Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de una variable real I. 03/11/2011. TEST 3.

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : |4 - 5x| + |x - 3| > 7\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus A$, entonces:

   a) $\sup B = \inf A$
   b) $\inf B = \sup\{x \in A \text{ y } x < 0\}$.
   c) $\inf B = 0$ y $\sup B = 2$.
   d) El conjunto A no está acotado ni superior ni inferiormente.
   e) $\inf\{x \in A \text{ y } x > 0\} \in A$.
   f) Ninguna de las anteriores.

2. En $\mathbb{R}$ se verifica que:

   a) $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} + \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 4\} < \sup\{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$.
   b) $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} + \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 4\} = \sup\{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$.
   c) $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} + \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 4\} > \sup\{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$.
   d) $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} + \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 4\} = \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 6\}$.
   e) $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} + \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 4\} = \sup\{x + y \in \mathbb{Q} : x^3 < 4 \text{ e } y^3 < 2\}$.
   f) Ninguna de las anteriores.

3. La desigualdad $|x - 2| \geq \frac{1}{3}$ en $\mathbb{R}$ es equivalente a:

   a) $x - 2 \geq \frac{1}{3}$ o $x - 2 \leq -\frac{1}{3}$.
   b) $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.
   c) $x \in (-\infty, \frac{5}{3}] \cup [\frac{7}{3}, +\infty)$.
   d) $|2 - x| \leq -\frac{1}{3}$.
   e) $x \notin \{y \in \mathbb{R} : |y - 2| < \frac{1}{3}\}$.
   f) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$. Entonces:

   a) $z^6 = 1$.
   b) El módulo de z es 1 y $\frac{5}{3}\pi$ es argumento de z.
   c) $\overline{z}^6 = 1$.
   d) $z\overline{z} = 2$ y $\frac{\pi}{3}$ es argumento de $\overline{z}$.
   e) La suma de un argumento de z y otro de $\overline{z}$ es cero.
   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

5. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales que tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) La sucesión $(x_{n_k})_k$ es acotada.

   b) Si $(x_n)_n$ no está acotada, entonces no puede existir la subsucesión $(x_{n_k})_k$.

   c) Si cualquier subsucesión convergente de $(x_n)_n$ lo hace a α, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

   d) Si $(x_n)_n$ es acotada y cualquier subsucesión suya converge a α cualquier subsucesión suya convergente lo hace a α, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

   e) Cualquier subsucesión de $(x_{n_k})_k$ es convergente hacia α.

   f) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales acotada y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \geq n_0$. Entonces:

   a) $(x_n)_n$ no es convergente.

   b) $(x_n)_n$ es convergente y $\lim_n x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$.

   c) $(x_n)_n$ es convergente y $\lim_n x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

   d) $(x_n)_n$ es convergente y $\lim_n x_n > \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

   e) $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, \lim_n x_n\}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

7. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_n x_{2n} = 1$ y $\lim_n x_{2n+1} = -1$. Entonces:

   a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k > n$ tal que $x_k < -0{,}9$.

   b) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > n$ se tiene $x_m \leq 1$.

   c) $(x_n)_n$ está acotada superiormente.

   d) Todas las subsucesiones de $(x_n)_n$ son convergentes.

   e) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > n$ se tiene $|x_m - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4}$.

   f) Ninguna de las anteriores.

8. Sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dos sucesiones de números reales. ¿Es cierto lo que sigue?

   a) Si $(x_n + y_n)_n$ es convergente, entonces $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son convergentes.

   b) Si $(x_n)_n$ y $(x_n + y_n)_n$ son convergentes, entonces $(y_n)_n$ es convergente.

   c) Si $(x_n)_n$ y $(x_n \cdot y_n)_n$ son convergentes, entonces $(y_n)_n$ es convergente.

   d) Si $(|x_n|)_n$ es convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

   e) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces $(|x_n|)_n$ es convergente.

   f) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $(x_n)_n$ una sucesión Cauchy de números reales. ¿Es cierto lo que sigue?

    a) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p \in \mathbb{N}$ entonces $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leq \varepsilon$.

    b) Si $x_n \in \mathbb{Q}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(x_n)_n$ es convergente y su límite pertenece a $\mathbb{Q}$.

    c) Si $x_n \in \mathbb{Q}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(x_n)_n$ es convergente y su límite pertenece a $\mathbb{R}$.

    d) La sucesión $(x_n)_n$ puede ser no acotada aunque posee una subsucesión convergente.

    e) Todas las subsucesiones de $(x_n)_n$ son de Cauchy.

    f) Ninguna de las anteriores

10. Para la sucesión $(x_n)_n$ en $\mathbb{R}$ definida debajo se tiene que:

$$x_n := n\left(\frac{1}{1^2+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

    a) No se puede calcular su límite, ya que al poner ... nunca acabamos de sumar los términos que hay.

    b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^2}{n^2+n^2} \leq x_n \leq \frac{n^2}{1+n^2}$.

    c) Del apartado 10*b*) se deduce que $\frac{1}{2} \leq \lim_n x_n \leq 1$.

    d) Del apartado 10*b*) se deduce que la sucesión $(x_n)_n$ está acotada.

    e) Del apartado 10*b*) se deduce que si $(x_n)_n$ es convergente entonces $\frac{1}{2} \leq \lim_n x_n \leq 1$.

    f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia