Funciones de variable compleja / Introducción al análisis complejo
Control 2 — 16–12–2011

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas) y el tipo (01 o 02), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. Sea $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ una transformación de Möbius. Entonces:

   a) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ entonces $T(D(a,r)) = D(b,\rho)$.

   b) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y existe $z_0 \in D(a,r)$ tal que $|T(z_0) - b| < \rho$ entonces $T(D(a,r)) = D(b,\rho)$.______Correcta

   c) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y existe $z_0 \in D(a,r)$ tal que $|T(z_0) - b| > \rho$ entonces $T(D(a,r)) = \{z : |z-b| > \rho\}$.

   d) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y se verifica $|T(a) - b| > \rho$ entonces existe $\delta > 0$ y $c \in D(a,\delta)$, con $\overline{D(c,\delta)} \subset D(a,r)$ tal que $T(\partial D(c,\delta))$ es una recta.______Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

2. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, denotaremos por L_f una rama continua del logaritmo de f, definida en cada caso cómo y dónde se indique. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas?

   a) Si L_f existe en el abierto $U \subset \Omega$ entonces $L_f \in \mathcal{H}(U)$.______Correcta

   b) Si $f(z) = z^4 - 1$ y $\Omega = \mathbb{C}$ entonces existe un disco $D(0,r)$ donde existe L_f.______Correcta

   c) Si $f(z) = z^2 - 1$ y $\Omega = D(0,1)$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log}(z^2-1) + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

   d) Si $f(z) = \frac{1+iz}{1-z}$, $\Omega = D(0,1)$ y $L_f(0) = 0$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-z}$.______Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, con $u(x+iy) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ y $v(x+iy) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   a) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(a)i$.______Correcta

   b) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(a)i$.

   c) Si f es holomorfa en Ω entonces $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ en todo Ω.______Correcta

   d) Si f es holomorfa en Ω entonces $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en $\overline{\Omega} = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$.______Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

4. Si hablamos de Ω nos referimos a un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   a) Si T es una transformación de Möbius tal que $T(\overline{x}) = \overline{T(x)}$ para todo $x \in (0,1)$ entonces $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$; Correcta

   b) Si Ω es conexo, $\overline{\Omega} = \Omega$ y $f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ entonces $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Correcta

   c) Si Ω es conexo, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ no se anulan y $Z = \{z \in \Omega : \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}\}$ se acumula en Ω, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Correcta

   d) Si $\Omega = D(0,1)$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(0) = g(0) = 0$ y $2g(1/n)g'(1/n) = f'(1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, entonces f tiene una raíz cuadrada holomorfa en Ω. Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

5. Sea $a \in D(0,1)$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset D(0,1)$. Sean φ y ψ los caminos en $D(0,1)$ dados por $\varphi(t) = a + re^{it}$ y $\psi(t) = \overline{a} + e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces:

   a) De la fórmula integral de Cauchy (es decir, para toda $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{g(z)}{z-a}\, dz$) se puede deducir el teorema de Cauchy, es decir, se puede deducir que $0 = \int_\varphi g(z)\, dz$, para toda $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Correcta

   b) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ se verifica $\overline{f(a)} = \dfrac{-1}{2\pi i} \displaystyle\int_\varphi \frac{\overline{f(z)}}{\overline{z} - \overline{a}}\, dz$.

   c) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ se verifica $\overline{f(a)} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\psi \frac{\overline{f(\overline{z})}}{z - \overline{a}}\, dz$. Correcta

   d) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $f(z) \neq f(a)$ para $z \in \overline{D(a,r)}$ y $f'(a) \neq 0$, entonces $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{f(z) - f(a)} = \frac{2\pi i}{f'(a)}$. Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, entonces:

   a) Si existe $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ tal que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus D(a, R)$ entonces f es constante. Correcta

   b) Si existe $r > 0$ tal que $f(\mathbb{C}) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} = \emptyset$ entonces f es constante. Correcta

   c) Si $\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$ y f no es constante, entonces f se anula en algún punto. Correcta

   d) Si f no es constante entonces $\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$.

   e) Ninguna de las anteriores.

7. Consideremos la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ y $\gamma_n : [0, 2n\pi] \to \mathbb{C}$ el camino $\gamma_n(t) := a \cos t + ib \operatorname{sen} t$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

   a) La imagen de cada γ_n es la elipse. Correcta

   b) Para que la imagen de cada γ_n fuera la elipse, habría que redefinir $\gamma_n(t) := b \cos t + ia \operatorname{sen} t$.

   c) Ind $(\gamma_n, 0) = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Correcta

   d) Si f es entera entonces $\frac{f^m(0)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

   e) Ninguna de las anteriores.

8. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$, $\sim C_2(t) = 2e^{-it}$, $C_4(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, y $\Gamma = (\sim C_2) \oplus C_4$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

   a) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\sim C_2} \frac{f(z)}{z-3i}\, dz = 0.$

   b) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_4} \frac{f(z)}{z-3i}\, dz = f(3i).$

   c) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-3i}\, dz = f(3i).$ ____ Correcta

   d) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma \oplus \Gamma} \frac{f(z)}{z-3i}\, dz = 2f(3i).$ ____ Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ para $r > 0$. Entonces:

   a) Si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{T}_1$ y f es no constante, entonces f se anula en $D(0,1)$. ____ Correcta

   b) Si $\max_{z \in \mathbb{T}_r} |f(z)| = \max_{z \in \mathbb{T}_R} |f(z)|$ para $R, r > 0$ entonces $f(\mathbb{T}_R) = f(\mathbb{T}_r)$. ____ Correcta

   c) Si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|f(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ entonces f es constante.

   d) Si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} f(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{Re} f(z)$ entonces f es constante. ____ Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge puntualmente hacia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces:

   a) f es continua pero no necesariamente holomorfa en Ω.

   b) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω, entonces f es continua pero no necesariamente holomorfa en Ω.

   c) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ____ Correcta

   d) Si $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre fronteras de cuadrados contenidos en Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ____ Correcta

   e) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, pedreno@um.es