$$\mathrm{Res}(f,ib) = \left((z-ib)^2 f(z)\right)'\Big|_{z=ib} = \left(\frac{e^{iaz}}{(z+ib)^2}\right)'\Big|_{z=ib} = \dots = \frac{(1+ab)\,e^{-ab}}{i4b^3}.$$

De donde sale que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+a^2)}\,dx = 2\pi \cancel{i}\,\frac{(1+ab)\,e^{-ab}}{\cancel{i}4b^3} = \frac{\pi(1+ab)\,e^{-ab}}{2b^3}.$$

tomando partes reales, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1+ab)e^{-ab}}{2b^3} \quad \#$$

4º TIPO.-

Vamos a estudiar ahora integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{i\alpha x}\,dx \qquad \alpha > 0$$

donde las condiciones serán

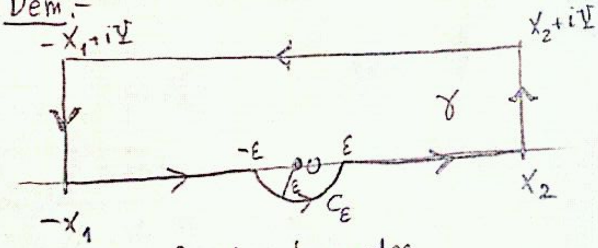
a) R tiene un polo simple en el eje real, que por simplicidad supondremos que es el

b) $R = P/Q$, $\quad$ Grado(Q) - Grado$(P) \geq 1$

Se tiene,

$$vp(0)\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,a>0}' \mathrm{Res}(f,a) + \pi i\,\mathrm{Res}(f,0).$$

Dem.-



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,a>0}' \mathrm{Res}(f,a) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0).$$

X_1, X_2, Y suficientemente grandes

$\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

$$\left|\int_{-X_1}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{X_2} f(x)\,dx - I\right| \leq \frac{M/\alpha}{X_1} + \frac{M/\alpha}{X_2} + \frac{M\,e^{-\alpha Y}}{Y}(X_1+X_2)$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = I.$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = I - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$$

Lema: $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i\,\mathrm{Res}(f,0).$

Tomemos $D^*(0,r)$ suficientemente pequeño

$$f(z) = \frac{\mathrm{Res}(f,0)}{z} + \psi(z) \qquad z\in D^*(0,r) \qquad \psi\in\mathcal{H}(D(0,r))$$

Nos restringimos $\overline{D(0,r/2)}$ y sea $K \geq |\varphi(z)|$ $z \in D(0,r/2)$, y escribamos

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \frac{Res(f,0)}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}}\, i\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}}_{\downarrow\ \pi i\, Res(f,0)} + \underbrace{\cancel{\int_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz}}_{=0} \qquad \varepsilon \to 0$$

#

Ejemplo. Calcúlese la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi x \cos\pi x}{2x^2 - x}\,dx$. razonando su convergencia.

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\pi x \cdot \cos\pi x}{2x\,(x - 1/2)}$ tiene discontinuidades evitables en $x=0$ y $x = 1/2$

$$\frac{\operatorname{sen}\pi x \cos\pi x}{2x\,(x-1/2)} = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2x(x-1/2)} \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi x \cdot \cos\pi x}{2x^2 - x} = \frac{1}{2}\, Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2\pi x}}{2x\,(x-1/2)}\,dx\right)$$

verifica las condiciones del teorema proba[do]

$$f(z) = \frac{e^{i2\pi z}}{2z\,(z-1/2)}$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{i2\pi z}}{2(z-1/2)} = \frac{1}{-1} = -1, \qquad Res(f, 1/2) = \lim_{z\to 1/2} \frac{e^{i2\pi z}}{2z} = -1$$

$$vp(0;1/2)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2\pi x}}{2x^2 - x}\,dx = -2\pi i \overset{\text{Reales}}{\rightsquigarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi x \cdot \cos\pi x}{2x^2 - x}\,dx = -\pi$$

#

28/Mayo/2003

DESARROLLOS DE LAURENT

Definición.- Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Se dice que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ es convergente (resp. absolutamente convergente) si las series $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ son convergentes (respect. absolutamente convergentes). En este caso se define

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Observaciones:

a) Si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ es convergente, entonces para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=-\infty}^{k} a_n \qquad \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

convergen y su suma es S.

b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente sii $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es sumable, y en este caso $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ es convergente.