{n^3}$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big((n+1)(n+2)\dots(n+n)\Big)^{1/n}$$

Indicación: Para calcular las integrales resultantes podéis usar Maxima.

Para pensar un poco:

Unas propiedades interesantes

4. Sea $a > 0$ y $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrable. Probad que si f es una función par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, mientras que si es impar se cumple $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

5. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y $g \in \mathcal{R}([c, b])$ para todo $c \in (a, b]$ entonces $g \in \mathcal{R}([a, b])$

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Probad que entonces $\int_a^b f > 0$.

   ¿Habéis usado en la prueba la continuidad f en todo el intervalo? ¿No? Entonces quizás podéis probar el caso más general, es decir, asumir que f es solo integrable Riemann.

Retos para los más osados:

Sin el teorema de Lebesgue de integrabilidad Riemann

El teorema de Lebesgue de integrabilidad Riemann, cuya demostración no hemos visto en clase y que ciertamente escapa a los objetivos de este curso, lo usamos en clase para probar el problema 7.

Dicho teorema nos dice en particular que las funciones integrables Riemann tienen puntos de continuidad (ver el problema 9). Volved a pensar el problema 6 en el caso de que f sea integrable Riemann si no lo habéis resuelto ya.

7. Probad que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann entonces el producto fg también lo es.

   Indicación: *Comenzad con el caso $f = g$ y siendo $f > 0$ en $[a, b]$. Luego demostrad el caso $f < 0$, y finalmente f arbitraria para probar que f^2 es integrable. Con todo lo anterior probad el caso general.*

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann y tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces
   $$\int_a^b f > 0.$$
   Indicación: *Se puede probar directamente o bien usando el problema 9 junto con ideas del problema 6*

9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que f es continua en c.