UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Examen 24 de mayo de 2012

NOMBRE:____

1. [1P] Enunciado y demostración del teorema de fundamental del cálculo.

2. [1P] Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

   - f es $n - 1$ veces derivable en (a, b)
   - para cierto $x_0 \in (a, b)$ se tiene $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que existe $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

   Demuestre que

   - Si n es par: en x_0 hay un máximo relativo si $f^{(n)}(x_0) < 0$ o un mínimo relativo si $f^{(n)}(x_0) > 0$.
   - Si n es impar: no hay extremo relativo en x_0.

3. [1P] Responda a las siguientes cuestiones, fundamentando sus respuestas .

   Sea f, g dos funciones monótonas sin ceros definidas en el intervalo $[a, b]$. Entonces:

   a) $f + g$ es integrable Riemann sólo cuando f y g son continuas.

   b) $f + g$ es integrable Riemann.

   c) fg es integrable Riemann cuando f es creciente y g es decreciente.

   d) f/g es integrable Riemann.

   Sean $f(x) = o(x^3)$ y $g(x) = o(x^4)$ entonces:

   e) $f(x) + g(x) = o(x^4)$.

   f) $xf(x) - g(x) = 0$.

   g) $f(x)g(x) = o(x^7)$.

   h) $g(x)/f(x) = o(x)$.

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Profs. José M. Mira • Luis Oncina

Funciones de una variable real II
Examen 24 de mayo de 2012

NOMBRE:______________________________

Protocolo

• Responda a las cuestiones planteadas. Puede utilizar para ello razonamientos matemáticos abstractos y recursos de MAXIMA a su conveniencia, pero siempre explicando lo que hace. Cuando exista tal posibilidad, la utilización de ambos recursos se valorará positivamente.

• Debe entregar la hoja con los enunciados a la que se añadirán las hojas necesarias. Numere la solución de los ejercicios. Si alguno lo resuelve total o parcialmente con MAXIMA debe indicarlo en la hoja de respuestas explicitando el código MAXIMA que ha usado y los resultados obtenidos.

1. [1,5P] Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^n$.
   a) Determine el radio de convergencia de la serie y el dominio de la función f que define dicha serie.
   b) Calcule valor de f utilizando funciones elementales.
2. [1,5P] Se considera la curva de ecuación $1/\cosh(x)$
   a) Dibuje aproximadamente la gráfica de la curva (sea con MAXIMA o con argumentaciones teóricas).
   b) Calcule el área del recinto delimitado por la curva y el eje OX.
   c) Calcule también el volumen engendrado al girar dicho recinto en torno al eje OX.
3. [1,5P] Calcule
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$$
4. [1,5P] Sea la sucesión $(b_n)_n$ donde $b_n := \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
   a) Demuestre que $\log b_n = \dfrac{\log n! - n\log n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}$.
   b) Calcule $\lim_n \log b_n$ y deduzca el valor de $\lim_n b_n$.
5. [1P] Demuestre que $x - \dfrac{x^3}{3!} \le \operatorname{sen} x$
   a) Para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   b) Para todo $x \in [0, \infty)$

Sea la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^n$.

1. Determine el radio de convergencia de la serie y el dominio de la función f que define dicha serie.

2. Calcule valor de f utilizando funciones elementales.

Para calcular el radio de convergencia necesitamos determinar $\limsup \sqrt[n]{n^2-n} = \limsup \sqrt[n]{n(n-1)} = \lim \sqrt[n]{n} \lim \sqrt[n]{n-1} = 1$. El radio de convergencia de la serie es 1 y para $x = \pm 1$ la serie no converge, de suerte que

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n$$

define una función continua e infinitamente derivable con dominio $(-1,1)$.

Entonces $f(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} = xg(x)$ y la función g así definida cumple, de acuerdo con teoremas conocidos

$$\int g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\frac{x^n}{n} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-2} = x^2h(x)$$

Finalmente

$$\int h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Por tanto

$$h(x) = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad h'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2xh(x) + x^2h'(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

Así que finalmente

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3}$$

Podemos comprobar con Maxima el resultado obtenido mediante

```
powerseries(2*x^2/(1-x)^2+2*x^3/(1-x)^3,x,0);
```

También podemos hacer que Maxima calcule por sí mismo el resultado de la suma mediante

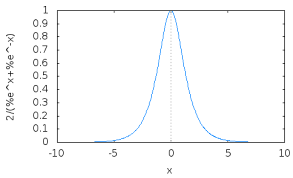
```
load(simplify_sum);
simplify_sum( sum( (n^2-n)*x^n,n,0,inf ) );
```

Calcule el área del recinto comprendido entre los ejes de coordenadas del primer cuadrante y la curva de ecuación $f(x) := 2/(\exp(x)+\exp(-x))$. Calcule también el volumen engendrado al girar dicho recinto en torno al eje OX

Dejaremos que Maxima haga las cuentas, paso a paso. Son cuentas sencillas que se pueden hacer a mano sin problemas, con cambios de variable pautados que le vamos obligando a hacer a Maxima. Aunque realmente Maxima sabe calcular de forma directa las integrales sin necesidad de ir realizando esos pasos (es su trabajo).

```
(%i26) kill(all)$
       f(x):=2/(exp(x)+exp(-x));
       wxplot2d(f(x),[x,-10,10]);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \dfrac{2}{\exp(x)+\exp(-x)}$




```
(%i3)     /* primitiva directa con Maxima */
       integrate(f(x),x);

          /* primitiva a calcular */
       'integrate(f(x),x);

          /* el cambio de variable es fácil: y=exp(x) */
       changevar('integrate(f(x),x),y=exp(x),y,x);

          /* calculamos la primitiva */
       ev(%,integrate);
```

(%o3) $-2\,\mathrm{atan}\left(e^{-x}\right)$

(%o4) $2\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

(%o5) $2\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}dy$

(%o6) $2\,\mathrm{atan}(y)$

```
(%i7)     /* un cálculo directo con Maxima proporciona el resultado */
       2*integrate(f(x),x,0,inf);
```

(%o7) π

```
(%i8)      /* el cálculo directo con Maxima para el volumen */
       2*%pi*integrate((f(x))^2,x,0,inf);
```

(%o8) $2\,\pi$

(%i9)
```
I:'integrate(f(x)^2,x);
    /* hacemos el cambio de variable y=exp(x)  */
J:changevar(I,y=exp(x),y,x);
    /* un nuevo cambio de variable z=y^2  */
JJ:changevar(J,z=y^2,z,y);
    /* una integral racional inmediata */
ev(JJ,integrate);
```

(%o9) $4\int \frac{1}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}dx$

(%o10) $4\int \frac{y}{y^{4}+2\,y^{2}+1}dy$

(%o11) $4\int \frac{1}{2\,z^{2}+4\,z+2}dz$

(%o12) $-\frac{4}{2\,z+2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)}$$
$$[Taylor]=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/4+o(x^4)}{x^4/2+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1/4+o(x^4)/x^4}{1/2+o(x^4)/x^4}=\frac{1}{2}$$

Sea la sucesión $(b_n)_n$ donde $b_n := \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

1. Demuestre que $\log b_n = \dfrac{\log n! - n\log n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}$.

2. Calcule $\lim_n \log b_n$ y deduzca el valor de $\lim_n b_n$.

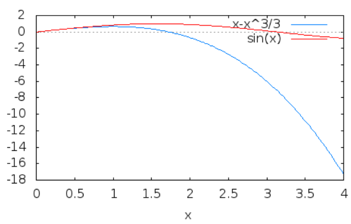
$b_n := \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \Rightarrow \log b_n = \dfrac{\log n! - n\log n}{n} = \dfrac{1}{n}\Big(\log 1 + \log 2 + \ldots \log n - \log n - \log n - \cdots - \log n\Big) = \dfrac{1}{n}\Big(\log 1/n + \log 2/n + \ldots \log n/n\Big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}$

$\log b_n$ se corresponde con las sumas de Riemann de $\int_0^1 \log x\, dx$. Esta integral se puede calcular con MAXIMA pero también se puede calcular de forma manual por partes (es fácil). Una primitiva es $F(x) = x\log x - x$ y $F(1) = -1$ mientras que $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x) = 0$ (cuestión de tamaños). Así pues $\lim \log_n b_n = -1$ y por tanto

$$\lim_n b_n = \lim_n \exp(\log b_n)) = \exp(\lim_n \log b_n) = \exp(-1) = e^{-1}$$

Demuestre que $x - \dfrac{x^3}{3!} \leq \operatorname{sen} x$

1. Para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
2. Para todo $x \in [0, \infty)$



Lo que vemos en MAXIMA parece corroborar la desigualdad. Procedamos con el estudio analítico. La expresión a la izquierda de la desigualdad corresponde con los primeros términos del desarrollo de Taylor del seno. Concretamente sabemos que

$$f(x) = \operatorname{sen} x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(c)}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\operatorname{sen}(c)}{4!}x^4$$

siendo c un punto cuyo valor desconocemos pero que pertenece al intervalo $[0, x]$.

• Cuando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ también $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y por tanto $\operatorname{sen}(c) \geq 0$. Lo cual prueba la primera parte. De hecho, con el mismo razonamiento, la desigualdad también es cierta para $x \in [0, \pi]$. Pero este razonamiento no sirve para probar la desigualdad en $[\pi, \infty)$ debido a que el seno puede tomar valores negativos.

• Es necesario buscar una razonamiento diferente para el intervalo $[\pi, \infty)$ donde la desigualdad también es cierta, si nos fiamos de MAXIMA: nuestro reto es ser capaces de encontrar un razonamiento analítico que demuestre lo que MAXIMA muestra en el gráfico.

Consideramos la función $g(x) := \operatorname{sen} x - (x - x^3/3!)$ entonces $g(\pi) = \frac{\pi^3}{6} - \pi > 2$ Y la función g parece creciente en dicho intervalo Comprobémoslo. Hacemos la derivada

$g'(x) = \cos x - 1 + x^2/2!$ y $g'(\pi) = \frac{\pi^2}{2} - 2 > 2{,}5 > 0$. En π es creciente, pero... ¿y para valores más grandes? Volvemos derivar para ver cómo varía g' y obtenemos $g''(x) = x - \operatorname{sen} x$ y como $x - \operatorname{sen} x > 0$ para $x > 0$, se tiene que g' es creciente y como $g'(\pi) > 0$ también es $g'(x) > 0$ para $x \in [\pi, \infty)$; o sea g es creciente y como $g(\pi) > 2$ se cumple que $g(x) > 2$ en $x \in [\pi, \infty)$. Y por tanto hemos conseguido nuestro objetivo.