Universidad de Murcia | Facultad de Matemáticas

Funciones de una variable real I. 20/10/2011. TEST 2.

TIPO 01

ATENCIÓN: Rellene los datos de la cabecera: a la izquierda el D.N.I. (en dos formas), a la derecha facultad, asignatura, apellidos, nombre y fecha.

1. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados inferiormente, $A \cap B$ su intersección, $A \cup B$ su unión, $A + B := \{x = a + b : a \in A, b \in B\}$ y $AB := \{x = ab : a \in A, b \in B\}$. Entonces:

   a) Si $A \subset B$, entonces $\inf A \geq \inf B$.

   b) Si $A \subset B$, entonces $\inf A \leq \inf B$.

   c) $A + B$ es acotado inferiormente e $\inf(A + B) \leq \inf A + \inf B$.

   d) Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cap B$ está acotado inferiormente e $\inf(A \cap B) \geq \sup\{\inf A, \inf B\}$.

   e) AB está acotado inferiormente e $\inf(AB) = \inf A \inf B$.

   f) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Es cierto lo que sigue?

   a) Si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, con b y d primos, si $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

   b) Si $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

   c) Si $p, q \in \mathbb{N}$ son primos distintos entonces $\sqrt{pq}$ es irracional.

   d) La suma de dos números irracionales es un número irracional.

   e) El producto de un número racional no nulo por un número irracional es un número irracional.

   f) Ninguna de las anteriores.

3. La propiedad arquimediana de los números reales nos dice que dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$. De los siguientes enunciados, ¿cuál es equivalente a negar dicha propiedad?

   a) $\mathbb{N}$ está acotado superiormente.

   b) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tales que $x \geq ny$.

   c) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ e $y > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $x \geq ny$.

   d) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\frac{x}{y} \geq n$.

   e) Existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \leq 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $x \geq ny$.

   f) Ninguna de las anteriores.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: beca@um.es, luis@um.es, matias@um.es, tmsignes@um.es

4. Sea A un subconjunto no vacío de números reales y $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Cual de los siguientes enunciados asegura que $\alpha = \sup A$?

   a) Para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$ y existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\text{lím}_n\, x_n = \alpha$.
   b) Para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq \alpha$.
   c) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$, $x \leq M$ y $\alpha \leq M$.
   d) Para todo $M \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in A$, $x \leq \alpha$, $x \leq M$ y $\alpha \leq M$.
   e) El conjunto $-A := \{-x : x \in A\}$ está acotado inferiormente y $-\alpha = \text{ínf}(-A)$.
   f) Ninguna de las anteriores.

5. La desigualdad $|x - \alpha| \leq 1$ es equivalente a:

   a) $-1 \leq x - \alpha \leq 1$.
   b) $-\alpha - 1 \leq x \leq \alpha + 1$.
   c) $\alpha - 1 \leq x \leq \alpha + 1$.
   d) $-1 \leq |x - \alpha|$.
   e) $-1 \leq \alpha - x \leq 1$.
   f) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - x| - x > 8\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus A$, entonces:

   a) $\sup B = \text{ínf}\, A$
   b) $\sup B = \text{ínf}\{x \in A \text{ y } x > 0\}$.
   c) $\text{ínf}\, B = -2$ y $\sup B = 4$.
   d) El conjunto A no está acotado ni superior ni inferiormente.
   e) $\sup\{x \in A \text{ y } x < 0\} \in A$.
   f) Ninguna de las anteriores.

7. Sea $z = -1 + i \in \mathbb{C}$, entonces:

   a) $z\overline{z} = 2$ y $11\pi/4$ es argumento de z.
   b) El módulo de z es $\sqrt{2}$ y $3\pi/4$ es argumento de z.
   c) El módulo de z es $-\sqrt{2}$ y $5\pi/4$ es argumento de z.
   d) El módulo de z es $\sqrt{2}$ y $5\pi/4$ es argumento de z.
   e) $z\overline{z} = 2$ y $5\pi/4$ es argumento de z.
   f) Ninguna de las anteriores.

8. El número -8 tiene:
   a) Una raíz cúbica en $\mathbb{R}$ y dos en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
   b) Tiene dos raíces cúbicas en $\mathbb{R}$ que son 2 y -2.
   c) Tres raíces cúbicas en $\mathbb{C}$.
   d) Tres raíces cúbicas en $\mathbb{R}$.
   e) Una raíz cúbica en $\mathbb{R}$ y dos raíces en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ que son conjugadas una de la otra.
   f) Ninguna de las anteriores.

9. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Supongamos que sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq n$ tal que $|x_{n_0} - l| > \varepsilon$. Entonces se tiene:
   a) Que l no puede ser el límite de la sucesión (x_n).
   b) Que $\lim_n x_n = l$.
   c) Que existe $\lim_n x_n$ pero no puede ser l.
   d) Que $\lim_n x_n$ no existe.
   e) Que $\inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\sup_{m\geq n} |x_m - l|\big) \geq \varepsilon$.
   f) Ninguna de las anteriores.

10. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_n x_{2n} = 1$ y $\lim_n x_{2n+1} = 0$. Entonces:
    a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $x_m > 0{,}9$.
    b) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n$ se tiene $x_m > 0{,}9$.
    c) $(x_n)_n$ no es convergente.
    d) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > n$ se tiene $|x_m - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4}$.
    e) $(x_n)_n$ tiene límite 1 y límite 0 a la vez.
    f) Ninguna de las anteriores.