Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

**Problemas Selectos de Funciones de Variable Compleja** **25 de Diciembre de 2011**

# 1. Funciones elementales

1. Pruébese que para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{C}$ se verifica:

$$\left|e^z - (1+\frac{z}{m})^m\right| \leq e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{m}$$

Dedúzcase de ello que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$, y que el límite es uniforme sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.

2. Pruébese que $f(z) = \pi \cdot \mathrm{cotg}(\pi z)$ está acotada en $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D(n, \frac{1}{4})$. ____________Escanear solución

# 2. Geometría y transformaciones

1. Determínense geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

   a) $\{z : \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{z-a}}{\mathrm{b}}\right) = 0\}$, $\{z : \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{z-a}}{\mathrm{b}}\right) > 0\}$ , $a, b \in \mathbb{C}$;

   b) $\{z : \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}\right) = 1\}$, $\{z : \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}\right) > 1\}$ , $b \in \mathbb{C}$;

   c) $\{z : |z|^2 - \mathrm{Re}\,(\bar{\mathrm{a}}\mathrm{z}) + \alpha = 0\}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

   d) $\{z : |z-a| = \alpha|z-b|\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$;

   e) $\{z : |z-a| = |1-\bar{a}z|\}$, $|a| < 1$.

2. Determínense la imagenes de los siguientes dominios $\Omega$ mediante las funciones $f$ que se indican:

   i) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im\ z}| < \pi\}$, $f(z) = e^z$

   ii) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re\ z} > 0, |\mathrm{Im\ z}| < \pi\}$, $f(z) = e^z$

   iii) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re\ z} > 0, \mathrm{Im\ z} > 0\}$, $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

   iv) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Arg\ z} < \frac{\pi}{4}\}$, $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

   v) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im\ z} < 0\}$, $f(z) = \dfrac{(Tz)^2 - i}{(Tz)^2 + i}$ donde $T$ es la transformación inversa de $Sz = \dfrac{z-i}{z+i}$.

   vi) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Rez < \frac{\pi}{4}\}$, $f(z) = \mathrm{tg}\, z$ ________________________________Escanear solución

   ¿En cuales de los apartados anteriores las aplicaciones dadas establecen biyecciones holomorfas?

# 3. Derivabilidad

1. Pruébese que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa en $\overline{\Omega} = \{\bar{z} : z \in \Omega\}$.

2. Sea $\Omega$ un abierto conexo, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ funciones tales que $\bar{f}g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pruébese que o bien $f$ es constante, o bien $g$ es idénticamente nula.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

## 4. Principio de identidad

1. Sea $\Omega$ un abierto conexo que contiene al 0 y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pruébese que si $|f(\frac{1}{n})| < \frac{1}{2^n}$ para $n$ suficientemente grande, entonces $f$ es idénticamente nula.

2. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re z} > 0\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pruébese que si $f(z) \in \mathbb{R}$ cuando $z \in \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, entonces $f(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ para cada $z \in \Omega$.

## 5. Desigualdades de Cauchy y Teorema de Liouville

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ¿Existe algún punto $a \in \Omega$ tal que $|f^{(n)}(a)| \geq n^n n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

2. Pruébese que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ es constante.

## 6. Integral curvilínea

1. Sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$. Sea $\gamma : [a, b] \to \Omega_1$ un camino de clase $C^1$, $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ una función holomorfa y $f : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ una función continua. Pruébese que

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = \int_\gamma f(\varphi(\omega))\varphi'(\omega) d\omega$$

Pruebe que si $\gamma$ es un camino regular a trozos, tal que $0 \notin \text{Im } \gamma \subset \Omega$, entonces para $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se verifica:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -\int_{\frac{1}{\gamma}} f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}\, dz$$

donde $\sigma = \frac{1}{\gamma}$ es el camino inverso: $\sigma(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$.

2. Sea $\gamma$ un camino regular $C^1$ a trozos y $\overline{\gamma}$ su imagen por la aplicación $z \to \overline{z}$. Sea $f$ una función continua sobre $\gamma$. Pruébese que

$$\overline{\int_\gamma f(z) dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})} dz$$

y en particular

$$\overline{\int_C f(z) dz} = -\int_C \frac{\overline{f(z)}}{z^2} dz$$

donde $C(\vartheta) = e^{i\vartheta}, \vartheta \in [0, 2\pi]$.

## 7. Teoremas de Cauchy

1. Calcúlense las siguientes integrales curvilíneas en las que $C_\rho(\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ y $\rho > 0$.

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z} dz; \qquad \int_{C_2} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$\int_{C_1} e^z z^{-n} dz; \qquad \int_{C_1} z^n (1-z)^m dz$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

2. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, y $a \in D(0,1)$ un punto tal que $f'(a) \neq 0$. Sea $C_r(\vartheta) = a + e^{i\vartheta}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Pruébese que si $r$ es suficientemente pequeño

$$2\pi i = f'(a) \int_{Cr} \frac{dz}{f(z) - f(a)}$$

# 8. Lema de Schwarz y Principio del módulo máximo

1. Se supone que $f$ es una función no constante holomorfa en un abierto conexo $\Omega$ y que $|f|$ es constante sobre la frontera de un disco $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$. Pruébese que $f$ se anula en algún punto $z_0 \in D(a,r)$.

2. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(0,R)$. Pruébese que si $a \in D(0,R)$ y $f(a) = b$ entonces para cada $z \in D(0,R)$ se cumple:

$$\left| \frac{M(f(z) - f(a))}{M^2 - \overline{b}f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z-a)}{R^2 - \overline{a}z} \right|$$

Dedúzcase de lo anterior que si $M = R = 1$, para todo $z \in D(0,1)$ se cumple:

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

para cada $z \in D(0,1)$. ________________ Escanear solución

# 9. Determinaciones de ramas holomorfas

1. Sea $A_j = \{z \in \mathbb{C} : j < |z| < j+1\}$, $j = 0,1,2$, y

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Cálculese

$$\int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

donde $\gamma_j$ es cualquier camino cerrado en $A_j$, $j = 0,1,2$. Pruebese que $f$ tiene un logaritmo holomorfo en $A_1$.

2. Indíquese un abierto conexo $\Omega \neq D(0,1)$ tal que $\Omega \supset D(0,1)$, en el que se pueda asegurar la existencia de una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando $\operatorname{sen} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$.

   **Indicación:** Para encontrar una expresión de $f(z)$, es decir del $\operatorname{arc\,sen} z$, de la cual debe probarse la existencia de una rama holomorfa, se puede proceder de dos formas: (1) a partir de la definición del seno, se invierte la función, obteniéndola a partir de las raíces de un polinomio cuadrático; (2) derivando directamente en la igualdad $\operatorname{sen} f(z) = z$ y utilizando la fórmula fundamental de la trigonometría.

3. Definir explícitamente mediante un desarrollo en serie de potencias un logaritmo analítico de la función $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ en el disco unidad $D(0,1)$. ________________ Escanear solución

## 10. Residuos

1. Determínense los residuos de las siguientes funciones en los puntos donde presentan singularidades aisladas.

| | |
|---|---|
| a) $z^{-(n+1)}e^z$ | b) $(1+z^{n+1})^{-1}$ |
| c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha z}{z(1+z^2)}$ | d) $e^{\frac{1}{z-1}}$ |
| e) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$ | f) $\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2-1}$ |
| g) $f(z)=\frac{e^{\operatorname{sen} z}-e^{\operatorname{tg} z}}{z^4}$ | |

2. Sea $f(z)=\dfrac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{z^{2m}}$. Calcúlese $Res(f,0)$, considerando la integral $\displaystyle\int_{C_n} f(z)dz$ donde $C_n(\theta)=(n+\frac{1}{2})e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$. Como aplicación calcúlense $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Escanear solución

## 11. Singularidades

1.

   (a) Pruebe que $h\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es un polinomio de grado $m$ si y sólo si $\lim_{z\to\infty}\frac{h(z)}{z^m}$ existe y es distinto de cero.

   (b) Pruebe que si $h\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es un polinomio entonces $H(z)=f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en $z=0$.

   (c) Sea $h\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ una función entera que no es un polinomio y $f\in\mathcal{H}(D^*(a,r))$. Pruebe que si $a$ es una singularidad esencial de $f$ también es una singularidad esencial de $F(z)=h(f(z))$. Pruébese que la misma conclusión se alcanza si $a$ es un polo de $f$ y se supone que $1/f$ lleva entornos de $a$ a entornos de 0[1].

2. Sea $A\subset\mathbb{C}$ un conjunto finito tal que $0\notin A$ y $B=\{b\in\mathbb{C}: b^2=a\}$. Dada $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$ sea $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus B)$ definida por $g(z)=zf(z^2)$. Dado $a\in A$, pruébese que $g$ presenta en $z=b\in B$ el mismo tipo de singularidad que $f$ presenta en $a=b^2$ (si es un polo, con la misma multiplicidad) y que se verifica $Res(g,b)=\frac{1}{2}Res(f,a)$. Escanear solución

## 12. Desarrollos de Laurent

1. Obténganse los desarrollos de Laurent de la función

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

en las coronas circulares

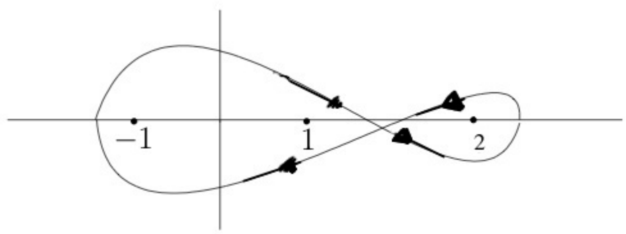
| | |
|---|---|
| $\{z\in\mathbb{C}: 1<\lvert z\rvert<2\}$ | $\{z\in\mathbb{C}: 2<\lvert z\rvert\}$ |
| $\{z\in\mathbb{C}: 0<\lvert z\rvert<1\}$ | $\{z\in\mathbb{C}: 0<\lvert z-1\rvert<1\}$ |
| $\{z\in\mathbb{C}: 1<\lvert z-1\rvert\}$ | $\{z\in\mathbb{C}: 0<\lvert z-2\rvert<1\}$ |
| $\{z\in\mathbb{C}: 1<\lvert z-2\rvert<2\}$ | $\{z\in\mathbb{C}: 2<\lvert z-2\rvert\}$ |

[1] Esta hipótesis es de hecho superflua, pero para probarlo necesitamos conocer el teorema de la aplicación abierta para funciones holomorfas no constantes.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es

¿En qué coronas existe primitiva de la función?

2. Sea $f(z)$ la raíz cúbica de $(z-1)(z+1)^2$ definida en $A = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y determinada por $f(2) = \sqrt[3]{9}$.
   (a) Obtenga su desarrollo de Laurent en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.
   (b) Calcule $\int_\gamma f(z)\, dz$ siendo $\gamma(t) = 2\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (c) Pruebe que si $r > 1$ y $\rho > 1$, entonces
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{C_\rho} z^{n-1} f(z)\, dz = 0$$
   donde $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (d) Calcule $\int_\sigma \frac{f(z)}{z-2}\, dz$ donde $\sigma$ es un camino como el de la figura. ____________Escanear solución




3. Calcúlese $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{h(z)}$ donde $h$ es cualquier raíz cúbica holomorfa de $(z^3-1)(z-2)$ en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y $\gamma(\theta) = \frac{3}{2}e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

## 13. Cálculo de integrales por residuos

1. Calcúlense las siguientes integrales por el método de los residuos:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\theta d\theta \qquad \text{Sol: } \pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} \quad (a > b > 0) \qquad \text{Sol: } \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0) \qquad \text{Sol: } \frac{\pi}{4a^3}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx \quad (a \geq 0, b > 0) \qquad \text{Sol: } \frac{\pi(1+ab)e^{-ab}}{2b^3}$$

2. Considerando la función $\dfrac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$ calcúlese la integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$
____________________________________Escanear solución

3. Considerando la función $\dfrac{e^{2iz} - 1}{z^2}$ calcúlese la integral
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$$
____________________________________Escanear solución

# 14. Teorema de Rouché y Principio del argumento

1. Calcule la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ donde

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z-1} \quad \text{y} \quad \gamma(t) = \frac{2e^{it}}{1+2e^{it}}\ t \in [0, 2\pi]$$

Escanear solución

**Indicación:** para el cálculo del índice de $\gamma$ alrededor del 1 utilice el principio del argumento.

2. Pruébese que todos los ceros del polinomio $z^5 - z + 16$ están contenidos en la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

3. Pruébese que dado $R > 0$, para $n$ suficientemente grande los ceros del polinomio $1+z+\frac{1}{2!}z^2+\ldots+\frac{1}{n!}z^n$ no están en el disco $D(0, R)$. Escanear solución


B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño. e-mail: beca@um.es y pedreno@um.es