Funciones de variable compleja / Introducción al análisis complejo
Control 1 — 21–11–2011

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas) y el tipo (01 o 02), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. Sea $z = -1 + i \in \mathbb{C}$, entonces:
   - *a*) $z\bar{z} = 2$ y $11\pi/4$ es argumento de z. ________ Correcta
   - *b*) El módulo de z es $\sqrt{2}$ y $3\pi/4$ es argumento de z. ________ Correcta
   - *c*) El módulo de z es $-\sqrt{2}$ y $5\pi/4$ es argumento de z.
   - *d*) El módulo de z es $\sqrt{2}$ y $5\pi/4$ es argumento de z.
   - *e*) $z\bar{z} = 2$ y $5\pi/4$ es argumento de z.
   - *f*) Ninguna de las anteriores.

2. Consideremos la ecuación $z^n = 1$. Entonces:
   - *a*) No existe ninguna solución en $\mathbb{R}$.
   - *b*) Si z es solución también lo es $\bar{z}$. ________ Correcta
   - *c*) La suma de los argumentos principales de todas las soluciones es $(n-1)\pi$.
   - *d*) La suma de los argumentos principales de todas las soluciones es 2π.
   - *e*) Las raíces son los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia unidad, una de cuyas diagonales está contenida en la recta real si n es par. ________ Correcta
   - *f*) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? ($\log(z)$ representa el conjunto de los logaritmos de z y $\operatorname{Log}(z)$ el logaritmo principal de z. $\operatorname{Arg}(z)$ es el argumento principal de z)
   - *a*) Si $w \in \log(-1-i)$ entonces $|w| = \frac{1}{2}\log 2$ y $\operatorname{Arg}(w) = -\frac{\pi}{4}$.
   - *b*) $\log(-1) = \{k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.
   - *c*) $\operatorname{Log}(e^z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   - *d*) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$. ________ Correcta
   - *e*) $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.
   - *f*) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   - *a*) e^z es inyectiva en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$, siendo $\beta - \alpha \leq 2\pi$.
   - *b*) e^z es inyectiva en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$, siendo $\beta - \alpha \leq 2\pi$. ________ Correcta
   - *c*) $\{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. ________ Correcta
   - *d*) La imagen por e^z de $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi]\}$ es $\mathbb{C}$.
   - *e*) e^z es la única función analítica en $\mathbb{C}$ que verifica: $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$. ________ Correcta
   - *f*) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, pedreno@um.es

5. Sea la función, dependiente del parámetro $a \in \mathbb{C}$, $S_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, entonces:

   a) $\{S_a(z) : a \in D(0,1)\}$ son todas las transformaciones de Möbius que llevan $D(0,1)$ en sí mismo.

   b) Para cada $a \in D(0,1)$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha}S_a(z)$ es una transformación de Möbius que lleva $D(0,1)$ en sí mismo. ________ Correcta

   c) $(S_a)^{-1}(z) = S_{-a}(z)$. ________ Correcta

   d) $S'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$. ________ Correcta

   e) Existe $z_0 \in D(0,1)$ tal que $|S_a(z_0)| = 1$.

   f) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ una transformación de Möbius. Entonces:

   a) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ entonces $T(D(a,r)) = D(b,\rho)$.

   b) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y existe $z_0 \in D(a,r)$ tal que $|T(z_0)-b| < \rho$ entonces $T(D(a,r)) = D(b,\rho)$. ________ Correcta

   c) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y existe $z_0 \in D(a,r)$ tal que $|T(z_0)-b| > \rho$ entonces $T(D(a,r)) = \{z : |z-b| > \rho\}$.

   d) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y existe $z_0 \in D(a,r)$ tal que $|T(z_0)-b| > \rho$ entonces $T(D(a,r)) = \{z : |z-b| > \rho\} \cup \{\infty\}$. ________ Correcta

   e) Si $T(\partial D(a,r)) = \partial D(b,\rho)$ y se verifican $T(a) \in \mathbb{C}$, $|T(a)-b| > \rho$ entonces existe r', con $0 < r' < r$, tal que $T(\partial D(a,r'))$ es una recta. ________ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

7. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre series de potencias son ciertas?

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en $D(0,1)$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $\overline{D(0,1)}$.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge puntualmente en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge puntualmente en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{1\}$. ________ Correcta

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en $\overline{D(0,1)}$. ________ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, pedreno@um.es

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica en Ω. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es cierto que implica que f es constante.

   a) $f(\Omega)$ está contenido en una circunferencia. ______ Correcta

   b) $f(\Omega)$ está contenido en una recta. ______ Correcta

   c) $f(\Omega)$ está contenido en una conjunto del tipo $\{x + iy : y = \alpha x^2\}$. ______ Correcta

   d) f es constante en una circunferencia $\partial D(a, r) \subset \Omega$. ______ Correcta

   e) $|f|$ es constante en una circunferencia $\partial D(a, r) \subset \Omega$.

   f) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, con $u(x+yi) = \operatorname{Re} f(x+yi)$ y $v(x+yi) = \operatorname{Im} f(x+yi)$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre f son ciertas?

   a) Si f es holomorfa en un punto entonces también lo son u y v en dicho punto.

   b) Si u y v tienen derivadas parciales continuas respecto a x e y en todo Ω entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

   c) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a)i$. ______ Correcta

   d) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)i$.

   e) Si f es holomorfa en $a \in \Omega$ entonces $f'(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - \frac{\partial u}{\partial y}(a)i$. ______ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

10. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, denotaremos por L_f una rama continua del logaritmo de f, definida en cada caso cómo y dónde se indique. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas?

   a) Si L_f existe en el abierto $U \subset \Omega$ entonces $L_f \in \mathcal{H}(U)$. ______ Correcta

   b) Si $f(z) = z^4 - 1$ y $\Omega = \mathbb{C}$ entonces existe un disco $D(0, r)$ donde existe L_f. ______ Correcta

   c) Si $f(z) = z$ y $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log}(-z) + (2k+1)\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. ______ Correcta

   d) Si $f(z) = z^2 - 1$ y $\Omega = D(0, 1)$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log}(z^2 - 1) + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

   e) Si $f(z) = \frac{1+iz}{1-z}$, $\Omega = D(0, 1)$ y $L_f(0) = 1$ entonces $L_f(z) = \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-z}$. ______ Correcta

   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, pedreno@um.es