UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. Bernardo Cascales • José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II

Ejercicios. Relación 1

Lo básico

1. Sean $f(x) = o(x^4)$ y $g(x) = o(x^5)$. Contestad verdadero o falso razonando vuestra respuesta.

   a) $f(x) + g(x) = o(x^4)$.

   b) $f(x)g(x) = o(x^{20})$.

   c) $g(x)/f(x) = o(x)$.

   d) $x^2 g(x) + x f(x) = o(x^5)$.

   e) $x^3 + g(x) = o(x^5)$.

2. Demostrad que para todo $x \geq 0$ se tiene $|\sqrt[3]{1+x} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})| \leq \frac{5x^3}{81}$.

3. Deseamos calcular el valor de $\cos x$ con error inferior a $\frac{1}{1000}$ y para ello consideramos el polinomio de Taylor de grado 4 para el coseno. ¿Para qué valores de x podemos estar seguros de conseguir el objetivo utilizando dicho desarrollo?

Lo que hay que saber hacer

4. Determinad los siguientes desarrollos limitados en un entorno del origen.

   A) De orden 4 para $f(x) = \log^2(1+x)$.

   B) De orden 6 para $f(x) = \log(\cos x)$.

   C) De orden 3 para $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

5. Calculad los siguientes límites.

   A) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x) - \log(1+x)}{x - \tan x}$, B) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \sec x - \operatorname{sen}^2 x}{x(x - \tan x)\cos x}$

   C) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+5}{2x^2-5}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$, D) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} - x^2}{\operatorname{tg} x \log \frac{x^2+1}{1-x^2}}$, E) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$

6. Para las siguientes funciones, determinad los desarrollos de MacLaurin de orden 8 con alguna expresión para el resto.

$$\text{A) } f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{B) } f(x) = e^{2x}\cos(3x+1)$$

7. Probad que

   A) $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, B) $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{x^2}{2}$ si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

8. Calculad los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones en los intervalos donde se indica.

   A) $f(x) = \text{sen}^3(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$. B) $g(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ para $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

9. Demostrad que para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

   Calculad el valor aproximado de $\log \frac{3}{2}$ con un error máximo de 0'001.

Para pensar un poco

10. Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \log(1 - x^2) + b(\sqrt{1 + x^2} - 1) + x^2$ donde a y b son parámetros reales. Determinad, al variar a y b, todos los posibles valores de $\text{lím}_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^6}$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable verificando: $f(1) - f(0) = 7$ y $|f''(x)| \leq 3$ para todo $x \in [0, 1]$. Demostrad que f es creciente en un entorno de cero.

12. Probad que $x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x) < x$ y calculad $\text{lím}_n \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$.

Retos para los más osados

13. Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y a un punto interior del intervalo I. Supongamos que f es dos veces derivable en I y que $f''(a) \neq 0$. Si para cada h, $\theta(h)$ es el número de $(0, 1)$ dado por la fórmula de Lagrange $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta(h)h)h$. Probad que $\text{lím}_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$.

14. El objetivo de este problema es el de proporcionar un ejemplo de función infinitamente derivable cuyo desarrollo de MacLaurin de cualquier orden es idénticamente cero. Para ello nos será de utilidad comenzando por probar el siguiente resultado.

    (i) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, y x_0 un punto de I. Sabiendo que f es derivable en todos los puntos de I distintos de x_0 y que existe el límite de $f'(x)$ cuando x tiende a x_0, probad que f también es derivable en x_0 y calculad el valor de la derivada. ¿Es f' continua en x_0? Si $g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en I, ¿es g' continua en I?

    (ii) Sea la función definida por $g(x) = exp(-\frac{1}{x^2})$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$. Demostrad que

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(2x^{-3}) = exp(-\frac{1}{x^2})P_3(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g'(0) = 0$$

    donde $P_3(\frac{1}{x})$ representa un polinomio de grado 3 en la variable $\frac{1}{x}$. Usando el método de inducción probad que para cada $1 \leq n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g^{(n)}(0) = 0$$

    donde $P_{3n}(\frac{1}{x})$ representa un polinomio de grado $3n$ en la variable $\frac{1}{x}$.