Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de una variable real I. 17/11/2011. TEST 4.

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre números reales son verdaderas?

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la raíz n-ésima de un irracional positivo es un irracional.

   b) El producto de un número racional no nulo por un número irracional es un número irracional.

   c) Todo número irracional tiene un inverso que es también un número irracional.

   d) Todo número irracional es límite de una sucesión de números racionales.

   e) Todo número racional es límite de una sucesión de números irracionales.

   f) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales que tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

   a) La sucesión $(x_{n_k})_k$ está acotada.

   b) La sucesión $(x_n)_n$ está acotada.

   c) Si $(x_n)_n$ está acotada y cualquier subsucesión de $(x_n)_n$ que converge lo hace a α, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

   d) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

   e) Cualquier subsucesión de $(x_{n_k})_k$ es convergente hacia α.

   f) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_n x_{3n} = 0$, $\lim_n x_{3n+1} = 1$ y $\lim_n x_{3n+2} = 2$. Entonces:

   a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $x_m > 1{,}5$

   b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $x_m < 1{,}5$

   c) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > n$ se tiene $x_m > -0{,}1$

   d) $(x_n)_n$ está acotada superiormente pero no inferiormente.

   e) Todas las subsucesiones de $(x_n)_n$ son convergentes.

   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

4. Sean $0 < a < b$ dos números reales. Entonces:

   a) $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty}(na, nb)$
   b) Como $\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$ y $a < b$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que$(n+1)a < nb$ para $n \geq N$.
   c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(na, nb) = \emptyset$.
   d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(na, nb) = \emptyset$.
   e) Del apartado 4b) se deduce que $\cup_{n=1}^{\infty}(na, nb)$ contiene un intervalo de la forma $(\alpha, +\infty)$ para un adecuado α.
   f) Ninguna de las anteriores.

5. Sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dos sucesiones de números reales. ¿Es cierto lo que sigue?

   a) Si $(x_n + y_n)_n$ y $(x_n - y_n)_n$ son convergentes, entonces $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son convergentes.
   b) Si $(x_n \cdot y_n)_n$ es convergente, entonces $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son convergentes.
   c) Si $\lim_n (x_n)_n \neq 0$ y $(x_n \cdot y_n)_n$ es convergente, entonces $(y_n)_n$ es convergente.
   d) Si $(x_n)_n$ converge a 0 e $(y_n)_n$ está acotada e $y_n \neq 0$, entonces $(\frac{x_n}{y_n})_n$ es convergente.
   e) Si $(x_n)_n$ converge a 0 e $(y_n)_n$ está acotada, entonces $(x_n \cdot y_n)_n$ es convergente.
   f) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales que no está acotada superiormente. Entonces:

   a) $(a_n)_n$ no es convergente a un número real.
   b) $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m = +\infty$.
   c) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m = +\infty$.
   d) Para cada $M > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : M < a_n\}$ es infinito.
   e) $(a_n)_n$ tiene una subsucesión estrictamente creciente que no es acotada superiormente.
   f) Ninguna de las anteriores.

7. Sean $(a_n)_n$ una sucesión de números reales tal que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

   a) $(a_n)_n$ es de Cauchy.
   b) Como $0 \leq |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ y $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, la regla del sandwich nos dice que $\lim_n a_n = 0$.
   c) $(a_n)_n$ es convergente a un número real.
   d) $(a_n)_n$ no es necesariamente de Cauchy aunque $\lim_n(a_n - a_{n+1}) = 0$.
   e) $\lim_n(a_{n+1} - a_n) = 0$.
   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

8. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.

   b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ es convergente.

   c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es divergente.

   d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ es convergente.

   e) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ es convergente.

   f) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $a_n = \frac{3^n}{2^n+n!}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es:

   a) Convergente porque $\lim_n a_n = 0$.

   b) Divergente porque $\lim_n a_n \neq 0$.

   c) Convergente porque $a_n \leq (\frac{3}{2})^n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{3}{2})^n$ es convergente.

   d) Convergente ya que $a_n \leq \frac{3^n}{n!}$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ es convergente.

   e) Convergente ya que se puede comparar con la serie geométrica de razón $\frac{2}{3}$ que es convergente.

   f) Ninguna de las anteriores

10. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{n!}{n^n}$ para $a \neq e$. Entonces, la serie es:

   a) Divergente pues el $\lim_n a^n \frac{n!}{n^n} = \infty$ para todo $a \neq e$.

   b) Convergente pues el $\lim_n a^n \frac{n!}{n^n} = 0$ para todo $a \neq e$.

   c) Convergente para todo $a < e$.

   d) Divergente para todo $a > e$.

   e) Convergente para todo $a < e$ pues el $\lim_n a^n \frac{n!}{n^n} = 0$ para todo $a < e$.

   f) Ninguna de las anteriores.