Bernardo Cascales
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Murcia.
Tfno. +34+968364174
Fax. +34+968364182
e-mail: beca@um.es

Introducción al Análisis Complejo[1] — 28 de Junio de 2004

Teoría

T.1 (1.5 puntos) Teorema de Cauchy-Goursat.

T.2 (1.5 puntos) Singularidades esenciales. Teorema de Cassorati-Weierstrass.

P.1 (2.5 puntos) Calcúlese $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$, utilizando el método de los residuos e integrando $f(z) = \dfrac{e^{2iz}-1}{z^2}$ sobre el camino de la figura

Se valorará: a) Justificación de la convergencia de la integral; b) estudio de las singularidades relevantes para el cálculo de la integral y evaluación de los residuos en ellas; c) cálculo correcto de límites; d) resultado correcto de la integral.

P.2 (2.5 puntos) Sea $f(z) = \pi \cot \pi z$.

I) Determinar las singularidades de f y su naturaleza;

II) Calcular el residuo en cada una de las singularidades de f;

III) Pruébese que para $0 < \epsilon < 1$, f está acotada en $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D(n,\epsilon)$.

IV) Sea $C_n(t) = (n + \frac{1}{2}e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Considerando las integrales $\displaystyle\int_{C_n} \frac{f(z)}{z^2}dz$, y tomando límites cuando $n \to \infty$ calcular la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$.

P.3 (2 puntos) Indicar un abierto $\Omega \supset D(0,1)$, $\Omega \neq D(0,1)$, en el que se pueda asegurar la existencia de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfaciendo:

a) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$;

b) $(f'(z))^2 = \dfrac{1}{1-z^2}$, para $z \in \Omega$.

Justificar que f queda unívocamente determinada por las condiciones anteriores y que $\sin f(z) = z$ para cada $z \in \Omega$.

[1] Poner el nombre. Identificar en la forma debida las preguntas que se contestan. La utilización de expresiones simbólicas, que eventualmente conducen a otras, deberían ser explicadas convenientemente.