Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de una variable real I. 02/12/2011. TEST 5.

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. Sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sucesiones de números reales verificando que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ entonces $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$. Entonces:

   a) Las sucesiones (x_n) e $(y_n)_n$ son convergentes y ambas lo hacen al mismo punto.

   b) Si ambas sucesiones son convergentes entonces lo hacen al mismo punto.

   c) Si ambas sucesiones están acotadas, entonces son convergentes, convergiendo ambas al mismo límite.

   d) La sucesión $(x_n - y_n)_n$ converge a cero.

   e) Existe $\lim_n (x_n - y_n) = 0$ y por tanto $\lim_n x_n = \lim_n y_n$.

   f) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es:

   a) Convergente porque $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$.

   b) Convergente porque $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$.

   c) Divergente porque $\lim_n a_n \neq 0$.

   d) Convergente porque $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$.

   e) Convergente porque $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$.

   f) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $a_n = \frac{c^n}{n!}$, con $c > 1$, entonces:

   a) $(a_n)_n$ no está acotada porque $c > 1$ y c^n se hace tan grande como queramos para n muy grande.

   b) $\lim_n a_n = 0$.

   c) $\lim_n a_n = l$ con $l \neq 0$.

   d) $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{\lim_n \sqrt[n]{c}}{\lim_n \sqrt[n]{n!}} = \frac{c}{1} = c$.

   e) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

   f) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales con $\lim a_n = 0$ y para todo $n, a_n \neq 0$. Entonces:

   a) Para todo n, $|a_n| < 1$, $b_n := \frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ está bien definido y $\lim_n b_n = 1$.

   b) Para todo n, $|a_n| < 1$, $b_n := \frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ está bien definido y $\lim_n b_n = 0$.

   c) Existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n| < 1$, $b_n := \frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ está bien definido para todo $n \geq n_0$ pero $\lim_n b_n$ no existe.

   d) Existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n| < 1$, $b_n := \frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ está bien definido para todo $n \geq n_0$ y $\lim_n b_n = 1$.

   e) Existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n| < 1$, $b_n := \frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ está bien definido para todo $n \geq n_0$ y $\lim_n b_n = 0$.

   f) Ninguna de las anteriores.

5. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de I de manera que existe $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$.

   a) Si existe $\lim_{x\to a}(f+g)(x) \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$.

   b) Si no existe $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces no puede existir el $\lim_{x\to a}(f+g)(x) \in \mathbb{R}$.

   c) Si existe $\lim_{x\to a}(fg)(x) \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$.

   d) Si existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) \in \mathbb{R}$.

   e) Si existe $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lim_{x\to a}(fg)(x) \in \mathbb{R}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

6. Sea I un intervalo y $f : I \to (0, +\infty)$ continua, entonces:

   a) Existe $k > 0$ tal que $f(x) \geq k$ para todo $x \in I$.

   b) Si $I = [a, b]$ existe $k > 0$ tal que $f(x) \geq k$ para todo $x \in I$.

   c) Si $I = [a, +\infty)$ y existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ entonces existe $k > 0$ tal que $f(x) \geq k$ para todo $x \in I$.

   d) Si $I = [a, b)$ y existe $\lim_{x\to b^-} f(x) = l > 0$ entonces existe $k > 0$ tal que $f(x) \geq k$ para todo $x \in I$.

   e) Si $I = [a, +\infty)$ y existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ entonces existe $\min\{f(x) : x \in I\}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

7. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

   a) $f(I)$ es un intervalo.

   b) $f(I)$ es un intervalo únicamente si I es cerrado y acotado.

   c) Si $f(I) \cap [0,1] = \emptyset$ entonces o $f(I) \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ o $f(I) \subset \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

   d) Si $I = \mathbb{R}$ necesariamente $f(I) = \mathbb{R}$.

   e) $f(I) \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \neq \emptyset$ y $f(I) \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \neq \emptyset$

   f) Ninguna de las anteriores.

8. Sea $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ continua.

   a) Si existen $a, b \in D$ de manera que $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in D$ tal que $f(c) = 0$.

   b) Si D está acotado entonces f es una función acotada.

   c) Si D es un intervalo cerrado y acotado entonces f está acotada.

   d) Si D es un intervalo acotado entonces f está acotada.

   e) Para cada $x \in D$ existe un entorno de x en D donde f está acotada.

   f) Ninguna de las anteriores.

9. La ecuación $(x^2 - 2)e^{-x} + 1 = 0$ tiene:

   a) No tiene solución en el intervalo $[-2, 2]$.

   b) Al menos dos soluciones, una al menos en $(0, +\infty)$ y otra en $(-\infty, 0)$.

   c) Al menos una solución en $(-\infty, 0)$.

   d) Ninguna solución en $\mathbb{R}$.

   e) Ninguna solución, pues no está bien definida dado que e^{-x} no siempre existe pues no existen siempre logaritmos reales de números negativos.

   f) Ninguna de las anteriores.

10. Sea $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ para $x \in (0, +\infty)$.

    a) f es periódica de periodo $4\pi^2$.

    b) f es uniformemente continua porque está acotada.

    c) f alcanza su máximo y mínimo absolutos.

    d) f es uniformemente continua porque cos y $\sqrt{\ }$ son uniformemente continuas y la composición de funciones uniformemente continuas siempre es uniformemente continua.

    e) f es continua porque cos y $\sqrt{\ }$ son continuas y la composición de funciones continuas siempre es continua.

    f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia