Departamento de Matemáticas

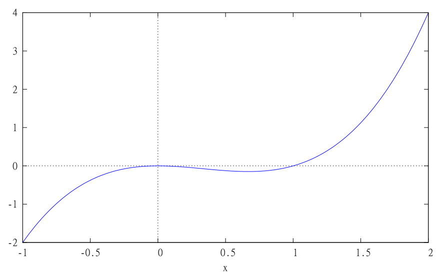
Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Ejercicios. Relación 2

Lo básico

1. La siguiente gráfica se corresponde con la de la derivada de una función $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$. Responded verdadero o falso razonando la respuesta.



   a) f es estrictamente creciente para $-1 < x < 0$.

   b) f es convexa en $(-1,0)$.

   c) f posee un máximo relativo en $x = 0$.

   d) f posee dos puntos de inflexión en $[-1,2]$.

   e) f posee un mínimo relativo en $x = 1$.

2. Hallad los puntos de inflexión de las funciones

$$\begin{array}{ll} \text{A)}\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} & \text{B)}\ f(x) = x^2 e^{-x} \\ \text{C)}\ f(x) = \operatorname{sen}^2 x & \text{D)}\ f(x) = x - (c \operatorname{sen} x + k) \end{array}$$

Lo que hay que saber hacer

3. Estudiad y representad la funciones:

   A) $f(x) = x^3 \log |x|$.

   B) $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$.

   C) $h(x) = x^2 e^{-x}$.

4. Probad que para $x \in [0, \pi/2]$ se verifica $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{2x}{\pi}$.

5. Dados n números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se llama media aritmética y media geométrica de ellos a los números definidos por

$$MA := \frac{a_1 + a_2 + \ldots, + a_n}{n}; \quad MG := \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

   Tomando logaritmos, demostrad que $MG \leq MA$.

6. Sean f, g funciones convexas. ¿Son convexas las funciones $f+g$, fg y $f \circ g$?

7. Sea $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\log(\log x)$. Probad que f es convexa y que si $a, b \in (1,\infty)$ se cumple $\log(\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{\log a \log b}$.

Para pensar un poco

8. Se definen las funciones seno y coseno hiperbólicos mediante $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Estudiad y dibujad dichas funciones. Analizad la existencia de f^{-1} en ambos casos, llamadas argumento seno y argumento coseno hiperbólico, respectivamente, y determinad la correspondiente fórmula en términos de la función logaritmo. Demostrad que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

9. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ y $g(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ en el intervalo $[0, 1]$. Dibujad con Maxima las gráficas de f y g.

   a) ¿Cual es vuestra conjetura sobre el crecimiento y la convexidad de f y g?

   b) Demostrad vuestras conjeturas.

Retos para los más osados

10. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo. Probad que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es convexa

    b) Para cada conjunto finito $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I y cada conjunto finito $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ contenido en $[0, 1]$ de modo que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ se cumple que

    $$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

11. En clase vimos, usando desarrollos de Taylor, que

    $$0 \leq \tan x - \operatorname{sen} x \leq 3x^3 \text{ si } x \in [0, \pi/4].$$

    Probad ahora que, de hecho, podemos encontrar una estimación mejor:

    $$0 \leq \tan x - \operatorname{sen} x \leq x^3 \text{ si } x \in [0, \pi/4].$$

12. Probad que $x \log 2 \geq \log(1 + x^2)$ si $x \in [0, 1]$ y $x \log 2 \leq \log(1 + x^2)$ si $x \in [1, 4]$.